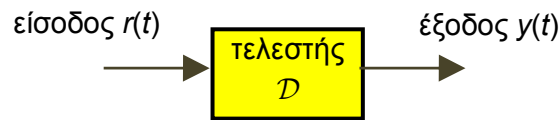


Θεώρημα συνέλιξης

Για το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα,

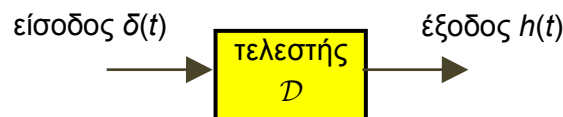


Σχήμα 1 Δομικό διάγραμμα γραμμικού συστήματος

ισχύει,

$$y(t) = r(t) * h(t) \quad (1)$$

όπου $h(t)$ η ωστική απόκριση του συστήματος, δηλαδή η έξοδος του σε ωστική είσοδο (γνωστή και ως συνάρτηση Dirac):



Σχήμα 2 Γραμμικό σύστημα με είσοδο μοναδιαίας ώσης

Επί της ουσίας το Σχ. 1 αναπαριστά τη γραμμική διαφορική εξίσωση με σταθερούς συντελεστές,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_0 r(t) \quad (2)$$


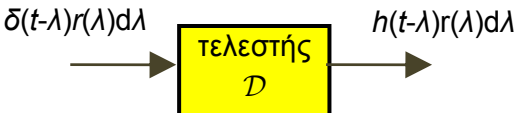
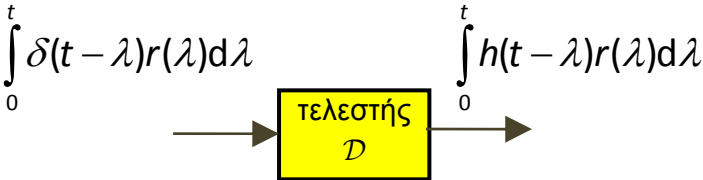
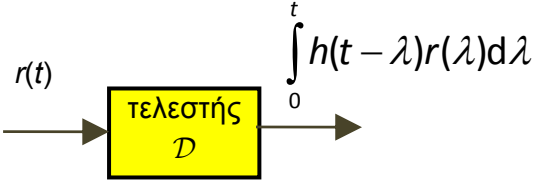
($n \geq m$) και τις συνοδευτικές, μηδενικές αρχικές συνθήκες,

$$\frac{d^{n-1} y(0)}{dt^{n-1}} = \frac{d^{n-2} y(0)}{dt^{n-2}} = \dots = y(0) = 0 \quad (3)$$

Απόδειξη:

Θα χρησιμοποιήσω τις δύο ιδιότητες των γραμμικών συστημάτων: την ιδιότητα της υπέρθεσης και την ιδιότητα του χρονικού αμετάβλητου. Έτσι ξεκινώντας από το Σχ.

2, εκτελώ τις εξής πράξεις:

<p>χρονικά αμετάβλητο</p>	
<p>υπέρθθεση (λ σταθερά, άρα $r(\lambda)d\lambda$ σταθερά)</p>	
<p>υπέρθθεση (η ολοκλήρωση είναι γραμμική διαδικασία)</p>	
<p>από τον εναλλακτικό ορισμό της ωστικής συνάρτησης</p>	

Κοιτώντας το τελευταίο σχήμα και το Σχ. 2, προκύπτει η ζητούμενη σχέση:

$$y(t) = \int_0^t h(t-\lambda)r(\lambda)d\lambda \triangleq r(t) * h(t) \quad (4)$$

Είναι ενδιαφέρον να δούμε τη διαδικασία αυτή μ' ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, καθώς η αλληλουχία της μαθηματικής απόδειξης σκιάζει την ουσία της διαδικασίας που είναι το γεγονός ότι αυτό που κάνουμε είναι να προσεγγίζουμε την συνάρτηση εισόδου με μία σειρά από ωστικές συναρτήσεις, κατάλληλου πλάτους, και στη συνέχεια λόγω της γραμμικότητας να αθροίζουμε όλες τις επιμέρους ωστικές αποκρίσεις

για να πάρουμε τη ζητούμενη απόκριση.

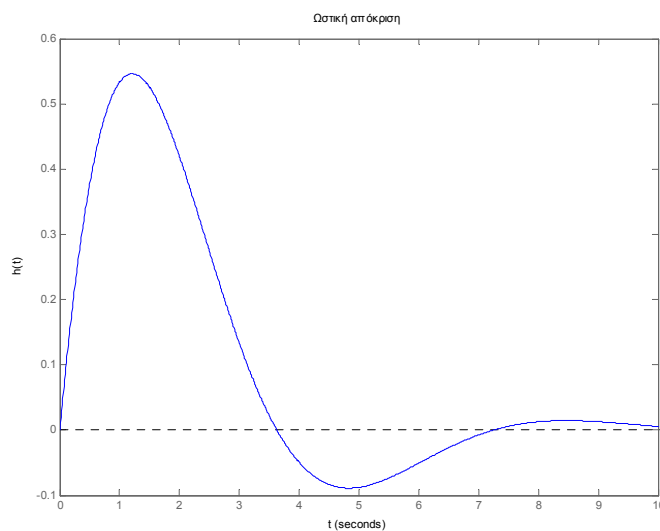
Έστω λοιπόν η διαφορική εξίσωση,

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \frac{dy(t)}{dt} + y = r(t) \quad (5)$$

της οποίας η ωστική απόκριση είναι,

$$h(t) = \sqrt{\frac{4}{3}} e^{-0,5t} \eta\mu\left(\sqrt{\frac{3}{4}}t\right) u(t) \quad (6)$$

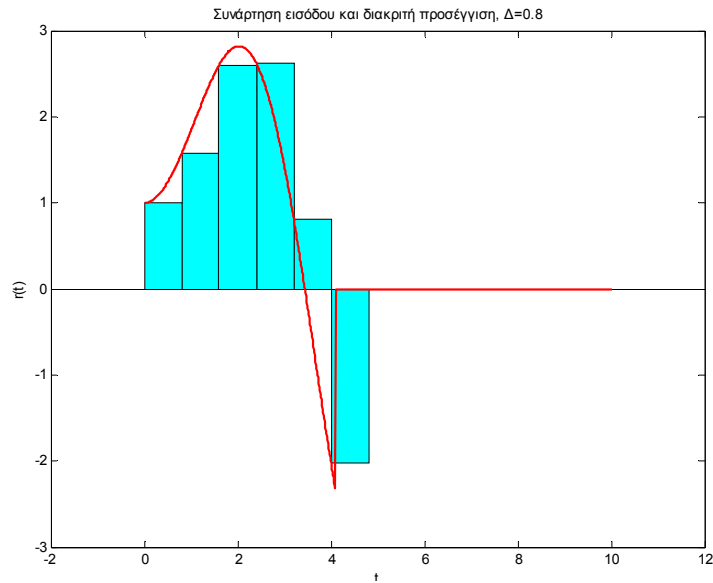
(Σχ. 3).



Σχήμα 3 Ωστική απόκριση της (5)

Έστω $r(t)$ η συνάρτηση που φαίνεται στο Σχ. 4 μαζί με τη διακριτή προσέγγιση της με βήμα 0,8, δηλαδή η επιφάνεια του κάθε ορθογώνιου είναι,

$$r(k\Delta) \times 0,8, \quad k=0,1, \dots$$



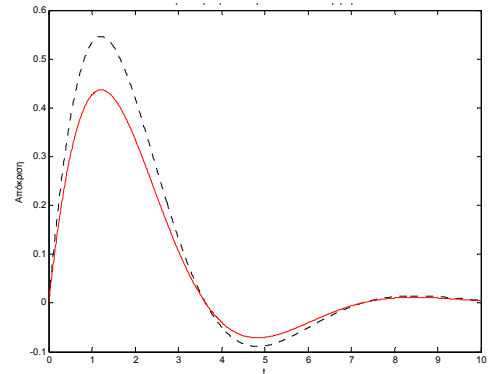
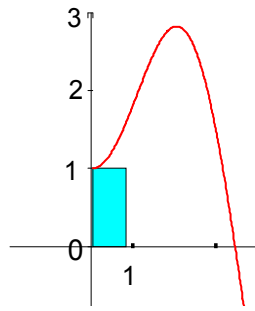
Σχήμα 4 Γράφημα της $(\eta\mu(t) + 1)t, t < 4$

Για να βρούμε την απόκριση της (5) με είσοδο τη συνάρτηση του Σχ. 4, θα βρούμε την απόκριση εκάστου παλμού του Σχ. 4 και στη συνέχεια θα τις προσθέσουμε. Να σημειώσω ότι αφού $h(t)$ είναι η απόκριση στη $\delta(t)$, η απόκριση στην $A\delta(t-\tau)$ είναι $Ah(t-\tau)$.

Πίνακας 1 Προσεγγιστικά βήματα συνέλιξης

$$r(0) \approx \hat{r}(0) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} r(k\Delta)\delta_{\Delta}(0-k\Delta)\Delta \Rightarrow$$

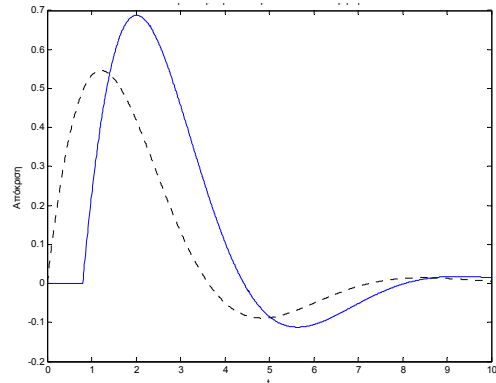
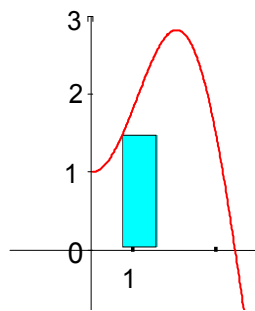
$$r(0) \text{ ως } r(0,8) \approx 1 \cdot \delta_{0,8}(0) \cdot 0,8 = 0,8$$



$[0,8\delta(0)] * h(t)$

$$r(0,8) \approx \hat{r}(0,8) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} r(k\Delta)\delta_{\Delta}(0,8-0,8k) \cdot 0,8 \Rightarrow$$

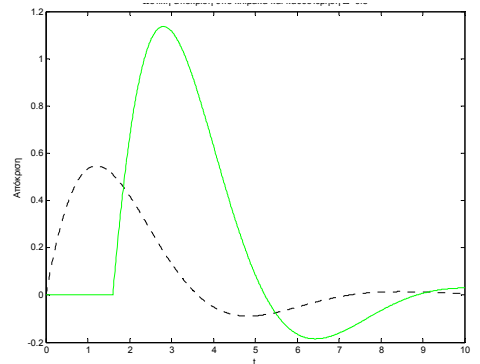
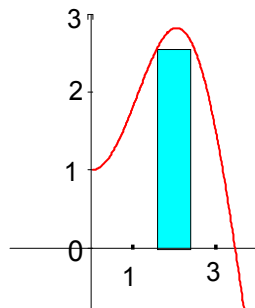
$$r(0,8) \text{ ως } r(1,6) \approx 1,5739 \cdot \delta_{0,8}(0,8) \cdot 0,8 = 1,259$$



$[1,259 \cdot \delta(0,8)] * h(t)$

$$r(1,6) \approx \hat{r}(1,6) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} r(0,8\Delta)\delta_{\Delta}(1,6-0,8k) \cdot 0,8 \Rightarrow$$

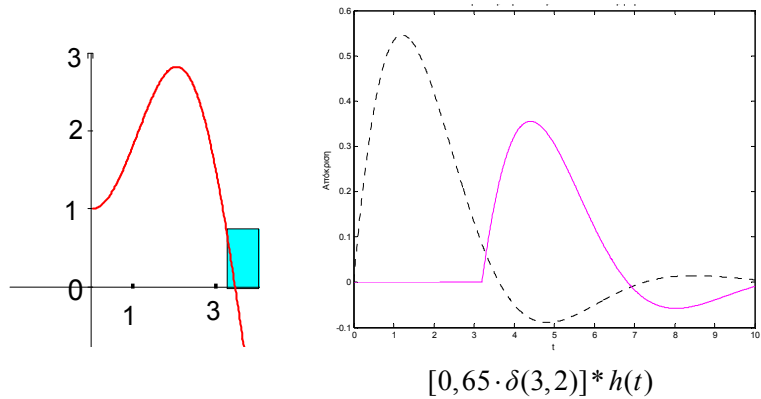
$$r(1,6) \text{ ως } r(2,4) \approx 2,6 \cdot \delta_{0,8}(0,8) \cdot 0,8 = 2,08$$



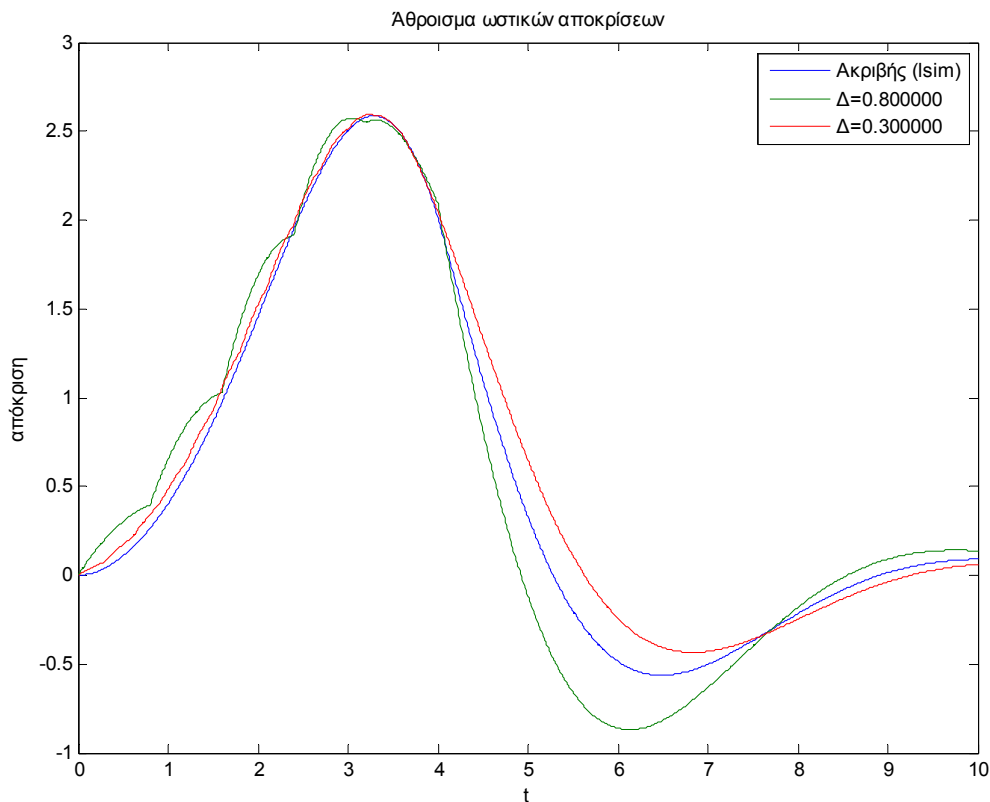
$[2,08 \cdot \delta(1,6)] * h(t)$

$$r(3,2) \approx \hat{r}(3,2) \triangleq \sum_{k=0}^{\infty} r(0,8\Delta)\delta_{\Delta}(3,2-0,8k) \cdot 0,8 \Rightarrow$$

$$r(3,2) \text{ ως } r(4) \approx 0,813 \cdot \delta_{0,8}(0,8) \cdot 0,8 = 0,65$$



Το άθροισμα των γραφημάτων της δεξιάς στήλης του Πίν. 1 φαίνεται στο Σχ. 5. Στο ίδιο σχήμα φαίνονται επίσης η ακριβής απόκριση με χρήση της εντολής `lsim` του MATLAB καθώς και η απόκριση με μικρότερο βήμα ($\Delta=0,3$). Όπως αναμενόταν, όσο μικρότερο το Δ τόσο καλύτερη η προσέγγιση.



Σχήμα 5 Γράφημα αποκρίσεων για διάφορα Δ