

Μαγνητική μετεώριση

Το φαινόμενο της μαγνητικής μετεώρισης (magnetic levitation-MAGLEV) είναι ένα φυσικό φαινόμενο με εφαρμογές, μεταξύ άλλων, στις μεταφορές (π.χ. τρέινα, Σχ. 1) και σε ένσφαιρους τριβείς ακριβείας. Βασίζεται στο γεγονός ότι ηλεκτρικό ρεύμα που διέρχεται από αγωγό δημιουργεί μαγνητικό πεδίο, δηλαδή ασκεί ηλεκτρομαγνητική δύναμη σε αντικείμενα που ευρίσκονται στο πεδίο δράσης του.



Σχήμα 1 Τρέινο μαγνητικής μετεώρισης στη Σανγκάη

Πέρα όμως από τις πρακτικές εφαρμογές, η μαγνητική μετεώριση είναι από τις δημοφιλέστερες εκπαιδευτικές, πειραματικές συσκευές των συστημάτων ελέγχου.

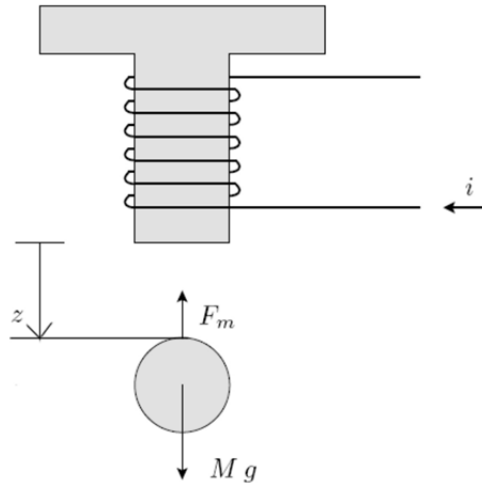
Στο σημείωμα αυτό θα εξάγω το μαθηματικό υπόδειγμα της διεργασίας αυτής, και θα δώσω αποτελέσματα λειτουργίας για τη συσκευή της Quanser (Σχ. 2).



Σχήμα 2 Συσκευή μαγνητικής μετεώρισης της Quanser

Μαθηματικό υπόδειγμα διαδικασίας

Για την εξαγωγή του μαθηματικού υποδείγματος θα θεωρήσω το Σχ. 3.



Σχήμα 3

Στο σχήμα αυτό φαίνονται τα βασικά στοιχεία ενός (ανοικτού) συστήματος μαγνητικής μετεώρισης που είναι:

- ο ηλεκτρομαγνήτης που διαρρέεται από ρεύμα (κατάλληλης) έντασης $i(t)$
- το κινούμενο στοιχείο: στη περίπτωση μας, σφαίρα βάρους mg τοποθετημένη κατά τον κάθετο άξονα του ηλεκτρομαγνήτη
- η μαγνητεγερτική δύναμη $F_m(t)$ που ασκείται στη σφαίρα
- η (κάθετη) μετατόπιση της σφαίρας, $z(t)$.

(επιπρόσθετα στοιχεία που απαιτούνται για τη λειτουργία του κλειστού συστήματος είναι ο αισθητήρας για τη μέτρηση του z και ο επενεργητής για τη παροχή του i).

Η βασική ηλεκτρομηχανική εξίσωση που διέπει το σύστημα είναι η,

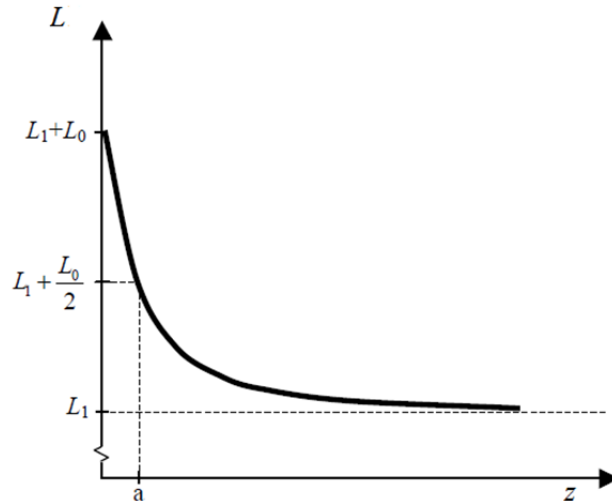
$$M \frac{d^2 z(t)}{dt^2} = Mg - F_m(z(t), i(t)) \quad (1)$$

Ένας τρόπος να υπολογισθεί η $F_m(t)$, είναι με τη βοήθεια της έννοιας της **συνενέργειας** (coenergy). Η συνενέργεια ορίζεται ως,

$$\tilde{W}(i, z) \triangleq \frac{1}{2} i^2(t) L(z(t)) \quad (2)$$

όπου L είναι η αυτεπαγωγή του ηλεκτρομαγνήτη. Στη συγκεκριμένη εφαρμογή η αυτεπαγωγή θεωρείται ότι ακολουθεί τη μορφή του Σχ. 4, δηλαδή,

$$L(z(t)) = L_1 + \frac{L_0}{1 + \frac{z(t)}{a}}, \quad L_1 \gg L_0 \quad (3)$$



Σχήμα 4 Γράφημα αυτεπαγωγής ηλεκτρομαγνήτη

Η (3) καταλήγει σε κάπως πολύπλοκη μορφή για τη μαγνητεγερτική δύναμη, γι' αυτό συνήθως χρησιμοποιείται η,

$$L(z(t)) = L_1 + \frac{L_0 z_0}{z(t)} \quad (4)$$

Η (4) δικαιολογείται εκ του γεγονότος ότι για το εύρος των z που εμφανίζονται στη συγκεκριμένη περίπτωση, κατάλληλος συνδυασμός των L_0 , L_1 και a της (3), μετατρέπει τη (3) στη (4).

Η μαγνητεγερτική δύναμη ορίζεται ως η παράγωγος της συνενέργειας. Επομένως, και μέσω της (2),

$$F_m(z(t), i(t)) = \frac{\partial \tilde{W}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{1}{2} i^2(t) \left(L_1 + \frac{L_0 z_0}{z(t)} \right) \right] = -\frac{1}{2} \frac{L_0 z_0 i^2(t)}{z^2(t)} = K_f \frac{i^2(t)}{z^2(t)} \quad (5)$$

όπου K_f είναι τελικά η σταθερά μαγνητικής δύναμης. Από τη (5), η (1) γίνεται,

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \frac{K_f i^2(t)}{M z^2(t)} - g &= 0 \Rightarrow \\ M z^2(t) \frac{d^2 z(t)}{dt^2} - g M z^2(t) &= -K_f i^2(t) \end{aligned} \quad (6)$$

Για να σχεδιάσουμε το σύστημα χρησιμοποιώντας τεχνικές γραμμικών συστημάτων, η μη γραμμική εξίσωση (6) πρέπει να γραμμικοποιηθεί γύρω από ένα σημείο ισορροπίας (i_e, z_e). Το σημείο αυτό προφανώς έχει άμεση εξάρτηση από το επιθυμητό σημείο ισορροπίας z_d (δηλ. $z_e = z_d$). Έχοντας καθορίσει

το z_d , το i_e προκύπτει άμεσα από την (6), θέτοντας $\frac{d^2 z(t)}{dt^2} = 0$:

$$i_e = \sqrt{\frac{2Mg}{K_f} z_e} \quad (7)$$

Στη συνέχεια ας ορίσουμε τις μετατοπισμένες μεταβλητές,

$$\begin{aligned}\hat{z}(t) &\triangleq z(t) - z_e \\ \hat{i}(t) &\triangleq i(t) - i_e\end{aligned}\quad (8)$$

οπότε η (6) γράφεται,

$$M \frac{d^2 \hat{z}(t)}{dt^2} = Mg - \frac{1}{2} K_f \left(\frac{\hat{i}(t) + i_e}{\hat{z}(t) + z_e} \right)^2 \quad (9)$$

Ας γραμμικοποιήσουμε την (9) γύρω από το (z_e, i_e) χρησιμοποιώντας την ανάπτυξη Taylor:

$$\begin{aligned}M \frac{d^2 \hat{z}(t)}{dt^2} &= Mg - \frac{1}{2} K_f \left(\frac{\hat{i}(t) + i_e}{\hat{z}(t) + z_e} \right)^2 = \\ \Rightarrow \frac{d^2 \hat{z}(t)}{dt^2} &= \frac{1}{M} \left\{ \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left[Mg - \frac{1}{2} K_f \left(\frac{\hat{i}(t) + i_e}{\hat{z}(t) + z_e} \right)^2 \right]_{\hat{z}=0, \hat{i}=0} \hat{z} + \frac{\partial}{\partial \hat{i}} \left[Mg - \frac{1}{2} K_f \left(\frac{\hat{i}(t) + i_e}{\hat{z}(t) + z_e} \right)^2 \right]_{\hat{z}=0, \hat{i}=0} \hat{i} \right\}\end{aligned}$$

Έτσι η γραμμική προσέγγιση της (6) είναι,

$$\frac{d^2 \hat{z}(t)}{dt^2} - \frac{K_f i_e^2}{z_e^3 M} \hat{z}(t) = -\frac{K_f i_e}{z_e^2 M} \hat{i}(t) \quad (10)$$

Χρησιμοποιώντας την (7) παρατηρούμε ότι,

$$\begin{aligned}\frac{K_f i_e^2}{z_e^3 M} &= \frac{K_f}{z_e^3 M} \left(\sqrt{\frac{2Mg}{K_f}} z_e \right)^2 = \frac{2g}{z_e} \\ \frac{K_f i_e}{z_e^2 M} &= \frac{K_f i_e}{\frac{i_e^2}{2Mg} M} = \frac{2g}{i_e}\end{aligned}$$

και η (10) γίνεται,

$$\frac{d^2 \hat{z}(t)}{dt^2} - \frac{2g}{z_e} \hat{z}(t) = -\frac{2g}{i_e} \hat{i}(t) \quad (11)$$

Θέτοντας,

$$a = \frac{2g}{z_e}, \quad b = \frac{2g}{i_e}$$

και παίρνοντας Laplace, δίνει τη γραμμικοποιημένη συνάρτηση μεταφοράς θέσης σφαίρας-ρεύματος πηνίου,

$$\frac{\hat{z}(s)}{\hat{i}(s)} = -\frac{b}{s^2 - a} \quad (12)$$

Όπως αναμενόταν, το σύστημα είναι ασταθές αφού έχει πόλους στο $\pm\sqrt{a}$.

Επιπλέον το ρεύμα (στη θέση ισορροπίας) $\hat{i}(t)$ σχετίζεται με την τάση εισόδου $v(t)$ μέσω της σχέσης,

$$L \frac{d\hat{i}(t)}{dt} + R\hat{i}(t) = v(t) \quad (13)$$

όπου R είναι η συνολική αντίσταση ($=R_c + R_s$). Παίρνοντας Laplace, δίνει τη συνάρτηση μεταφοράς τάσης-ρεύματος πηνίου,

$$\frac{\hat{i}(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{1}{Ls + R} \quad (14)$$

Απαλείφοντας το $\hat{i}(s)$ από τις (12), (14) δίνει τη τελική συνάρτηση μεταφοράς τάσης εισόδου-θέσης,

$$\frac{\hat{z}(s)}{\hat{v}(s)} = \frac{1}{Ls + R} \left(-\frac{b}{s^2 - a} \right) \quad (15)$$

Έλεγχος συσκευής μαγνητικής μετεώρισης Quanser

Η συσκευή της Quanser αποτελείται από:

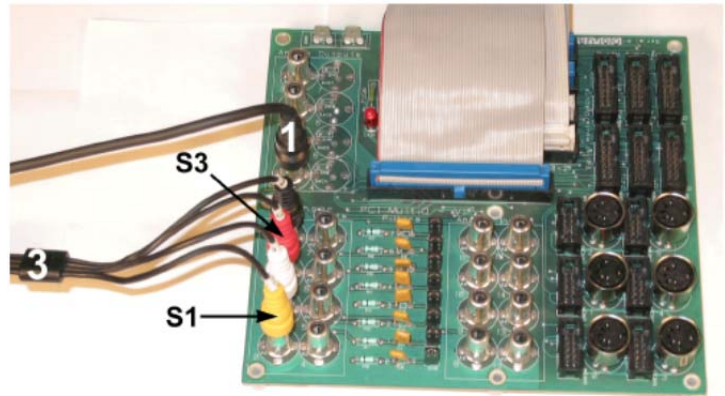
1. Τη συσκευή μαγνητικής μετεώρισης (Σχ. 2).
2. Τροφοδοτικό (Σχ. 5).
3. Κάρτα πρόσκτησης δεδομένων (Σχ. 6).

Ιδιαίτερης σημασίας στη λειτουργία της συσκευής είναι ο αισθητήρας θέσης. Αποτελείται από ένα NPN photodarlington πυριτίου και η απόδοση του είναι ευαίσθητη στις συνθήκες φωτισμού που επικρατούν. Για το λόγο αυτό η συσκευή είναι εφοδιασμένη με δύο λαμπτήρες που διατηρούν τον εσωτερικό φωτισμό της συσκευής σχετικά σταθερό.

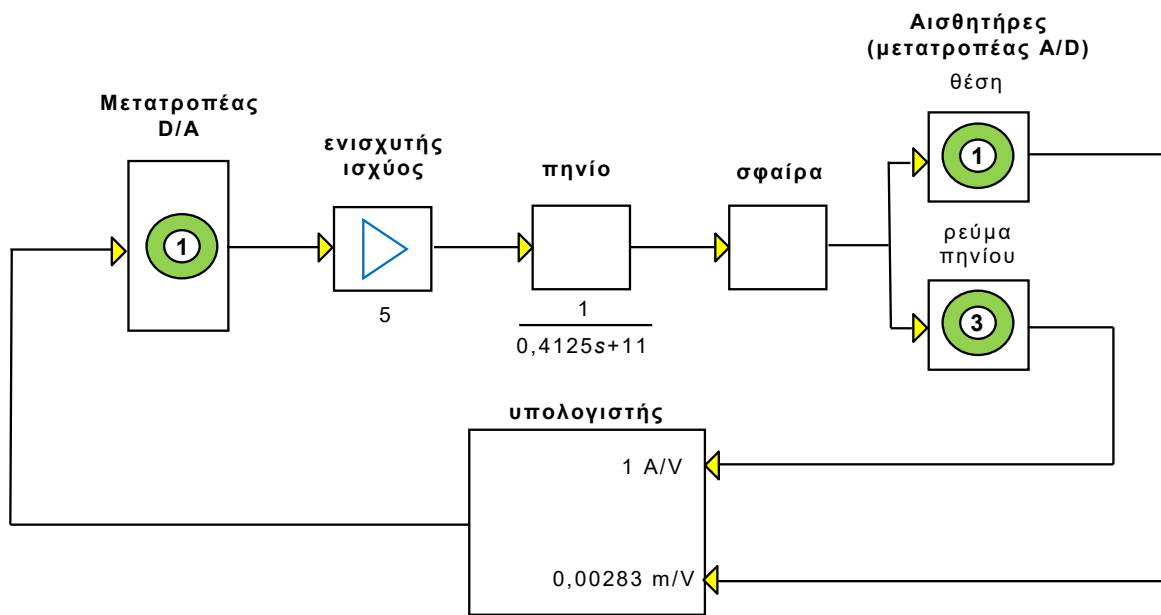
Το συνολικό πειραματικό σύστημα φαίνεται σχηματικά στο Σχ. 7.



Σχήμα 5 Τροφοδοτικό UPM-2405



Σχήμα 6 Κάρτα πρόσκτησης δεδομένων MultiQ PCI



Σχήμα 7 Σχηματικό διάγραμμα συσκευής μετώρισης Quanser

Οι τιμές των παραμέτρων της συσκευής της Quanser δίνονται στον Πιν. 1.

Πίνακας 1

Περιγραφή	Σύμβολο	Τιμή	Μονάδα
Αυτεπαγωγή πηνίου	L	0,4125	Henry
Αντίσταση πηνίου	R_c	10	Ω
Αντίσταση αισθητήρα ρεύματος πηνίου	R_s	1	Ω
Σταθερά μαγνητικής δύναμης	K_f	0,000065308	Nm^2/A^2
Μάζα σφαίρας	M	0,068	Kg
Ενίσχυση ενισχυτή ισχύος	K	5	
Συντελεστής αισθητήρα θέσης	$K_{v,m}$	0,00283	m/V

Θέση ισορροπίας	z_e	0,006	m
Ρεύμα ισορροπίας	i_e	0,86	A
Σταθερά	a	3270	
Σταθερά	b	22,88	

Βαρυτική σταθερά	g	9,81	m/s ²
Ακτίνα σφαίρας	r	0,0127	m
Απόσταση στηρίγματος-ηλεκτρομαγνήτη (Σχ. 3)	d	0,0394	m
Μέγιστο επιτρεπόμενο ρεύμα	i_{max}	3	A
Χρόνος δειγματοληψίας	t_s	0,001	s

(η κόκκινη γραμμή είναι ιδιαίτερα σημαντική για τη σχεδίαση, καθώς θέτει έναν άνω περιορισμό στην ένταση του ρεύματος ελέγχου).

Για τις συγκεκριμένες τιμές η (15) γίνεται,

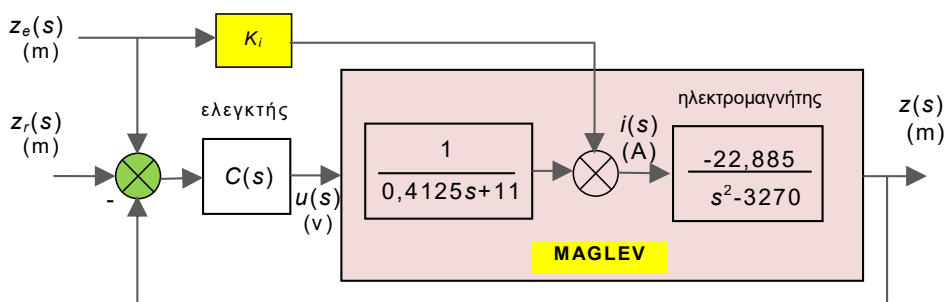
$$\frac{\hat{z}(s)}{\hat{v}(s)} = -\frac{1}{0,4125s + 11} \cdot \frac{22,88}{s^2 - 3270} \tag{16}$$

Σχεδίαση ελεγκτή PID

Επειδή το υπόδειγμα είναι γραμμικοποιημένο γύρω από ένα σημείο ισορροπίας, πρέπει το σύστημα να μεταβεί στο σημείο αυτό μέσω κατάλληλης εισόδου και κατόπιν να κρατηθεί εκεί από το σύστημα ανάδρασης. Η κατάλληλη είσοδος βρίσκεται προσεγγιστικά από την (16):

$$\begin{aligned} \frac{\hat{z}(s)}{\hat{v}(s)} &= -\frac{1}{0,4125s + 11} \cdot \frac{22,88}{s^2 - 3270} \Rightarrow \text{op}_{t \rightarrow \infty} \hat{z}(t) = \text{op}_{s \rightarrow 0} \left\{ s \hat{v}(s) \left(-\frac{1}{0,4125s + 11} \cdot \frac{22,88}{s^2 - 3270} \right) \right\} = \\ &= \text{op}_{s \rightarrow 0} \left\{ s \frac{v_r}{s} \left(-\frac{1}{0,4125s + 11} \cdot \frac{22,88}{s^2 - 3270} \right) \right\} \Rightarrow v_r \approx 1523z_r \end{aligned} \tag{17}$$

Έτσι το δομικό διάγραμμα ελέγχου γίνεται όπως το Σχ. 8.



Σχήμα 8 Δομικό διάγραμμα ελέγχου MAGLEV

Το πρόβλημα αυτό είναι ιδιαίτερα δύσκολο για τους εξής λόγους:

- α. Είναι εγγενώς ασταθές, έτσι οι κλασικές μέθοδοι σχεδίασης PID δεν μπορούν να εφαρμοστούν.
- β. Υπάρχουν δομικοί περιορισμοί σε διάφορες παραμέτρους του συστήματος:

(1) η σφαίρα κινείται σε περιορισμένο χώρο περίπου 0,04 m. (παράμετρος d , Πιν. 1). Λαμβάνοντας υπόψη και το μέγεθος της σφαίρας (διάμετρος 0,0254 m), αφήνει περιθώριο κίνησης 0,0146 m ή

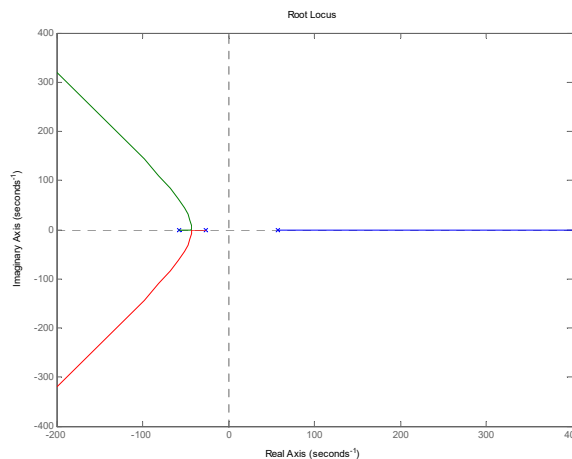
περίπου 1,4 cm. Αυτό, σε συνάρτηση με την είσοδο αναφοράς, επιβάλλει ανελαστικό περιορισμό στη μέγιστη υπερύψωση.

- (2) η ένταση του ρεύματος περιορίζεται από τις δυνατότητες της συσκευής στα **3A** (i_{max} , Πιν. 1). Περαιτέρω η ένταση είναι πάντα θετική, δηλαδή ο ηλεκτρομαγνήτης μπορεί μόνο να έλκει και όχι να απωθεί.

Προδιαγραφές

- Μηδενικό σφάλμα σε είσοδο βαθμίδας.
- Μέγιστη υπερύψωση $M_p < 5\%$.
- Χρόνος αποκατάστασης $t_s < 0,2s$.

Μία πιθανή προσέγγιση είναι να σταθεροποιήσουμε πρώτα το σύστημα μ' έναν ελεγκτή PD, και στη συνέχεια να ικανοποιήσουμε τις προδιαγραφές μ' έναν ελεγκτή PI. Κοιτώντας το ΓΤΡ του ανοικτού συστήματος (Σχ. 9), αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει το μηδενικό του PD να «τραβήξει» τον ασταθή πόλο αριστερά.

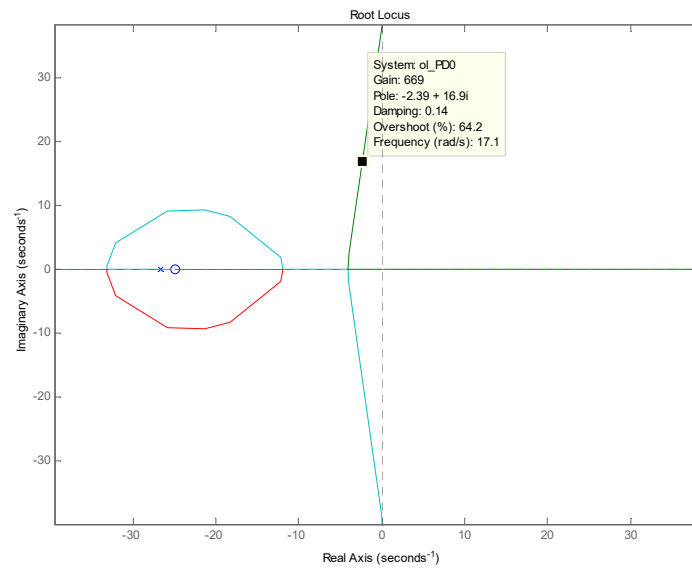


Σχήμα 9 ΓΤΡ ανοικτού συστήματος

Έστω,

$$PD = -K_{PD} \frac{(0,1s + 2,5)}{10^{-3}s + 1} \quad (18)$$

που μετατρέπει το ΓΤΡ στο Σχ. 10.



Σχήμα 10 ΓΤΡ ανοικτού συστήματος με PD

Από το ΓΤΡ επιλέγουμε μία «ασφαλή» απολαβή, έστω $K_{PD}=640$.

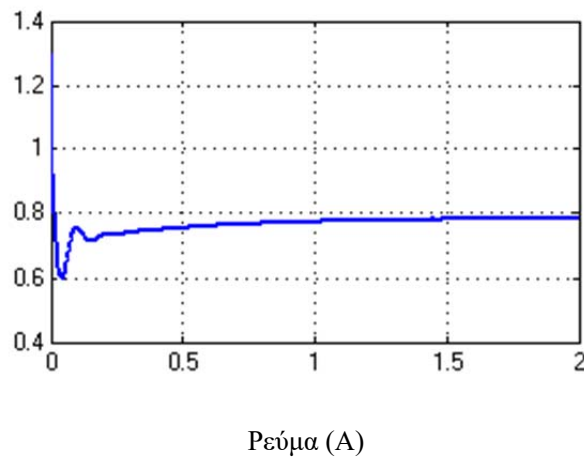
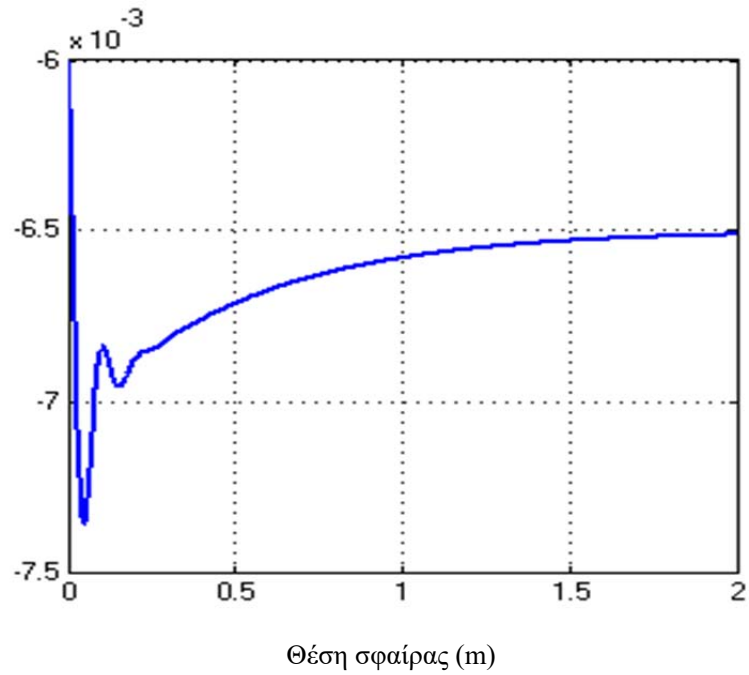
Η συνέχεια δεν είναι εύκολη. Το νέο σύστημα προς ρύθμιση είναι τώρα το,

$$P(s) = 640 \frac{(0,1s + 2,5)}{10^{-3}s + 1} \frac{1}{0,4125s + 11} \frac{22,88}{s^2 - 3270} \quad (19)$$

Μία σύγχρονη μεθοδολογία εύρεσης των παραμέτρων PID είναι αυτή των γενετικών αλγορίθμων. Η εντολή `ga` του MATLAB μας βοηθάει κι εδώ. Έτσι, ο γενετικός αλγόριθμος μας δίνει,

$$K_D=0,012, \quad K_P=1,75 \quad K_I=1,9$$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στο Σχ. 11.



Σχήμα 11 Θέση σφαίρας και ρεύμα πηνίου με έλεγχο PID