Ευστάθεια BIBO

Θεώρημα

Ένα σύστημα είναι ευσταθές φραγμένης εισόδου – φραγμένης εξόδου αν και μόνον αν,

$$\int_0^\infty |h(t)| \mathrm{d}t < \infty$$

όπου $h(t)$ η απόκριση μοναδιαίας ώσης του συστήματος.

(1) ***Αν*** (ικανή συνθήκη)

Για γραμμικά συστήματα,

$$\begin{aligned} y(t) = (h * r)(t) &\triangleq \int_0^t h(t-\tau) r(\tau) \mathrm{d}\tau \Rightarrow \\ |y(t)| &= \left| \int_0^t h(t-\tau) r(\tau) \mathrm{d}\tau \right| \\ &\le \int_0^t |h(t-\tau) r(\tau)| \mathrm{d}\tau \\ &\le \int_0^t |h(t-\tau)| |r(\tau)| \mathrm{d}\tau \end{aligned}$$

Εξ ορισμού $|r(t)| \le N, \ \forall t \ge 0$, οπότε,

$$|y(t)| \le N \int_0^t |h(t-\tau)| \mathrm{d}\tau \qquad (1)$$

Θέτοντας $\bar{\tau} = t - \tau$, το ολοκλήρωμα στην (1) γίνεται,

$$\int_0^t |h(t-\tau)| \mathrm{d}\tau = \int_t^0 |h(\bar{\tau})| (-1) \mathrm{d}\bar{\tau} = \int_0^t |h(\bar{\tau})| \mathrm{d}\bar{\tau} = \int_0^t |h(\tau)| \mathrm{d}\tau$$

Όμως από την υπόθεση, $\int_0^t |h(\tau)| \mathrm{d}\tau < \infty = B$ έστω. Επομένως η (1) γίνεται,

$$|y(t)| \le NB \qquad (2)$$

(2) ***<u>Μόνον αν</u>*** (αναγκαία συνθήκη)

Αν η $h(t)$ δεν είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη, τότε υπάρχει $\bar{t}$ τέτοιο ώστε,

$$\int_0^{\bar{t}} |h(t)| \mathrm{d}t = \infty$$

Ας θεωρήσουμε το φραγμένο σήμα εισόδου,

$$r(\bar{t} - t) = \begin{cases} +1, & h(t) \geq 0 \\ -1, & h(t) < 0 \end{cases}$$

Για το σήμα αυτό, η έξοδος τη χρονική στιγμή $\bar{t}$,

$$y(\bar{t}) = \int_0^{\bar{t}} h(\tau) r(\bar{t} - \tau) \mathrm{d}\tau = \int_0^{\bar{t}} |h(\tau)| \mathrm{d}\tau = \infty$$

δεν είναι προφανώς φραγμένη.