Θεώρημα

Ένα πρέπον, ρητό σύστημα είναι ευσταθές BIBO αν και μόνον αν τα πραγματικά μέρη των πόλων του είναι αυστηρά αρνητικά.

Απόδειξη:

Ας γράψουμε την συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος σε μορφή (μιγαδικών) πόλων-μηδενικών),

$$G(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(s-p_i\right)} \tag{3}$$

Για να είμαστε πλήρεις ας θεωρήσουμε ότι κάποιοι πόλοι μπορεί να είναι πολλαπλοί και έστω m_i η πολλαπλότητα του πόλου i, $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, όπου k $(n \geq k \geq 1)$ το πλήθος των διακεκριμένων πόλων. Τότε η (3) γράφεται σε μερικά κλάσματα ως,

$$G(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\left(s-z_j\right)}{\prod_{i=1}^{k}\left(s-p_i\right)^{m_i}}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i}\frac{c_{i,l}}{\left(s-p_i\right)^{l}} \tag{4}$$

Η απόκριση μοναδιαίας ώσης της (4) είναι,

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}=\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i} c_{i,l}t^{l-1}e^{p_i t}, \quad t \geq 0 \tag{5}$$

Παίρνοντας τα μέτρα και των δύο μελών της (5) και ολοκληρώνοντας,

$$\int_0^{\infty}\left|h(t)\right|\mathrm{d}t=\int_0^{\infty}\left|\sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i} c_{i,l}t^{l-1}e^{p_i t}\right|\mathrm{d}t \tag{6}$$

Τώρα,

$$\int_0^\infty |h(t)|\mathrm{d}t \le \int_0^\infty \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i} |c_{i,l}||t^{l-1}||e^{p_i t}|\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k}\sum_{l=1}^{m_i} |c_{i,l}| \int_0^\infty |t^{l-1}||e^{p_i t}|\mathrm{d}t \qquad (7)$$

Επομένως η ισχύς του θεωρήματος, εξαρτάται από τα ολοκληρώματα του δεξιού μέλους της μορφής,

$$\int_0^\infty |t^l||e^{p_i t}|\mathrm{d}t$$

ή γράφοντάς τα σε μιγαδική μορφή,

$$\int_0^\infty |t^l||e^{(\sigma+\omega \mathrm{i})t}|\mathrm{d}t \le \int_0^\infty t^l |e^{\sigma t}||\text{συν}\omega t + \text{ημ}\omega t\mathrm{i}|\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^l e^{\sigma t}\mathrm{d}t$$

Έστω,

1. <u>***Αν***</u> (ικανή συνθήκη)

Έστω ότι τα πραγματικά μέρη των πόλων είναι αυστηρά αρνητικά.

Το αόριστο αυτό ολοκλήρωμα υπολογίζεται από το,

$$\underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \int_0^\tau t^l e^{\sigma t}\mathrm{d}t$$

Το ορισμένο ολοκλήρωμα βρίσκεται ολοκληρώνοντας κατά μέρη διαδοχικά,

$$\begin{aligned}\int_0^\tau t^l e^{\sigma t}\mathrm{d}t &= \frac{1}{\sigma}\left[t^l e^{\sigma t} - l\int_0^\tau t^{l-1}e^{\sigma t}\mathrm{d}t\right] = \cdots = \\ &= \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}\left[t^l - \frac{l t^{l-1}}{\sigma} + \frac{l(l-1)t^{l-2}}{\sigma^2} - \cdots \frac{(-1)^l l!}{\sigma^n}\right]\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \int_0^\tau t^l e^{\sigma t}\mathrm{d}t &= \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{e^{\sigma t}}{\sigma}\left[t^l - \frac{l t^{l-1}}{\sigma} + \frac{l(l-1)t^{l-2}}{\sigma^2} - \cdots \frac{(-1)^l l!}{\sigma^n}\right]_0^\tau \right\} \\ &= \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{e^{\sigma \tau}}{\sigma}\left[\tau^l - \frac{l \tau^{l-1}}{\sigma} + \frac{l(l-1)\tau^{l-2}}{\sigma^2} - \cdots \frac{(-1)^l l!}{\sigma^n}\right] \right\} - \frac{1}{\sigma}\frac{(-1)^l l!}{\sigma^n}\end{aligned}$$

Τα όρια αριστερά είναι της μορφής,

$$\alpha_i \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ e^{\sigma\tau} \tau^i \right\}$$

για κάποιες σταθερές α_i. Γράφοντας το όριο σαν,

$$\underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{\tau^i}{e^{-\sigma\tau}} \right\}$$

και εφαρμόζοντας διαδοχικά l' Hôpital,

$$\underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{\tau^i}{e^{-\sigma\tau}} \right\} = \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{i\tau^{i-1}}{-\sigma e^{-\sigma\tau}} \right\} = \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{i!}{-\sigma^i e^{-\sigma\tau}} \right\} = -\frac{i!}{\sigma^i} \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{1}{e^{-\sigma\tau}} \right\} = 0 \ \text{αν} \ \sigma<0 \tag{8}$$

(Αν σ=0, $\underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ e^{0\tau} \tau^i \right\} = \infty$).

Άρα,

$$\int_0^\infty t^l e^{\sigma t} \mathrm{d}t < \infty \ \text{αν} \ \sigma<0 \tag{9}$$

2. ***<u>Μόνον αν</u>*** (αναγκαία συνθήκη)

Έστω ότι,

$$\int_0^\infty t^l e^{\sigma t} \mathrm{d}t < \infty \tag{10}$$

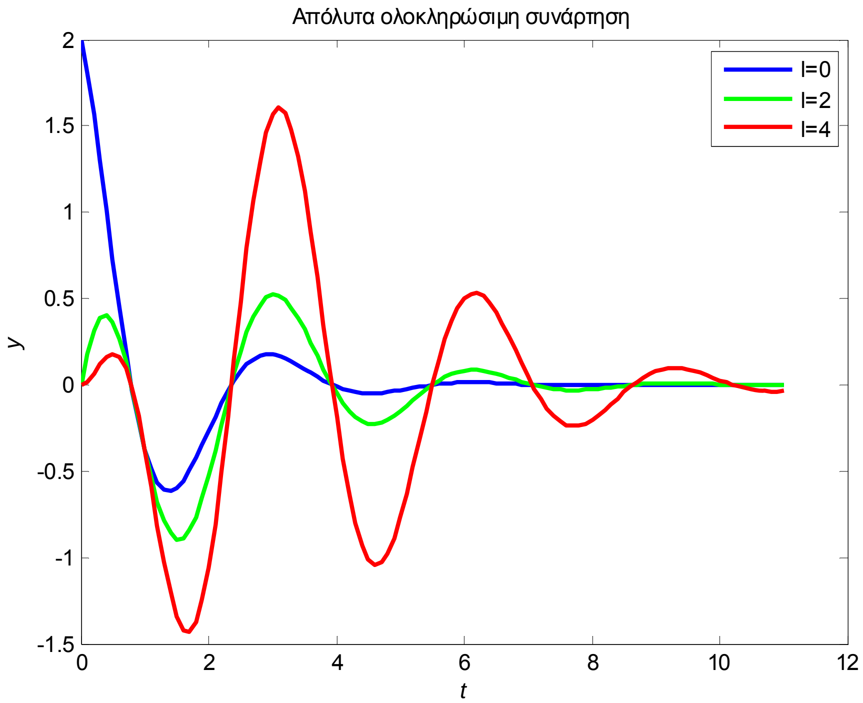
Από την (8)

$$\int_0^\infty t^l e^{\sigma t} \mathrm{d}t = -\frac{i!}{\sigma^i} \underset{\tau\to\infty}{\text{ορ}} \left\{ \frac{1}{e^{-\sigma\tau}} \right\} < \infty \tag{11}$$

Άρα σ<0.

ό.έ.δ.

Στο Σχ. 1 φαίνεται η γραφική παράσταση μίας τυπικής τέτοιας συνάρτησης.



Σχήμα 1 Η συνάρτηση $t^l e^{-0,8t}$συν$2t$ για διάφορα l