Λήμμα

Το όριο,

$$\underset{t\to\infty}{\text{ορ}}\, y(t) = \underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}\right\} \tag{15}$$

είναι μηδέν μόνον αν ο ελεγκτής έχει τουλάχιστον ένα πόλο στο μηδέν.

Απόδειξη

Έστω ότι η εγκατάσταση είναι της μορφής,

$$P(s) = \frac{K_P}{s^l}\frac{\prod(s+z_{P,i})}{\prod(s+p_{P,j})}$$

δηλαδή έχει l πόλους στο μηδέν, ενώ αντίστοιχα ο ελεγκτής είναι,

$$C(s) = K_C\frac{\prod(s+z_{C,i})}{\prod(s+p_{C,j})}$$

Τότε η (15) γίνεται,

$$\underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}\right\} = \underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{\dfrac{K_P}{s^l}\dfrac{\prod(s+z_{P,i})}{\prod(s+p_{P,j})}}{1+K_C\dfrac{\prod(s+z_{C,i})}{\prod(s+p_{C,j})}\dfrac{K_P}{s^l}\dfrac{\prod(s+z_{P,i})}{\prod(s+p_{P,j})}}\right\} =$$

$$\underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{\dfrac{k_P}{s^l}}{1+k_C\dfrac{k_P}{s^l}}\right\} = \underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{k_P}{s^l+k_C k_P}\right\} = \frac{1}{k_C} \neq 0$$

Αντίθετα, αν,

$$P(s) = K_P\frac{\prod(s+z_{P,i})}{\prod(s+p_{P,j})}$$

ενώ ο ελεγκτής είναι,

$$C(s) = \frac{K_C}{s^l} \frac{\prod (s + z_{C,i})}{\prod (s + p_{C,j})}$$

δηλαδή έχει *l* πόλους στο μηδέν, τότε,

$$\underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{P(s)}{1+C(s)P(s)}\right\} = \underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{K_P \frac{\prod (s+z_{P,i})}{\prod (s+p_{P,j})}}{1+\frac{K_C}{s^l}\frac{\prod (s+z_{C,i})}{\prod (s+p_{C,j})} K_P \frac{\prod (s+z_{P,i})}{\prod (s+p_{P,j})}}\right\} =$$

$$\underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{k_P}{1+\frac{k_C}{s^l}k_P}\right\} = \underset{s\to 0}{\text{ορ}}\left\{\frac{s^l}{s^l + k_C k_P}\right\} = 0$$