

## Υπόδειγμα οικιακού ηλεκτρικού φούρνου<sup>1</sup>

Ο ηλεκτρικός φούρνος είναι μία από τις συσκευές που όλοι έχουμε στο σπίτι μας. Η συσκευή αυτή καταναλώνει πολύ ενέργεια, γι' αυτό είναι εντυπωσιακό ότι, όπως μπορεί να δειχθεί, η επικρατούσα μέθοδος λειτουργίας της είναι αντιοικονομική.

Όπως είναι γνωστό, ο ηλεκτρικός φούρνος θερμαίνεται από μία ηλεκτρική αντίσταση και ελέγχεται από ένα σύστημα που προσπαθεί να κρατήσει τη θερμοκρασία σταθερή στην επιλεγμένη τιμή παρά τις απώλειες προς το περιβάλλον.

Θα ξεκινήσω τη θεωρία από το θερμαντικό στοιχείο, την «αντίσταση». Το φυσικό φαινόμενο που διέπει τη διαδικασία αυτή καλείται «θέρμανση Joule» ή «ωμική θέρμανση» ή «θέρμανση αντίστασης»: είναι η έκλυση θερμότητας από έναν αγωγό όταν διαρρέεται από ηλεκτρικό ρεύμα. Η ποσότητα της θερμότητας είναι,

$$Q \propto I^2 R \quad (1)$$

όπου  $I$  η ένταση του ρεύματος και  $R$  η αντίσταση. Η σχέση (1) είναι γνωστή ως **πρώτος νόμος του Joule**. Ως εκ τούτου η μονάδα SI της θερμικής ενέργειας είναι το Joule (J). Η (1) μπορεί να εκφρασθεί και σε όρους απορρόφησης της ηλεκτρικής ισχύος από τον αγωγό (μέρος της οποίας εκλύεται ως θερμότητα):

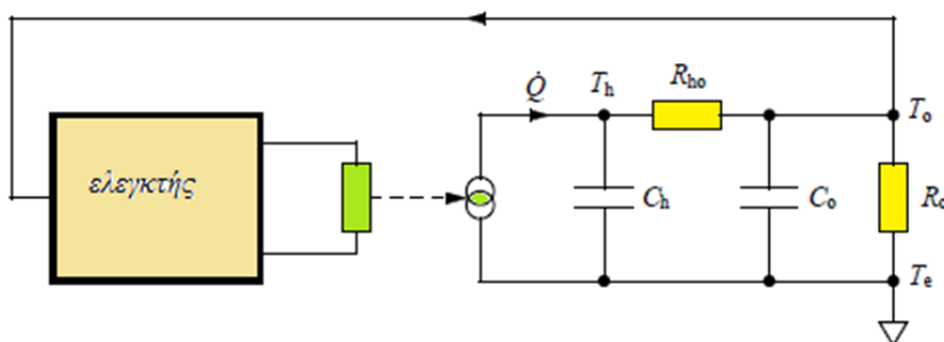
$$P = I^2 R = \frac{V^2}{R} = VI \quad (2)$$

όπου η ισχύς μετράται σε W (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου). Έτσι,

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} \quad (3)$$

Στις πρακτικές εφαρμογές χρησιμοποιούνται διάφορα υλικά για τις αντιστάσεις όπως π.χ. το Nichrome 80/20 (80% νικέλιο, 20% χρώμιο).

Τοποθετώντας την αντίσταση στον ηλεκτρικό φούρνο, δημιουργείται το ηλεκτρικό ανάλογο του Σχ. 1.



Σχήμα 1 Ηλεκτρικό ανάλογο ηλεκτρικού φούρνου

<sup>1</sup> Βασισμένο στο <http://newton.ex.ac.uk/teaching/CDHW/Feedback/index.html#Introduction>

όπου το θερμαντικό στοιχείο θερμικής χωρητικότητας  $C_h$  παρέχει ισχύ  $\dot{Q}$  στο φούρνο σε θερμοκρασία  $T_h$ . Το στοιχείο συνδέεται με το φούρνο θερμικής χωρητικότητας  $C_o$ , μέσω της θερμικής αντίστασης  $R_{ho}$ , ο οποίος χάνει θερμότητα προς το περιβάλλον θερμοκρασίας  $T_e$  μέσω της θερμικής αντίστασης  $R_o$  του φούρνου.

Βάσει της αρχής μετάδοσης και διατήρησης της θερμικής ενέργειας, οι εξισώσεις που διέπουν το κύκλωμα αυτό είναι:

$$\dot{T}_h = \frac{\dot{Q}}{C_h} - \frac{T_h - T_o}{C_h R_{ho}} \quad (4)$$

$$\dot{T}_o = \frac{T_h - T_o}{C_h R_{ho}} + \frac{T_e - T_o}{C_o R_o} \quad (5)$$

Παραγωγίζοντας την (5) και απαλείφοντας το  $T_h$ , παίρνω,

$$[C_h R_o C_o R_{ho}] \ddot{T}_o + [R_o C_o + C_h R_o + C_h R_{ho}] \dot{T}_o + T_o = \dot{Q} R_o + T_e \quad (6)$$

Για να γράψουμε τη (6) στη τυπική μορφή, έστω,

$$\omega_n^2 = \frac{1}{C_h R_o C_o R_{ho}}, \quad \zeta = \frac{\omega_n}{2} \frac{1}{R_o C_o + C_h R_o + C_h R_{ho}} \quad (7)$$

τότε,

$$\frac{d^2 T_o(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dT_o(t)}{dt} + \omega_n^2 T_o(t) = (\dot{Q}(t)R_o + T_e(t))\omega_n^2 \quad (8)$$

Η (8) συνιστά τη διαφορική εξίσωση που διέπει τη μεταβολή της θερμοκρασίας του φούρνου,  $T_o$ , συναρτήσει της εξωτερικής θερμοκρασίας,  $T_e$ , και της παρεχόμενης θερμικής ισχύος  $\dot{Q}$ .

Ένας τυπικός, οικιακός ηλεκτρικός φούρνος έχει τις εξής τιμές για τις σταθερές:

$\dot{Q}_{\max}$	4	kW
$R_o$	0,1	KW <sup>-1</sup>
$C_o$	10 <sup>4</sup>	JK <sup>-1</sup>
$R_{ho}$	0,15	KW <sup>-1</sup>
$C_h$	500	JK <sup>-1</sup>

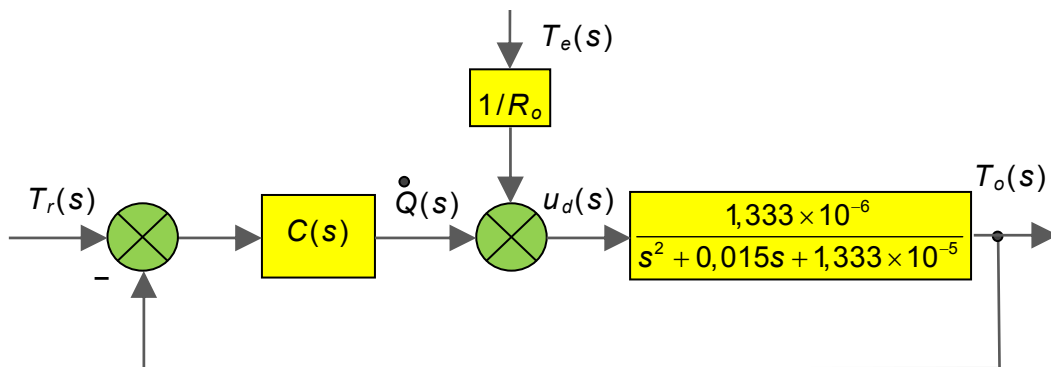
Με τις τιμές αυτές, η συνάρτηση μεταφοράς θερμοκρασίας φούρνου-θερμικής ενέργειας είναι:

$$T_o(s) = \frac{1,333 \times 10^{-6}}{s^2 + 0,015s + 1,333 \times 10^{-5}} \dot{Q}(s) \quad (9)$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς θερμοκρασίας φούρνου-θερμοκρασίας περιβάλλοντος,

$$T_o(s) = \frac{1,333 \times 10^{-5}}{s^2 + 0,015s + 1,333 \times 10^{-5}} T_e(s) \quad (10)$$

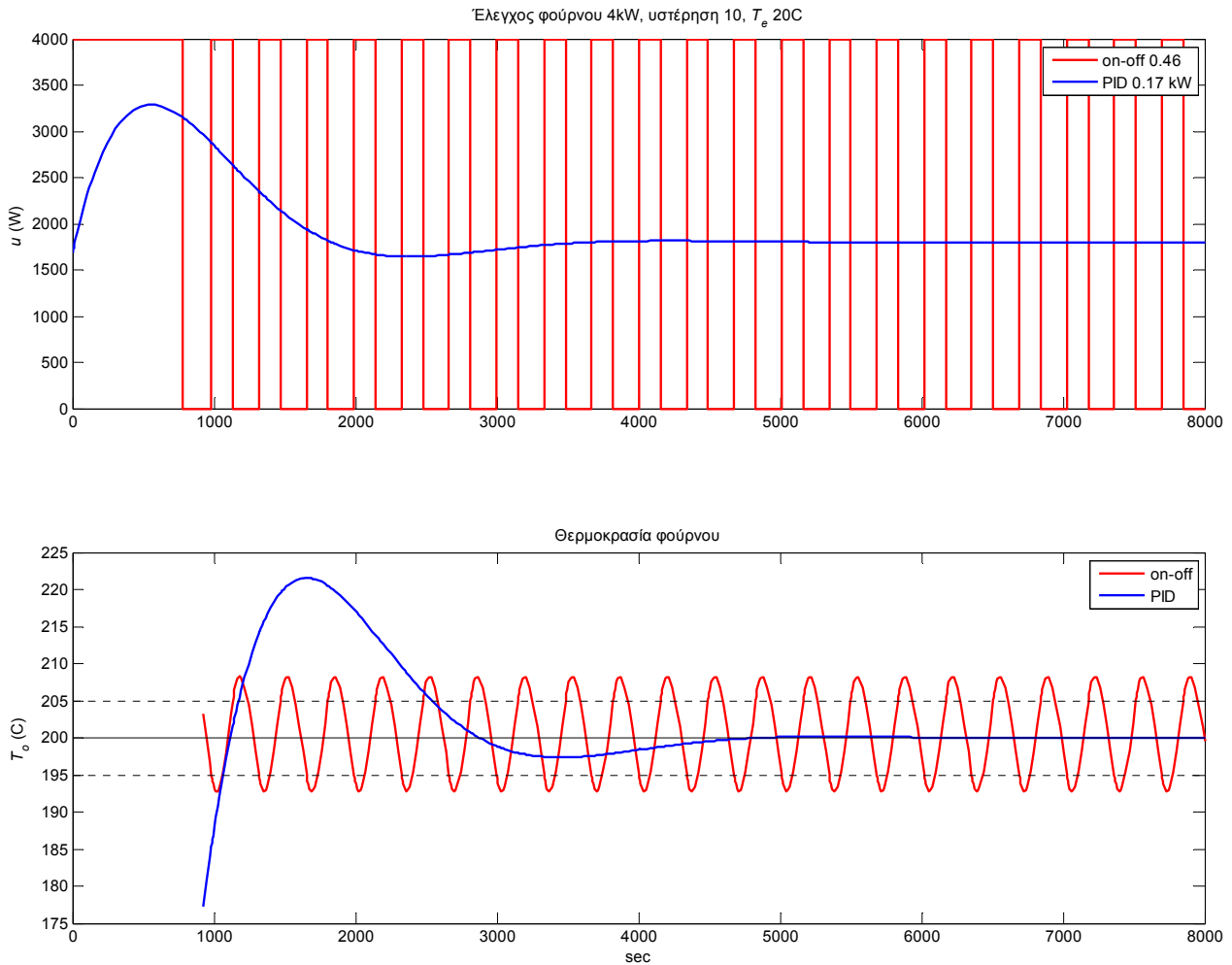
Επομένως το δομικό διάγραμμα ελέγχου του συστήματος είναι:



Σχήμα 2 Δομικό διάγραμμα ελέγχου ηλεκτρικού φούρνου

Με το Σχ. 2 ανά χείρας, μπορούμε να δοκιμάσουμε την αποδοτικότητα διαφόρων μεθόδου ελέγχου. Για παράδειγμα στο Σχ. 3 δείχνω τις γραφικές παραστάσεις για το “κλασσικό” έλεγχο on-off και έναν ελεγκτή PID για τον έλεγχο του φούρνου σε θερμοκρασία αναφοράς  $T_r=200^\circ$  και θερμοκρασία περιβάλλοντος  $T_e=20^\circ$ . Οι παράμετροι του κάθε ελεγκτή είναι,

1. On-off: ζώνη υστέρησης  $\Delta=10^\circ$ .
2. PID:  $K_p=17,37$ ,  $K_I=0,02$ ,  $K_D=-5201,45$ ,  $\tau_d=588,24$  όταν  $C(s) \triangleq K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D}{s\tau_D + 1}$



Σχήμα 3 Γραφήματα θερμοκρασίας και ελέγχου on-off και PID

Η προφανής διαφορά των δύο ελεγκτών είναι ότι ο PID επιτυγχάνει πολύ καλύτερα το στόχο της διατήρησης της θερμοκρασίας στο επιθυμητό επίπεδο με πιο «ομαλό» σήμα ελέγχου.. Αυτό που δεν είναι προφανές, αφού δεν απεικονίζεται στα διαγράμματα, είναι ότι ο ελεγκτής PID είναι πιο οικονομικός. Ο υπολογισμός της κατανάλωσης για τις δύο περιπτώσεις δίνει,

1. On-off: 0,46 kWh
2. PID: 0,17 kWh

Αν είναι έτσι, γιατί δεν κυκλοφορούν φούρνοι με ελεγκτές PID; Ο λόγος είναι ότι τεχνικά αυτό είναι ακριβό. Για να ελεγχθεί ακριβώς η παραγόμενη θερμότητα πρέπει να ελεγχθεί η τάση ή το ρεύμα ή η αντίσταση (εκ της (2)). Για να ελεγχθεί η τάση μπορεί να χρησιμοποιηθεί ένας αυτόματος μετασχηματιστής (Variac) με ταυτόχρονη αυτόματη μετακίνηση του επιλογέα τάσης. Για να ελεγχθεί η αντίσταση μπορεί να χρησιμοποιηθεί αυτόματος ροοστάτης, αλλά αυτό δεν εξοικονομεί ενέργεια. Τέλος μπορεί να χρησιμοποιηθεί σύγχρονη τεχνολογία ηλεκτρονικών ισχύος (π.χ. triac), που στην ουσία είναι πολύ βελτιωμένοι ελεγκτές on-off, αφού ανοιγοκλείνουν το ρεύμα πολλές φορές ανά λεπτό, υλοποιώντας έτσι μία λογική ελέγχου χρονικής αναλογίας (time-proportional control). Ο χρόνος απόσβεσης γι' αυτές τις ακριβότερες συσκευές, θα δείξει την πρακτική εφαρμογή τους.