

«Ευφυής» πρόβoλος δοκός

Στο παρόν σημείωμα θα εξαχθεί ένα μαθηματικό υπόδειγμα μίας «ευφυούς» *πρόβoλου δοκού*. Με τον όρο «ευφυής» εννοείται μία δοκός εφοδιασμένη με πιεζοηλεκτρικά στοιχεία, ούτως ώστε να καταστέλλονται αποτελεσματικά οι ταλαντώσεις λόγω εξωτερικών φορτίων (π.χ. αέρας).

Η εξαγωγή του υποδείγματος είναι αρκετά περίπλοκη και βασίζεται εν πολλοίς στο διδακτορικό της Α. Μουτσοπούλου¹.

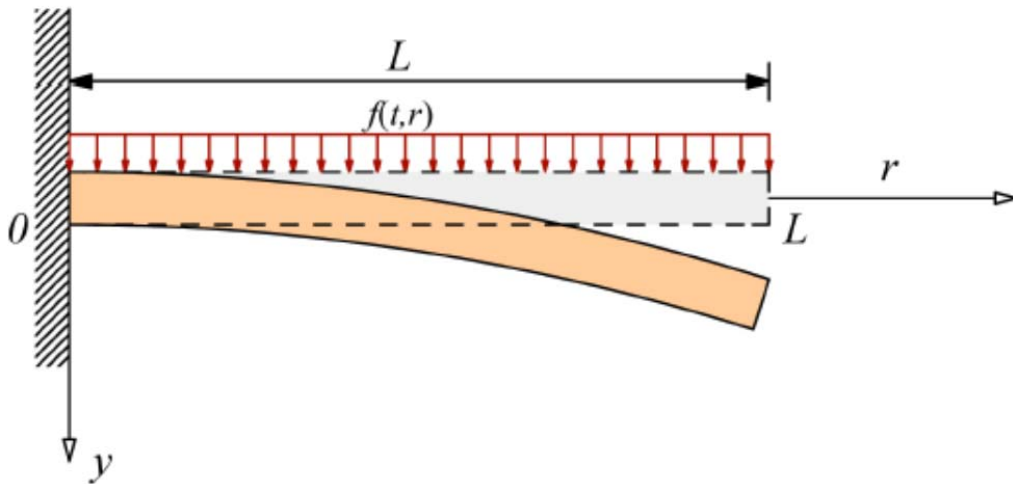
Η επίτευξη του στόχου αυτού θα γίνει ακολουθώντας τα εξής βήματα:

1. Εξαγωγή του πλήρους μαθηματικού μοντέλου της καμπτικής κίνησης (ταλάντωσης) της ευφυούς δοκού υπό την επίδραση μηχανικών και ηλεκτρικών δυνάμεων, χρησιμοποιώντας τους σχετικούς φυσικούς νόμους. Θα χρησιμοποιηθεί η απλούστερη Τεχνική Θεωρία της κάμψεως δοκών και όχι η ακριβέστερη Θεωρία Ελαστικότητας, καθ' όσον αυτό που ενδιαφέρει είναι η εύρεση κατάλληλων στρατηγικών ελέγχου που δεν εξαρτώνται από τα ακριβή υποδείγματα. Αυτό το μαθηματικό υπόδειγμα θα είναι της μορφής μίας μερικής διαφορικής εξίσωσης.
2. Διακριτοποίηση του προηγούμενου υποδείγματος με τη χρήση ανάλυσης πεπερασμένων στοιχείων. Η διαδικασία αυτή περιέχει τα εξής επιμέρους βήματα:
 - (α) Υπόδειγμα πεπερασμένων στοιχείων για τη στοιχειώδη δοκό και τη στοιχειώδη δύναμη.
 - (β) Συνάθροιση των στοιχειωδών υποδειγμάτων για την εξαγωγή του συνολικού υποδείγματος της ευφυούς δοκού.
3. Μετασχηματισμός του υποδείγματος πεπερασμένων στοιχείων σε πρότυπο χώρου κατάστασης με τη χρήση κατάλληλων μεταβλητών κατάστασης.
4. Μετασχηματισμός του υποδείγματος χώρου κατάστασης σε υπόδειγμα μίας εισόδου-μίας εξόδου.

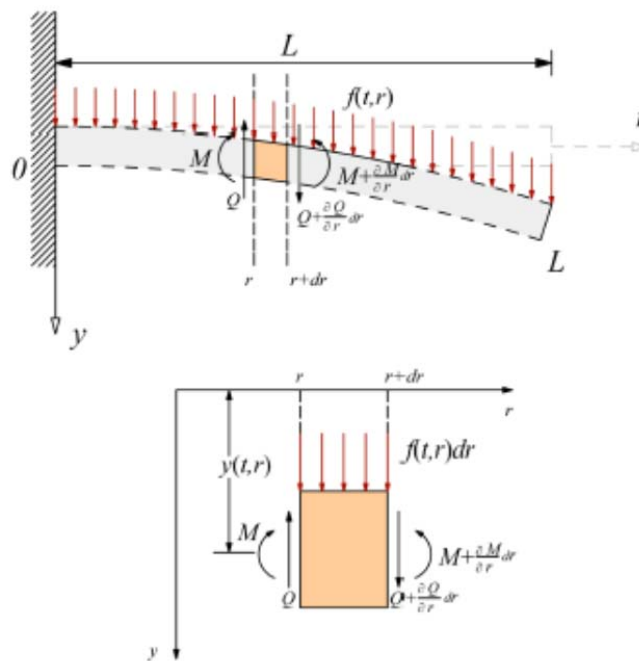
Έστω μία λεπτή πρόβoλος δοκός μήκους L όπως απεικονίζεται στο Σχ. 1 της οποίας η πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας επί τη ροπή αδρανείας στο σημείο r είναι ρ_b και $EI(r)$ αντίστοιχα, ενώ η διατομή της δοκού είναι $A_b(r)$. Οι βασικές υποθέσεις είναι:

1. Το υλικό ακολουθεί το νόμο του Hooke.
2. Η αξονική παραμόρφωση είναι αμελητέα σε σύγκριση με την παραμόρφωση κάμψης.
3. Η περιστροφή του στοιχείου είναι αμελητέα σε σύγκριση με την κάθετη και την πλάγια μετατόπιση.

¹ Α. Μουτσοπούλου (2010). «Έλεγχος έξυπνων κατασκευών με εφαρμογή στο αντικείμενο του πολιτικού μηχανικού», διδακτορική διατριβή, Πολυτεχνείο Κρήτης, Τμήμα ΜΠΔ. <http://poseidon.library.tuc.gr/artemis/PD2009-0015/PD2009-0015.pdf>



Σχήμα 1 Πρόβoλος δοκός σε κάμψη



Σχήμα 2 Ένα μικρό στοιχείο της δοκού

Το διάγραμμα ελεύθερου σώματος ενός στοιχείου dr φαίνεται στο Σχ. 1, όπου Q δηλώνει την τέμνουσα δύναμη και το M την ροπή κάμψης. Εφαρμόζοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με δύναμη κατά την κατεύθυνση y έχω,

$$\left(Q(t,r) + \frac{\partial Q(t,r)}{\partial r} \right) - Q(t,r) + f(t,r)dr = \rho_b A_b(r)dr \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} \quad (1)$$

που ισούται με,

$$\frac{\partial Q(t,r)}{\partial r} + f(t,r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} \quad (2)$$

Επιπλέον, λαμβάνοντας υπόψη την ροπή γύρω από τον άξονα στα r και y (κατεύθυνση εκτός σελίδας),

$$\left(M(t,r) + \frac{\partial M(t,r)}{\partial r} dr \right) - M(t,r) + \left(Q(t,r) + \frac{\partial Q(t,r)}{\partial r} dr \right) dr + f(t,r) dr \frac{dr}{2} = 0 \quad (3)$$

Απλοποιώντας την παραπάνω εξίσωση παίρνω,

$$Q(t,r) = -\frac{\partial M(t,r)}{\partial r} \quad (4)$$

Αντικαθιστώντας την (4) στην (2), έχω,

$$-\frac{\partial^2 M(t,r)}{\partial r^2} + f(t,r) = \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \quad (5)$$

Η ροπή κάμψης μπορεί να συσχετιστεί με την καμπυλότητα $\kappa(x)$ του στοιχείου, όπου,

$$\kappa(x) = \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \quad (6)$$

και,

$$M(t,r) = EI(r)\kappa(x) \quad (7)$$

επομένως,

$$M(t,r) = EI(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (5), παίρνω,

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left(EI(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \right) + \rho_b A_b(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = f(t,r), \quad 0 \leq r \leq L \quad (9)$$

Η γωνία στροφής θ που προκύπτει από την κάμψη της δοκού δίνεται από την,

$$\theta(t,r) = \frac{\partial y(t,r)}{\partial r} \quad (10)$$

Οι (8), (9) και (10) είναι οι **εξισώσεις κίνησης της δοκού Euler- Bernoulli**.

Υποθέτοντας μία ομοιόμορφη πρόβολο δοκό όπου η διατομή $A_b(r)$ το μέτρο ελαστικότητας E και η ροπή

αδράνειας $I(r)$ είναι σταθερές, η (9) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t,r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = f(t,r), \quad 0 \leq r \leq L \quad (11)$$

Στην περίπτωση που εξετάζουμε, η κατανεμημένη δύναμη παράγεται από μηχανικές και ηλεκτρικές συνιστώσες. Το μηχανικό φορτίο θεωρείται είσοδος διαταραχής στο σύστημα αυτομάτου ελέγχου, και αντιπροσωπεύει π.χ. φορτία εξαιτίας ανέμου, ενώ η ηλεκτρική συνιστώσα είναι το σήμα ελέγχου, κατάλληλα επιλεγμένο για να καταστείλει τις καμπτικές ταλαντώσεις εξαιτίας της μηχανικής διαταραχής. Με τη σειρά της η τάση εισόδου παράγει διατμητικές δυνάμεις στα πιεζοηλεκτρικά επιθέματα, οι οποίες ανακάμπτουν τη δοκό. Επομένως η εξίσωση κίνησης της δοκού είναι,

$$EI \frac{\partial^4 y(t,r)}{\partial r^4} + \rho A \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} = f_m(t,r) + f_e(t,r), \quad 0 \leq r \leq L \quad (12)$$

Για την πρόβολο δοκό (Σχ.) ισχύουν οι παρακάτω συνοριακές συνθήκες:

- Πακτωμένο άκρο στο $r = 0$. Η μετατόπιση και η κλίση της μετατόπισης είναι μηδέν,

$$y(t, r_0) = 0, \quad \left. \frac{\partial y(t,r)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (13)$$

- Ελεύθερο άκρο στο $r = L$. Η ροπή κάμψης είναι μηδέν,

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \left(EI(r) \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial r^2} \right) \right|_{r=L} = 0 \quad (14)$$

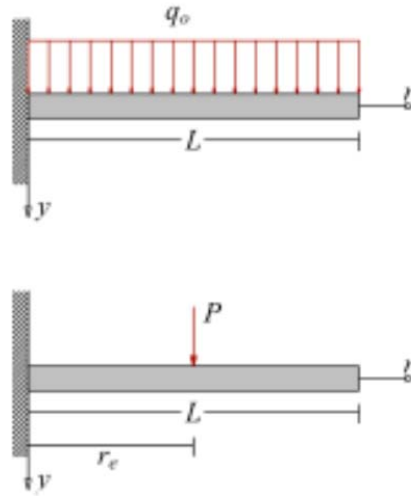
1.2 Η μορφή της μηχανικής φόρτισης $f_m(t,r)$

Μηχανικά φορτία διαφόρων μορφών μπορούν ν' αναπαρασταθούν μέσω της $f(t,r)$ (Σχ. 3). Για παράδειγμα, ομοιόμορφα κατανεμημένη, χρονικά μεταβαλλόμενη, δύναμη $q_0(t)$ (π.χ. άνεμος), αναπαρίσταται με,

$$f_m(t,r) = q_0(t) \quad (15)$$

ενώ συγκεντρωμένη δύναμη P_0 στο σημείο r_0 με,

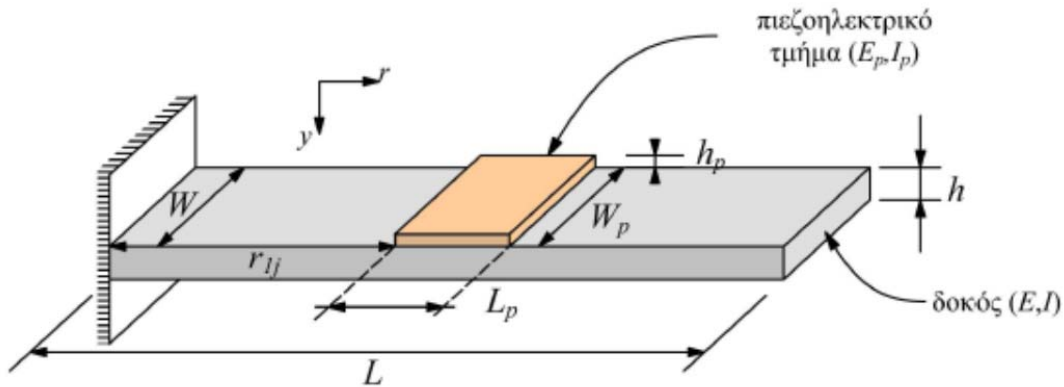
$$f_m(t,r) = P_0 \delta(r - r_0) \quad (16)$$



Σχήμα 3 Μηχανικά φορτία που ασκούνται στη δοκό

2 Η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t, r)$

Έστω μία ομοιογενής δοκός Euler-Bernoulli με έναν πιεζοηλεκτρικό ενεργοποιητή προσκολλημένο σε απόσταση r_{1j} από την αρχή των αξόνων. Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής j έχει διαστάσεις $L_p \times W_p \times h_p$, όπου h_p είναι το πάχος κάθε τμήματος, ενώ η δοκός έχει διαστάσεις $L \times W \times h$ (Σχ. 4).

Σχήμα 4 Δοκός με προσκολλημένο πιεζοηλεκτρικό τμήμα j

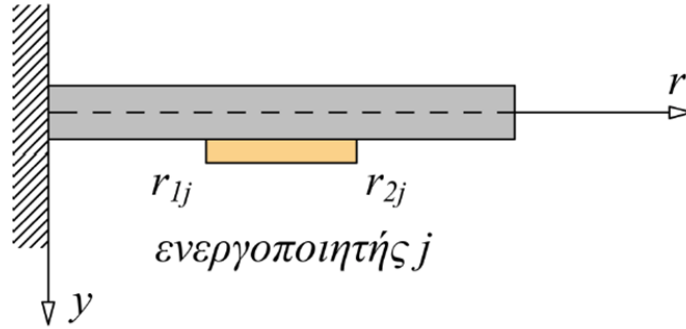
Ο πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής παράγει μηχανική τάση σαν έξοδο όταν έχει ηλεκτρική τάση σαν είσοδο. Σε ότι αφορά τα πιεζοηλεκτρικά έχει δειχθεί από τους Crawley και de Lewis ότι η επαγόμενη κάμψη μπορεί να αναπαρασταθεί σαν εξωτερικό φορτίο που αποτελείται από ζεύγος αντίθετων ροπών εφαρμοζόμενων στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού [].

Η ηλεκτρική φόρτιση $f_e(t, r)$ εξαιτίας του πιεζοηλεκτρικού ενεργοποιητή είναι,

$$f_e(t, r) = \frac{\partial^2 M_{pr}(t, r)}{\partial r^2} \quad (17)$$

όπου M_{pr} αντιπροσωπεύει την ροπή κάμψης εξ αιτίας του ενεργοποιητή [?].

Έστω ότι τα άκρα του πιεζοηλεκτρικού τμήματος j βρίσκονται στα r_{1j} και r_{2j} κατά μήκος του άξονα r (σχήμα 5). [?, ?, ?]



Σχήμα 5 Πιεζοηλεκτρικό τμήμα j στην πρόβολο δοκό

Η συνάρτηση $H(\cdot)$ είναι η γνωστή βηματική συνάρτηση που χρησιμοποιείται [?] για να αντιπροσωπεύσει την τοποθέτηση του πιεζοηλεκτρικού τμήματος Pzt πάνω στη δοκό.[?] Η ροπή κάμψης της δοκού $M_{pr}(t, r)$ ορίζεται ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_0 e_{pe}(t) [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (18)$$

όπου,

$$C_0 = EI \cdot K_f \quad (19)$$

και K_f είναι η γεωμετρική σταθερά του υλικού,

$$K_f = \frac{12EE_p h h_p (2h + h_p)}{16E^2 h^4 + EE_p (32h^3 h_p + 24h^2 h_p^2 + 8h h_p^3) + E_p^2 h_p^4} \quad (20)$$

ενώ E_p είναι το μέτρο ελαστικότητας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος και E το μέτρο ελαστικότητας της δοκού.

Η μηχανική ένταση $e_{pe}(t)$ εξ αιτίας του πιεζοηλεκτρικού τμήματος είναι,

$$e_{pe}(t) = \frac{d_{31}}{h_p} u_j(t) \quad (21)$$

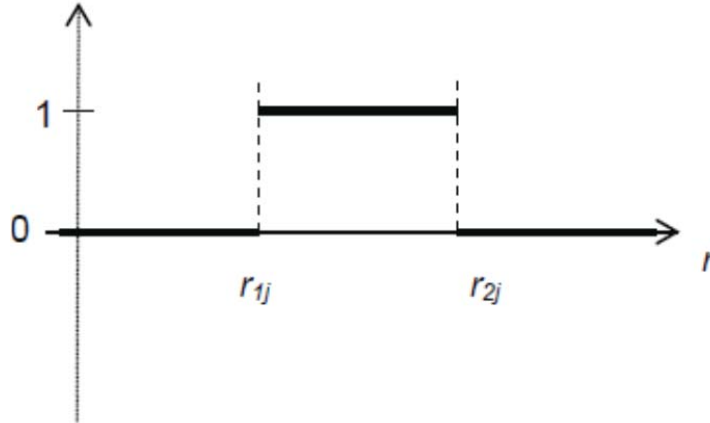
όπου η σταθερά d_{31} συσχετίζει την μηχανική ένταση που δημιουργείται στη δοκό όταν μια συγκεκριμένη τάση u_j εφαρμόζεται στο πιεζοηλεκτρικό τμήμα.

Η (18) μπορεί να γραφτεί σε πιο συμπαγή μορφή ως,

$$M_{pr}(t, r) = C_p [H(r - r_{1j}) - H(r - r_{2j})] u_j(t) \quad (22)$$

$$\text{όπου } C_p = EIK_f \frac{d_{31}}{h_p}.$$

Η διαφορά των βηματικών συναρτήσεων στη (18) παράγει το Σχ. 6.



Σχήμα 6 Διαφορά βηματικών συναρτήσεων

Εκτελώντας την μερική παραγωγή στη (17) και χρησιμοποιώντας την (18), η μορφή της ηλεκτρικής φόρτισης εξαιτίας των πιεζοηλεκτρικών γίνεται,

$$f_e(t, r) = C_p u_{aj}(t) [\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j})] \quad (23)$$

όπου $\delta'(r)$ είναι η παράγωγος της συνάρτησης Dirac ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή της,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(t - \theta) \phi(t) dt = (-1)^n \phi^{(n)}(\theta) \quad (24)$$

και $\delta^{(n)}$ είναι η n -οστή παράγωγος της συνάρτησης δ και η συνάρτηση ϕ είναι συνεχής στο θ . [?]

3 Μερική διαφορική εξίσωση κίνησης λόγω μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

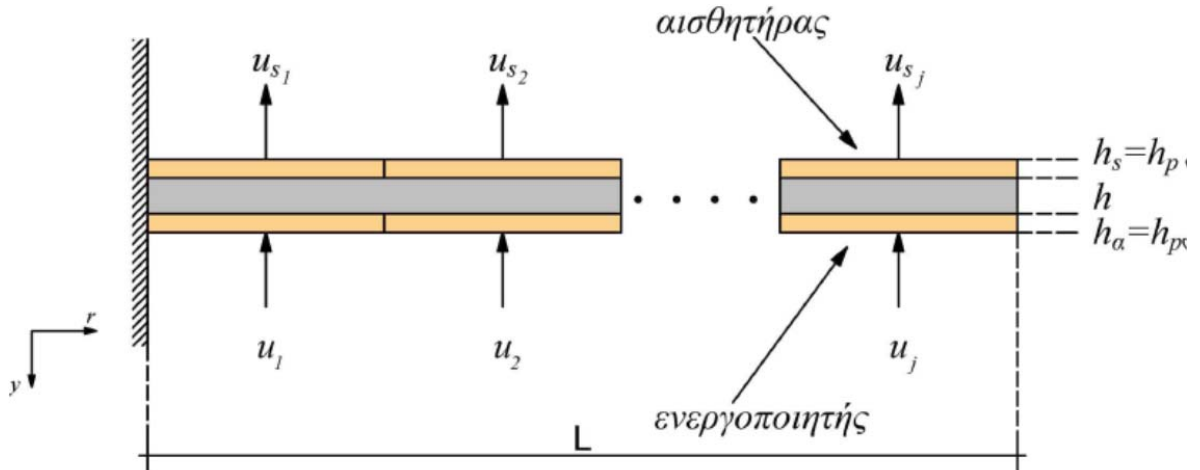
Αντικαθιστώντας την (23) στην (12), προκύπτει η εξίσωση κίνησης της «ευφυούς» δοκού υπό την επίδραση χρονικά μεταβαλλόμενης, ομοιόμορφα κατανεμημένης, κάθετης φόρτισης $q_0(t)$ και πιεζοηλεκτρικής χρονικά μεταβαλλόμενης δύναμης εξαιτίας ενός πιεζοηλεκτρικού, [?]

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) [\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j})] \quad (25)$$

Για j όμοια πιεζοηλεκτρικά (Σχ. 7) η (25) γίνεται,

$$EI \frac{\partial^4 y(t, r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t, r)}{\partial t^2} = q_0(t) + C_p u_j(t) \sum_{i=1}^j [\delta'(r - r_{1j}) - \delta'(r - r_{2j})] \quad (26)$$

Η εξίσωση (26) είναι και η τελική εξίσωση ενδιαφέροντος.

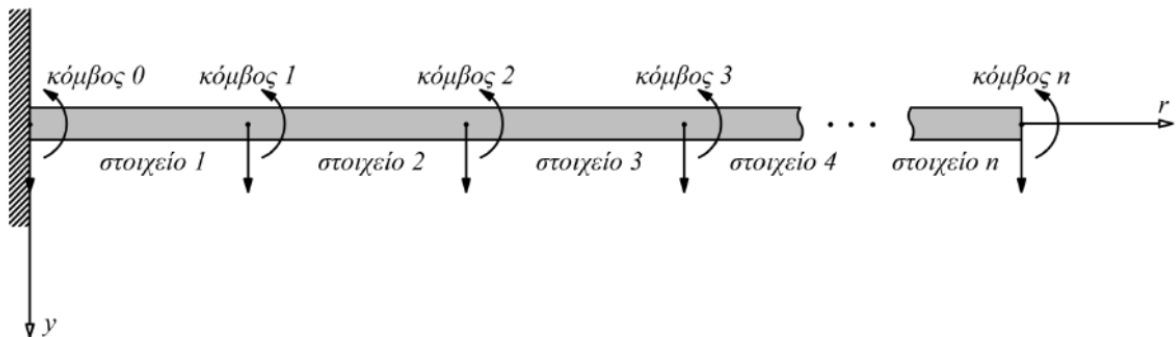


Σχήμα 7 Πρόβoλος δοκός με συνδυασμένους πιεζοηλεκτρικούς ενεργοποιητές και αισθητήρες

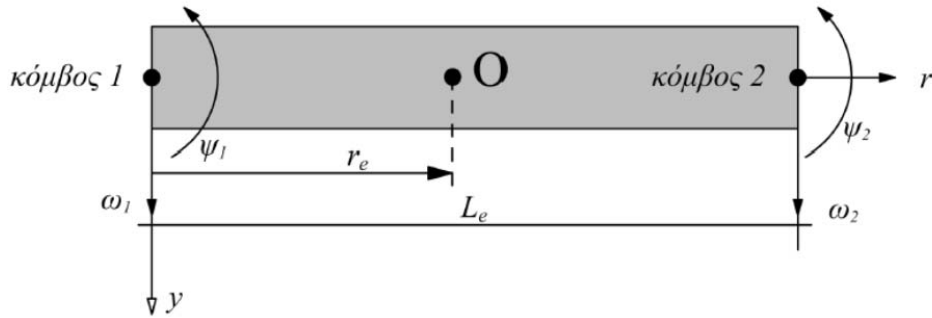
4 Υπόδειγμα πεπερασμένων στοιχείων

Με τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων μετατρέπεται η μερική διαφορική εξίσωση κίνησης της δοκού σε σύστημα συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Η επίλυση των πεπερασμένων στοιχείων συγκλίνει στην επίλυση της μερικής διαφορικής εξίσωσης όταν το πλήθος των στοιχείων αυξάνεται.[?]

Έστω n στοιχεία τα οποία περιγράφουν τη δοκό (Σχ. 8). Έστω μία ομοιόμορφη στοιχειώδης δοκός μήκους L_e (Σχ. 9), όπου ο γενικός άξονας δηλώνεται με r ενώ ο τοπικός με r_e (Σχ. 10).



Σχήμα 8 Δοκός χωρισμένη σε n πεπερασμένα στοιχεία



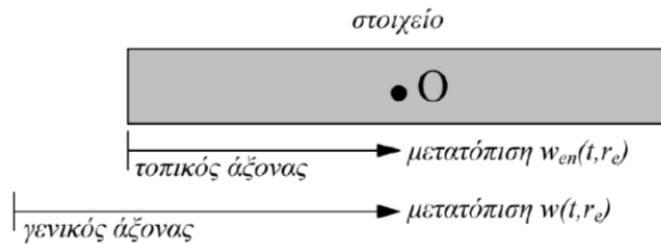
Σχήμα 9 Στοιχειώδης δοκός

Κάθε κόμβος έχει δύο βαθμούς ελευθερίας: μία στροφή περί τον άξονα \$r\$ και μία μεταφορική συνιστώσα κατά τον \$y\$ δηλαδή κάθε στοιχειώδης δοκός έχει 4 βαθμούς ελευθερίας: δύο γωνιακές μετατοπίσεις και δύο κατακόρυφες.

Οι κομβικές μετατοπίσεις της στοιχειώδους δοκού μπορούν να γραφούν (Σχ. 9) ως,

$$w_e(t,r) = [\omega_1(t,r) \quad \psi_1(t,r) \quad \omega_2(t,r) \quad \psi_2(t,r)]^T \quad (27)$$

Η θέση ενός συγκεκριμένου σημείου σε αυτή τη στοιχειώδη δοκό δηλώνεται ως \$r_e\$ (Σχ. 10).



Σχήμα 10 Τοπικός και γενικός άξονας δοκού

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων διακριτοποιεί ένα συνεχές σύστημα του οποίου η δομική πληροφορία περιέχεται στους κόμβους. Έτσι η πληροφορία ανάμεσα στους κόμβους πρέπει να εκτιμηθεί χρησιμοποιώντας συναρτήσεις που ονομάζονται «συναρτήσεις σχήματος». Λαμβάνοντας την εξίσωση κίνησης της δοκού Euler-Bernoulli (11) και ολοκληρώνοντας κατά μήκος της δοκού προκύπτει,

$$\int_0^L \left(EI \frac{\partial^4 y(t,r)}{\partial r^4} + \rho_b A_b \frac{\partial^2 y(t,r)}{\partial t^2} - f(t,r) \right) w dr = 0 \quad (28)$$

όπου \$w\$ η συνάρτηση δοκιμασίας [?]. Όταν η δοκός διακριτοποιείται σε \$n\$ αριθμό πεπερασμένων στοιχείων η εξίσωση γίνεται,

$$\sum_{i=1}^n \left[\int_{\Omega^e} EI \frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} dr + \int_{\Omega^e} A_b \rho_b \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} w dr - \int_{\Omega^e} f(t,r) w dr \right] + \left[-Vw - M \frac{\partial w}{\partial r} \right]_0^L = 0 \quad (29)$$

όπου $V = -EI \frac{\partial^3 y}{\partial r^3}$ η διατμητική δύναμη, $M = EI \left(\frac{\partial^2 y}{\partial r^2} \right)$ η ροπή κάμψης και Ω^e ο χώρος των στοιχείων.

Από την ολοκλήρωση και με την βοήθεια των συναρτήσεων Galerkin [?] προκύπτουν οι συναρτήσεις σχήματος που χρησιμοποιούνται. Για την περίπτωση ελαστικής δοκού είναι τα κυβικά πολυπαραγοντικά Hermite,

$$H(r) = [H_1(r), H_2(r), H_3(r), H_4(r)]^T \quad (30)$$

όπου,

$$\begin{aligned} H_1(r) &= 1 - 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\ H_2(r) &= L_e \left[\left(\frac{r}{L_e}\right) - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right] \\ H_3(r) &= 3\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 - 2\left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \\ H_4(r) &= L_e \left[-\left(\frac{r}{L_e}\right)^2 + \left(\frac{r}{L_e}\right)^3 \right] \end{aligned} \quad (31)$$

$$\frac{dH(r)}{dr} = \begin{bmatrix} -\frac{6r}{L_e^2} + \frac{6r^2}{L_e^3} \\ 1 - \frac{4r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \\ \frac{6r}{L_e^2} - \frac{6r^2}{L_e^3} \\ -\frac{2r}{L_e} + \frac{3r^2}{L_e^2} \end{bmatrix} \Rightarrow \{ \quad (32)$$

Έτσι η μετατόπιση w_e σε οποιοδήποτε σημείο r_e κατά μήκος της δοκού μπορεί να προσεγγιστεί από την [?],

$$w_e(t, r_e) = H(r_e)^T w_e(t) \quad (33)$$

4.1 Στοιχειώδεις πίνακες μάζας και ακαμψίας

Ο στοιχειώδης πίνακας μάζας M_e μπορεί να εξαχθεί εάν μελετηθεί η κινητική ενέργεια $T_e(t)$ του στοιχείου όπου,

$$\mathcal{T}_e(t) = \frac{1}{2} \dot{w}_e(t)^T M_e \dot{w}_e(t) \quad (34)$$

Επίσης η κινητική ενέργεια προκύπτει απο το δεύτερο όρο του ολοκληρώματος στη σχέση (29),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \left(\frac{\partial w_e(t,r)}{\partial t} \right)^2 dr = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} \rho_b A_b \dot{w}_e^T(t) H(r) H^T(r) \dot{w}_e(t) dr \end{aligned} \quad (35)$$

Από τις (34), (35) ο πίνακας μάζας του στοιχείου είναι,

$$M_e = \rho_b A_b \int_0^{L_e} H(r) H^T(r) dr \quad (36)$$

Αντικαθιστώντας τη (31) στη (36) παίρνουμε,

$$M_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (37)$$

Ο στοιχειώδης πίνακας ακαμψίας K_e μπορεί να εξαχθεί με ανάλογο τρόπο. Η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου $U_e(t)$ ισούται με,

$$U_e(t) = \frac{1}{2} w_e(t)^T K_e w_e(t) \quad (38)$$

Επίσης η ενέργεια παραμόρφωσης του στοιχείου προκύπτει απο τον πρώτο όρο του ολοκληρώματος της (29),

$$\begin{aligned} U_e(t) &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI \left(\frac{\partial^2 w_e(t,r)}{\partial r^2} \right)^2 dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{L_e} EI w_e^T(t) \frac{d^2 H(r)}{dr^2} \frac{d^2 H^T(r)}{dr^2} w_e(t) dr \end{aligned} \quad (39)$$

Από τις σχέσεις (38), (39) ο πίνακας ακαμψίας του στοιχείου ισούται με,

$$K_e = EI \int_0^{L_e} \frac{d^2 H(r)}{dr^2} \frac{d^2 H^T(r)}{dr^2} dr \quad (40)$$

Αντικαθιστώντας τη (31) στη (40) παίρνω,

$$K_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

4.2 Στοιχειώδες μηχανικό φορτίο

Το στοιχειώδες διάνυσμα της δύναμης f_m^e που περιγράφει τις εξωτερικές μηχανικές δυνάμεις που ασκούνται στη στοιχειώδη δοκό λόγω μηχανικής φόρτισης προκύπτει από τον τρίτο όρο του ολοκληρώματος (29) και ισούται με,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} q(r) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr \quad (42)$$

Εάν έχουμε ομοιόμορφα καταναμεμημένο φορτίο $q(r)$ στο στοιχείο της δοκού το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \frac{q(r)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Εάν το φορτίο είναι μια συγκεντρωμένη δύναμη το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e = \int_0^{L_e} P_0 \delta(r-r_0) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = P_0 \begin{bmatrix} H_1(r_0) \\ H_2(r_0) \\ H_3(r_0) \\ H_4(r_0) \end{bmatrix} \quad (44)$$

όπου P_0 είναι η συγκεντρωμένη δύναμη που ασκείται στο σημείο $r=r_0$ και $\delta(r-r_0)$ είναι η συνάρτηση Dirac.

Εάν το φορτίο μεταβάλλεται με τον χρόνο, όπως στην δυναμική ανάλυση, τότε το διάνυσμα μηχανικής δύναμης του στοιχείου γίνεται,

$$f_m^e(t) = \int_0^{L_e} q(r,t) \begin{bmatrix} H_1(r) \\ H_2(r) \\ H_3(r) \\ H_4(r) \end{bmatrix} dr = \frac{q(r,t)}{12} \begin{bmatrix} 6L_e \\ L_e^2 \\ 6L_e \\ -L_e^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_m(r,t) \\ M_m(r,t) \\ F_m(r,t) \\ -M_m(r,t) \end{bmatrix} \quad (45)$$

4.3 Στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο

Όπως έχει αναφερθεί η εφαρμογή τάσης $u_j(t)$ σ' ένα πιεζοηλεκτρικό στοιχείο, παράγει ροπές στα άκρα του πιεζοηλεκτρικού, ισοδύναμες με τη σημειακή δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) [\delta'(r - r_0) - \delta'(r - (r_0 + L_e))] \quad (46)$$

Εισάγοντας τη (46) στη (45), δίνει για τη στοιχειώδη ηλεκτρική δύναμη,

$$f_e^e(t, r) = C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) dr \quad (47)$$

όπου έχει ληφθεί $r_0 = 0$, καθώς θεωρείται η στοιχειώδης δοκός. Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, χρησιμοποιούμε τη σχέση (24).[?]

Επομένως,

$$\begin{aligned} f_e^e(t, r) &= C_p u_j(t) \int_0^{L_e} [\delta'(r) - \delta'(r - L_e)] H(r) dr = C_p u_j(t) [-H'(0) + H'(L_e)] \\ &= C_p u_j(t) \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (48)$$

1.4 Ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας

Για τον υπολογισμό των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας απαιτείται η «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών πινάκων.[?] Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τέσσερα βήματα :

1. Μετατροπή των στοιχειωδών πινάκων από το τοπικό στο γενικό σύστημα συντεταγμένων,

$$\tilde{K}_e = T^T K_e T, \quad \tilde{M}_e = T^T M_e T \quad (49)$$

όπου T ο πίνακας μετασχηματισμού ο οποίος για δύο βαθμούς ελευθερίας σε κάθε κόμβο ισούται με,

$$T = \begin{bmatrix} \sigma \nu \alpha & -\eta \mu \alpha & 0 & 0 \\ \eta \mu \alpha & \sigma \nu \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \nu \alpha & \eta \mu \alpha \\ 0 & 0 & -\eta \mu \alpha & \sigma \nu \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αφού η γωνία στροφής α από το τοπικό στο γενικό σύστημα είναι μηδέν.

Συνακόλουθα η (49), μέσω των (37), (41) γίνεται,

$$\tilde{M}_e = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & -13L_e & 156 & 22L_e \\ 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\tilde{K}_e = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & 6L_e & 12 & 6L_e \\ -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (51)$$

2. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών πινάκων. Οι εκτεταμένοι πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν από τους στοιχειώδεις ως,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{e_j} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{M}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} = \\ &= \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 54 & -13L_e & 156 & 22L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 13L_e & -3L_e^2 & 22L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (52) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{e_j} &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \tilde{K}_e & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(n+1) \times 2(n+1)} = \\ &= \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -12 & 6L_e & 12 & 6L_e & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 & \vdots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (53) \end{aligned}$$

Οι στοιχειώδεις πίνακες \tilde{M}_{e_j} , \tilde{K}_{e_j} τοποθετούνται στο στοιχείο $(2j-1), (2j-1)$ για $j = 1, \dots, n$.

3. Οι γενικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας προκύπτουν απο τις,

$$\begin{aligned} M_G &= \sum_{j=1}^n \overline{M}_{e_j} \\ K_G &= \sum_{j=1}^n \overline{K}_{e_j} \end{aligned} \quad (54)$$

όπου $M_G, K_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 2(n+1)}$. Για παράδειγμα εάν $n=4$, οι πίνακες είναι,

$$M_G = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$M_G = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 156 & -22L_e & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -22L_e & 4L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$K_G = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & -6L_e & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 4L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (56)$$

4. Εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβολο δοκό. Εξαιτίας της πάκτωσης, διαγράφονται οι δύο πρώτες γραμμές και στήλες των M_G , K_G και προκύπτουν οι ολικοί πίνακες μάζας M και ακαμψίας K , όπου $M, K \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$. Για $n=4$ οι πίνακες είναι,

$$M = \frac{\rho_b A_b L_e}{420} \begin{bmatrix} 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e & 0 & 0 \\ 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 54 & -13L_e & 312 & 0 & 54 & -13L_e \\ 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & -13L_e & -3L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 54 & -13L_e & 156 & -22L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$K = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e & 0 & 0 \\ -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -6L_e & 24 & 0 & -12 & -6L_e \\ 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 0 & 8L_e^2 & 6L_e & 2L_e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -12 & -6L_e & 12 & 6L_e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6L_e & 2L_e^2 & 6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

1.5 Ολικό διάνυσμα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης

Το ολικό διάνυσμα της εξωτερικής μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης προκύπτει από τη «συρραφή» των αντίστοιχων στοιχειωδών διανυσμάτων. Η διαδικασία αυτή περιλαμβάνει τρία βήματα [?]:

1. Κατασκευή των εκτεταμένων στοιχειωδών διανυσμάτων. Τα εκτεταμένα διανύσματα προκύπτουν από τα στοιχειώδη (45), (48) ως,

$$\bar{f}_j = \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 \dots & 0 & \vdots & f^e & \vdots & 0 \dots & 0 \dots & 0 \end{bmatrix}_{2(i+1) \times 1}^T \quad (59)$$

όπου το στοιχειώδες διάνυσμα τοποθετείται στη θέση $(2j-1)$. Για παράδειγμα εάν $n=4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$, το διάνυσμα ισούται με,

$$\bar{f}_j = [0 \quad 0 \quad F(t), \quad M(t), \quad F(t), \quad -M(t) \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (60)$$

όπου $F(t) = \frac{q(t)}{12} 6L_e$, $M(t) = \frac{q(t)}{12} L_e^2$.

2. Το γενικό διάνυσμα προκύπτει από την,

$$f_G = \sum_{j=1}^n \bar{f}_j, \quad f_G \in \mathbb{R}^{2(n+1) \times 1} \quad (61)$$

Για παράδειγμα για $n=4$ και ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$ το διάνυσμα ισούται με,

$$f_G = [F(t) \quad M(t) \quad 2F(t) \quad 0 \quad 2F(t) \quad 0 \quad 2F(t) \quad 0 \quad F(t) \quad -M(t)] \quad (62)$$

3. Το ολικό διάνυσμα της μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης $f(t)$ προκύπτει μετά τη διαγραφή των δύο πρώτων γραμμών εξ αιτίας των συντοριακών συνθηκών που ισχύουν για την πρόβλο δοκό και λόγω του ότι η ροπή κάμψης στον ακραίο κόμβο ισούται με μηδέν.

$$f(t) \in \mathbb{R}^{2n \times 1} \quad (63)$$

Για $n=4$ και για ομοιόμορφη φόρτιση $q(t)$, το διάνυσμα ισούται με

$$f(t) = [2F(t) \quad 0 \quad 2F(t) \quad 0 \quad 2F(t) \quad 0 \quad F(t) \quad 0] \quad (64)$$

2 Γενικές εξισώσεις κίνησης της δοκού

Η εξίσωση Lagrange της στοιχειώδους δοκού είναι,

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial T_e}{\partial \dot{w}_e} \right] + \left[\frac{\partial U}{\partial w_e} \right] = f^e \Rightarrow \quad (65)$$

$$M_e \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + K_e w(t) = f_m^e + f_e^e$$

επομένως η ολική εξίσωση της στοιχειώδους δοκού είναι,

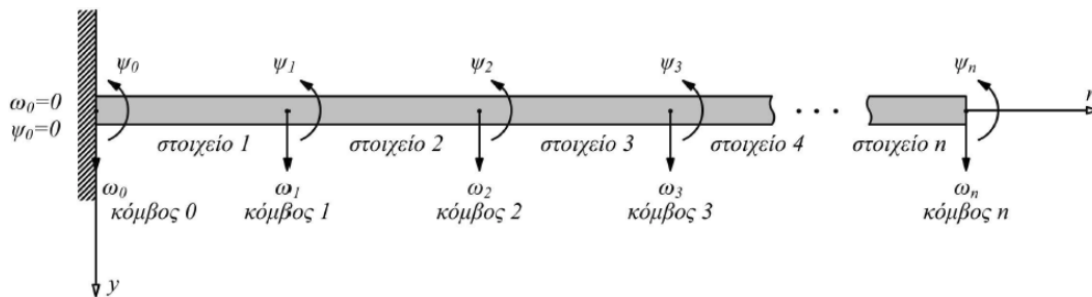
$$M \ddot{w}(t) + K w(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (66)$$

όπου M και K οι ολικοί πίνακες μάζας και ακαμψίας των (57), (58) και $f_m(t)$, $f_e(t)$ τα ολικά διανύσματα μηχανικής και ηλεκτρικής φόρτισης.[?]

Η ανεξάρτητη μεταβλητή $w(t)$ είναι ο συνδυασμός της κατακόρυφης μετατόπισης $\omega_i(t)$ του κόμβου i και της στροφής ψ_i του κόμβου i (Σχ. 11).

$$w(t) = \begin{bmatrix} \omega_1(t) \\ \psi_1 \\ \vdots \\ \omega_n(t) \\ \psi_n \end{bmatrix} \quad (67)$$

όπου n είναι ο αριθμός των πεπερασμένων στοιχείων που χρησιμοποιείται στην ανάλυση.



Σχήμα 11 Κομβικές μετατοπίσεις και στροφές της δοκού

Για να συμπεριλάβουμε τις επιδράσεις απόσβεσης θεωρείται η απόσβεση Rayleigh [?]. Η απόσβεση αυτή δηλώνεται με τον πίνακα ιξώδους απόσβεσης D που είναι συνάρτηση των ολικών πινάκων μάζας και ακαμψίας και ισούται με,

$$D = aM + \beta K \quad (68)$$

όπου a και β είναι οι μειωτικοί συντελεστές των πινάκων μάζας και ακαμψίας. Όταν χρησιμοποιείται μόνο η απόσβεση ακαμψίας δηλαδή εάν $a = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_β ισούται με,

$$\zeta_\beta = \frac{w_r}{2} \beta \quad (69)$$

όπου w_r η ιδιοσυχνότητα. Ενώ όταν ληφθεί υπόψη μόνο η απόσβεση μάζας δηλαδή $\beta = 0$ ο ιδιομορφικός λόγος απόσβεσης ζ_a ισούται με,

$$\zeta_a = \frac{a}{2} \frac{l}{w_r} \quad (70)$$

Οι συντελεστές a και β μπορούν να υπολογιστούν από πειράματα.

Η (66) μετά την εισαγωγή της απόσβεσης τροποποιείται ως,

$$M\ddot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) = f_m(t) + f_e(t) \quad (71)$$

Η Εξ. (71) είναι η γενική δυναμική εξίσωση της δοκού.[?]

2.1 Περιγραφή στο χώρο κατάστασης

Χρησιμοποιώντας τη δυναμική εξίσωση του συστήματος (71), για τη μετατροπή στο χώρο κατάστασης θεωρούμε τον μετασχηματισμό [?],

$$x(t) = \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (72)$$

Η μετατροπή στο χώρο κατάστασης γίνεται ως ακολούθως,

$$\begin{aligned} M\dot{w}(t) + D\dot{w}(t) + Kw(t) &= f_m(t) + f_e(t) \\ \Rightarrow \ddot{w}(t) &= M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) - M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m(t) + f_e(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ -M^{-1}D\dot{w}(t) - M^{-1}Kw(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}(f_m + f_e)(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (73)$$

Άρα,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{w}(t) \\ \ddot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_m(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}f_e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} \quad (74)$$

Το διάνυσμα της ηλεκτρικής φόρτισης $f_e(t)$ προκύπτει από τη διαδικασία της «συρραφής» από το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο. Εάν για παράδειγμα έχουμε τέσσερα στοιχεία, το διάνυσμα ισούται με [?],

$$\begin{aligned}
f_e(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ c_p u_1(t) - c_p u_2(t) \\ 0 \\ -c_p u_3(t) + c_p u_2(t) \\ 0 \\ c_p u_3(t) - c_p u_4(t) \\ 0 \\ c_p u_4(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_p & -c_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_p & -c_p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_p & -c_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ u_4(t) \end{bmatrix} \\
&= F_e^* \cdot u(t)
\end{aligned} \tag{75}$$

Στη γενική περίπτωση ο F_e^* είναι ένας πίνακας διαστάσεων $2n \times n$ και $u(t)$ το διάνυσμα ελέγχου διάστασης $n \times 1$, που αντιπροσωπεύει τις τάσεις $u_j(t)$ των ενεργοποιητών.[?]

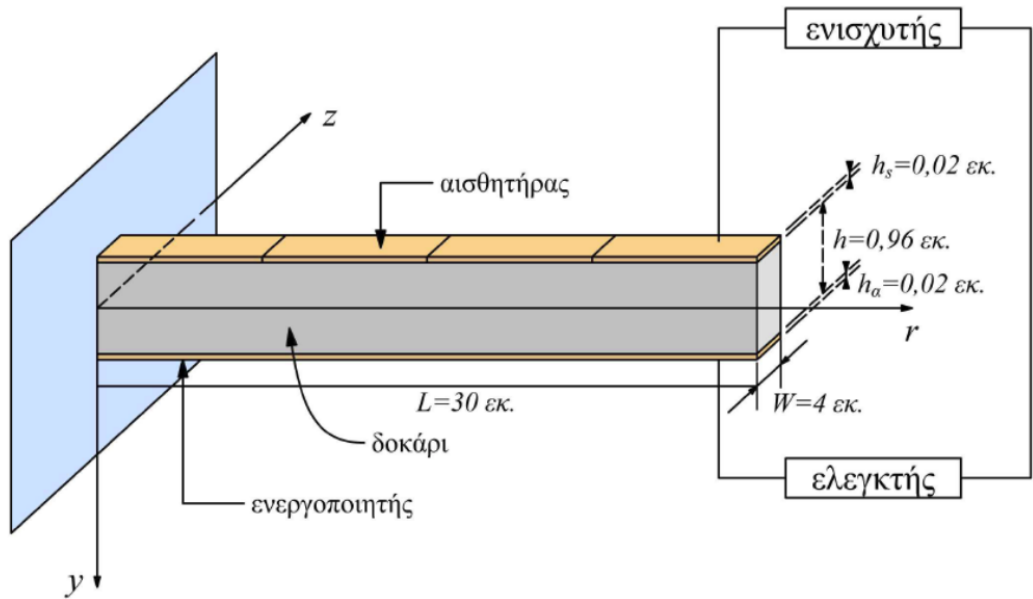
Επομένως η εξίσωση (74) με βάση τον μετασχηματισμό (72) γίνεται,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} & I_{2n \times 2n} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0_{2n \times 2n} \\ M^{-1} \end{bmatrix} f_m(t) \\
&= Ax(t) + Bu(t) + Gf_m(t)
\end{aligned} \tag{76}$$

$$= Ax(t) + \begin{bmatrix} B & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ f_m(t) \end{bmatrix} \tag{77}$$

$$= Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t)$$

Για τη μέτρηση της κατάστασης του συστήματος χρησιμοποιούνται ως αισθητήρες αντίστοιχα πιεζοηλεκτρικά όπως φαίνεται στο Σχ. 12. Η δυνατότητα αυτή προκύπτει από το ανάστροφο πιεζοηλεκτρικό φαινόμενο. Η τάση εξόδων αυτών των πιεζοηλεκτρικών αισθητήρων είναι ανάλογη των κομβικών μετακινήσεων των αντίστοιχων στοιχείων.



Σχήμα 12 Σχεδιάγραμμα δοκού με πιεζοηλεκτρικά

Επομένως η έξοδος του συστήματος είναι,

$$y(t) = [x_1(t) \quad x_3(t) \quad \dots \quad x_{n-1}(t)]^T = Cx(t) \quad (78)$$

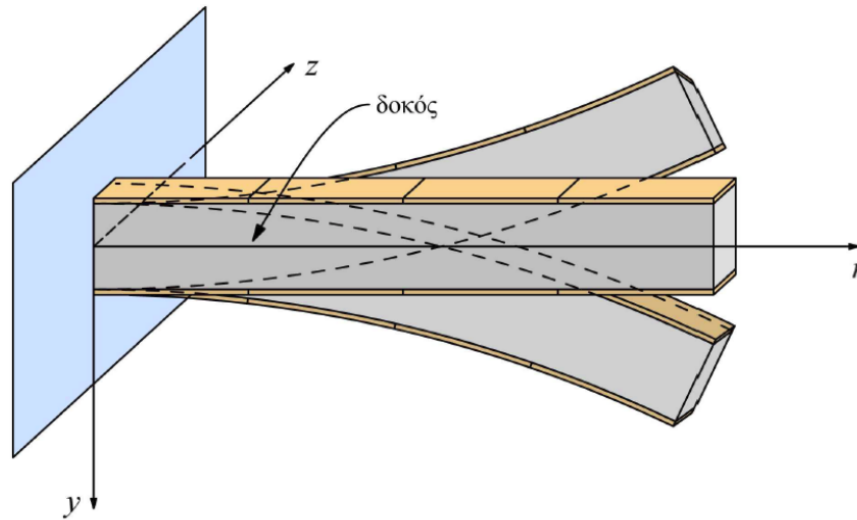
άρα,

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (79)$$

Οι μονάδες που χρησιμοποιούνται είναι m, rad, sec και N.

3 Παράδειγμα

Θεωρείται πρόβολος δοκός περιγραφόμενη από 4 πεπερασμένα στοιχεία και με ενσωματωμένα και στις δύο (άνω και κάτω) επιφάνειες, συμμετρικά τοποθετημένα πιεζοηλεκτρικά, όπως φαίνεται στο Σχ. 12. Η δοκός είναι κατασκευασμένη από σύνθετα γραφίτη / εποξικό T300/976 και το πιεζοηλεκτρικό ανήκει στην κατηγορία PZT G1195N. Οι ιδιότητες της δοκού και οι διαστάσεις των πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών φαίνονται στο Πίν. 1. Το πάχος των πιεζοηλεκτρικών είναι μικρό σε σχέση με το πάχος της δοκού, με συνέπεια η δοκός να θεωρείται ομοιόμορφη. Τα κατώτερα πιεζοηλεκτρικά εξυπηρετούν ως ενεργοποιητές και τα ανώτερα ως αισθητήρες (Σχ. 12, 13).



Σχήμα 13 Η δοκός σε κάμψη

Πίνακας 1 Ιδιότητες και διαστάσεις δοκού και πιεζοηλεκτρικών ενεργοποιητών

Ιδιότητες	Μονάδες	Δοκός		Πιεζοηλεκτρικός ενεργοποιητής	
Υλικό		γραφίτης/εποξικό T300/976		PZT G1195N	
Μήκος	m	L	0,3	L_p	0,0075
Πλάτος	m	W	0,004	W_p	0,004
Πάχος	m	h	0,0096	h_p	0,0002
Μέτρο ελαστικότητας Young	N/m^2	E	$1,5 \cdot 10^{11}$	E_p	$6,3 \cdot 10^{10}$
Ροπή αδράνειας	m^4	I	$3,33 \cdot 10^{-9}$	I_p	$1,92 \cdot 10^{-10}$
Πυκνότητα	Kg/m^2	ρ_b	1600	ρ	7600
Πιεζοηλεκτρική σταθερά έντασης	m/V	-	-	d_{31}	$254 \cdot 10^{-12}$
Μειωτικοί συντελεστές απόσβεσης	-	a, β	0,0005	-	

Οι πίνακες μάζας $M_{8 \times 8}$, ακαμψίας $K_{8 \times 8}$, απόσβεσης $D_{8 \times 8}$ και $F_{e 8 \times 4}^*$ υπολογίζονται από τις σχέσεις (58), (57), (68), (75):

$$M = \begin{bmatrix} 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0071 & -0,0001 & 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 & 0 & 0 \\ 0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0071 & -0,0001 & 0,041 & 0 & 0,0071 & 0,0001 \\ 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0 & 0 & -0,0001 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0071 & -0,0001 & 0,0205 & 0,0002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,0001 & 0 & 0,0002 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 27508299,2677 & 0 & -19754116,6998 & -515779,9798 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 52927,184 & 515779,9798 & 12519,861 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -19754116,6998 & 515779,9798 & 27508299,2677 & 0 & -19754116,6998 & -515779,9798 & 0 & 0 \\ -515779,9798 & 12519,861 & 0 & 52927,184 & 515779,9798 & 12519,861 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -19754116,6998 & 515779,9798 & 27508299,2677 & 0 & -19754116,6998 & -515779,9798 \\ 0 & 0 & -515779,9798 & 12519,861 & 0 & 52927,184 & 515779,9798 & 12519,861 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -19754116,6998 & 515779,9798 & 19754116,6228 & 515779,9798 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -515779,9798 & 12519,861 & 515779,9798 & 26169,592 \end{bmatrix}$$

$$[D]_{8 \times 4} = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6877 & 0,0258 & 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 & 0 & 0 \\ -0,0258 & 0,0006 & 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,6877 & 0,0258 & 1,3754 & 0 & -0,6877 & -0,0258 \\ 0 & 0 & -0,0258 & 0,0006 & 0 & 0,0026 & 0,0258 & 0,0006 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,6877 & 0,0258 & 0,6877 & 0,0258 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0258 & 0,0006 & 0,0258 & 0,0013 \end{bmatrix}$$

$$F_e^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0862 & -0,0862 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,0862 & -0,0862 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,0862 & -0,0862 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0862 \end{bmatrix}$$

Βάσει των πινάκων αυτών υπολογίζονται και οι πίνακες,

$$A = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} & I_{8 \times 8} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}D \end{bmatrix}_{16 \times 16},$$

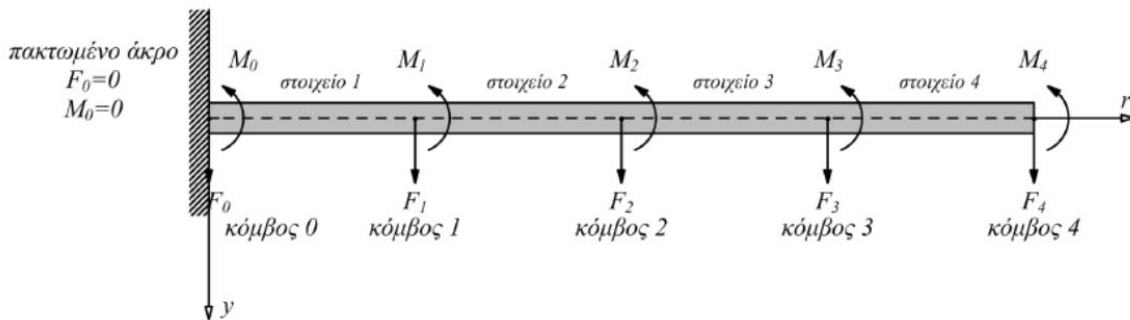
$$B = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 4} \\ M^{-1}F_e^* \end{bmatrix}_{16 \times 4},$$

$$G = \begin{bmatrix} 0_{8 \times 8} \\ M^{-1} \end{bmatrix}_{16 \times 8}$$

Το διάνυσμα μηχανικής δύναμης f_m είναι,

$$f_m = [F_1 \ M_1 \ F_2 \ M_2 \ F_3 \ M_3 \ F_4 \ M_4]^T \quad (80)$$

όπου F_i , M_i η δύναμη και η ροπή αντίστοιχα για κάθε κόμβο i (Σχ. 14) που προκύπτει μετά τη συρραφή των στοιχειωδών διανυσμάτων. [?]



Σχήμα 14 Υπόδειγμα «ευφυούς» δοκού χωρισμένο σε 4 πεπερασμένα στοιχεία

Μηχανικές εισοδοι στο σύστημα

Για σταθερή συγκεντρωμένη δύναμη 10N στο ελεύθερο άκρο της δοκού,

$$f_m(t, r) = 10\delta(r - L) \quad (81)$$

Χρησιμοποιώντας τις (59), (60), (61), (62), η δύναμη μετατρέπεται στο χώρο κατάστασης στη μορφή,

$$f_m = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 10 \ 0]^T \quad (82)$$

4 Υπόδειγμα συνάρτησης μεταφοράς μίας εισόδου-μίας εξόδου

Στο υπόδειγμα αυτό θεωρούμε το σύστημα (76), (78) με μία είσοδο και μία έξοδο, δηλαδή,

$$\dot{x}(t) = A_{(4n \times 4n)}x(t) + b_{(4n \times 1)}u(t) + g_{(4n \times 1)}d(t) \quad (83)$$

όπου τα διανύσματα b και g είναι οι κατάλληλες στήλες των B , G αντίστοιχα, και,

$$y(t) = x_{2n-1}(t) = cx(t) \quad (84)$$

όπου,

$$c^T_{(1 \times 4n)} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{2n-1}{1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T$$

Στο υπόδειγμα αυτό, η διαταραχή εφαρμόζεται στο ελεύθερο άκρο της δοκού, ως (μετρήσιμη) έξοδος νοείται η κατακόρυφη απόκλιση του ελεύθερου άκρου ενώ ο έλεγχος περιορίζεται στην επίδραση ενός πιεζοηλεκτρικού προσκολλημένου στο ελεύθερο άκρο της δοκού.

Παίρνοντας Laplace της (83), έχω,

$$sx(s) = Ax(s) + bu(s) + gd(s) \Rightarrow x(s) = (sI - A)^{-1} (bu(s) + gd(s)) \quad (85)$$

Αντικαθιστώντας την (85) στην (84), παίρνω,

$$y(s) = c(sI - A)^{-1} (bu(s) + gd(s)) \quad (85)$$

και δεδομένου ότι $u(s) = C(s)y(s)$, η (85) γίνεται,

$$\begin{aligned} y(s) &= c(sI - A)^{-1} (bC(s)y(s) + gd(s)) \Rightarrow y(s) \left[1 - c(sI - A)^{-1} bC(s) \right] = c(sI - A)^{-1} gd(s) \\ y(s) &= \left[\left[1 - c(sI - A)^{-1} bC(s) \right]^{-1} c(sI - A)^{-1} \right] gd(s) = T(s)d(s) \end{aligned} \quad (85)$$

που είναι και η συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής-απόκλισης. Για να την υπολογίσουμε μπορούμε να κάνουμε τα εξής:

Από την (85),

$$y(s) = c(sI - A)^{-1} bu(s) + c(sI - A)^{-1} gd(s) \quad (86)$$

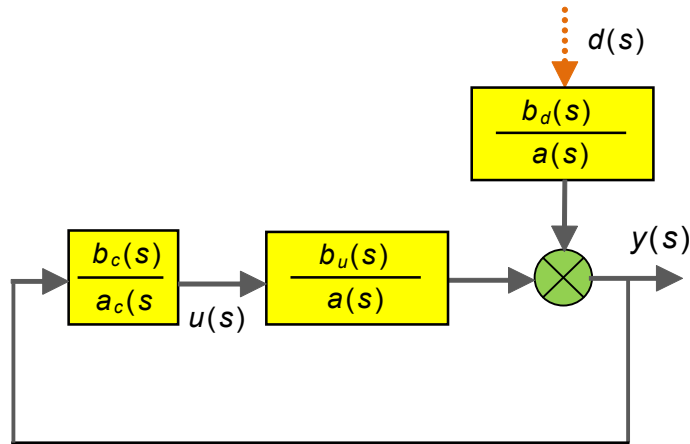
Έστω,

$$\begin{aligned} c(sI - A)^{-1} b &= \frac{b_u(s)}{a(s)} \\ c(sI - A)^{-1} g &= \frac{b_d(s)}{a(s)} \end{aligned} \quad (87)$$

Τότε η (86) γίνεται,

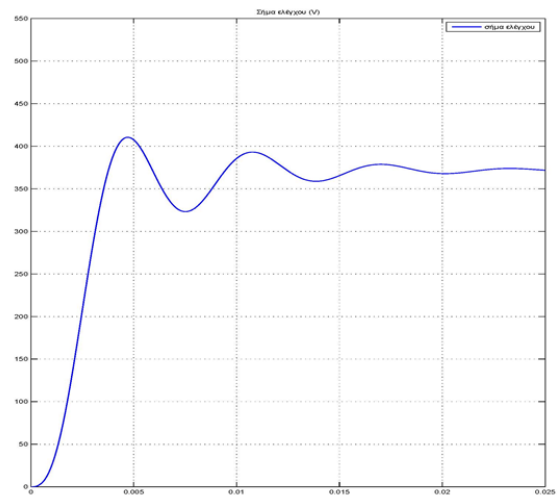
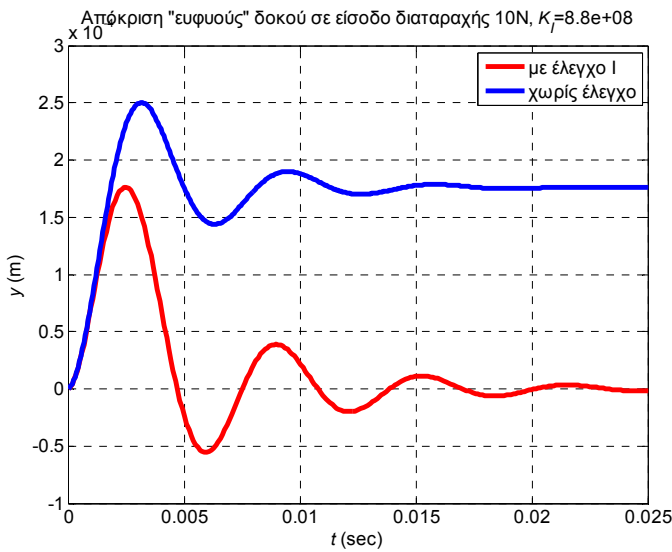
$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{b_u(s)}{a(s)} \frac{b_c(s)}{a_c(s)} y(s) + \frac{b_d(s)}{a(s)} d(s) \Rightarrow y(s) \left[1 - \frac{b_u(s)}{a(s)} \frac{b_c(s)}{a_c(s)} \right] = \frac{b_d(s)}{a(s)} d(s) \Rightarrow \\ y(s) &= \frac{a_c(s)b_d(s)}{a(s)a_c(s) - b_u(s)b_c(s)} d(s) \triangleq T(s)d(s) \end{aligned} \quad (86)$$

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος ελέγχου φαίνεται στο Σχ. 15.



Σχήμα 15 Δομικό διάγραμμα ελέγχου «ευφυούς» δοκού μίας εισόδου-μίας εξόδου

Με τη βοήθεια του MATLAB μπορούν να βρεθούν οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις. Στο Σχ. 16 φαίνεται μία τυπική σχεδίαση με τη χρήση ολοκληρωτικού ελεγκτή.



Σχήμα 16 Διαγράμματα απόκρισης και σήματος ελέγχου