ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ

υπό

Αναστασίου Πουλιέζου

ΧΑΝΙΑ

3η εκδοχή, 2020

1η εκδοχή, 1989

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Οι σημειώσεις που ακολουθούν γράφτηκαν για το μάθημα «Ανάλυση Αποφάσεων», το οποίο δίδαξα στο τμήμα Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης στο διάστημα 1988-1992.

Οι σημειώσεις βασίζονται εν πολλοίς στα συγγράμματα των Lindley, "Making decisions" [2] και Raiffa, "Decision Analysis" [14].

Η λήψη αποφάσεων είναι η λογική διαδικασία που χρησιμοποιείται για να καταλήξουμε σε μια απόφαση. Δεν θα μας απασχολήσει ο τρόπος με τον οποίο ο κόσμος παίρνει αποφάσεις επί του παρόντος. Αντίθετα, θα μελετήσουμε το θέμα από επιστημονική σκοπιά και θα δούμε ποιές βασικές αρχές διέπουν την επιλογή κάποιας ενέργειας. Θα σπουδάσουμε τους ***κανόνες*** της λήψης αποφάσεων.

Τις περισσότερες φορές, οι αποφάσεις που χρειάζεται να πάρουμε στην επαγγελματική ή ιδιωτική μας ζωή δεν χρειάζονται κάποια ιδιαίτερη ανάλυση. Μερικές φορές όμως, βρισκόμαστε αντιμέτωποι με μια κατάσταση, όπου αισθανόμαστε ότι αξίζει να ασχοληθούμε λίγο παραπάνω, με κάποια συστηματική μέθοδο, με τις διαφορετικές επιλογές που μας παρουσιάζονται.

Στα μαθήματα που ακολουθούν, προτείνεται μία μέθοδος για την οργανωμένη και συστηματοποιημένη λήψη αποφάσεων. Στην πορεία της εκμάθησης της μεθόδου αυτής θα έχουμε ν' αντιμετωπίσουμε καταστάσεις, στις οποίες οι επιπτώσεις των αποφάσεων μας δεν είναι βέβαιες, γιατί υπεισέρχονται παράγοντες που δεν μπορούμε να ελέγξουμε ή να προβλέψουμε. Μια τέτοια κατάσταση σίγουρα ανακύπτει στα περισσότερα πραγματικά προβλήματα. Χονδρικά, η ανάλυση ενός προβλήματος λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα απαιτεί τα ακόλουθα:

1. Κατάλογος των δυνατών επιλογών για την συλλογή πληροφοριών, πειραματισμού και δράσης.
2. Κατάλογος των ενδεχομένων που πιθανόν να συμβούν.
3. Χρονολογική διάταξη της κτήσης πληροφορίας και επιλογών.
4. Εκτίμηση της χρησιμότητας της κάθε επίπτωσης που θα έχουν οι εφικτές επιλογές.
5. Εκτίμηση της πιθανότητας να συμβεί κάποιο συγκεκριμένο ενδεχόμενο.

Μετά από τα 5 αυτά βήματα, μπορεί ν' αρχίσει η σύνθεση της πληροφορίας. Κατ' αρχάς κάνουμε μερικούς υπολογισμούς, και στη συνέχεια αποφασίζουμε ότι κάποια στρατηγική συλλογής πληροφορίας, πειραματισμού και ενεργειών είναι η καλύτερη. Με τον όρο «καλύτερη» δεν εννοούμε ότι είναι η βέλτιστη που μπορεί να υπάρξει. Όμως, από τις στρατηγικές που έχουν επιλεγεί για να συγκριθούν, είναι η καλύτερη που μπορεί να επιλέξει ο ***συγκεκριμένος*** λήπτης αποφάσεων, που έχει βάλει την σφραγίδα της προσωπικότητάς του στο συγκεκριμένο πρόβλημα με τον υποκειμενικό υπολογισμό των βημάτων (1)-(5). Με αυτή την έννοια, ο λήπτης είναι τμήμα της αναλυτικής διαδικασίας.

Στο σύγγραμμα αυτό δεν δίνεται μια ***περιγραφική*** θεωρία της πραγματικής συμπεριφοράς. Ούτε και κάποια θετική θεωρία συμπεριφοράς για κάποιο υπερέξυπνο, ανύπαρκτο ον. Αντίθετα, παρουσιάζεται μία ***δεοντολογική*** θεωρία, που προσπαθεί να δώσει κάποιες προδιαγραφές στο άτομο που αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα επιλογής σε συνθήκες αβεβαιότητας, έτσι ώστε η απόφαση που θα πάρει να είναι συμβατή με τις προσωπικές του εκτιμήσεις.

Η μεθοδολογία της προτεινόμενης μεθόδου απαιτεί την αριθμητική έκφραση των επιπτώσεων σε μονάδες ***χρησιμότητας***, και την εκτίμηση της αβεβαιότητας σε μονάδες ***πιθανότητας***. Οι έννοιες της χρησιμότητας και της υποκειμενικής πιθανότητας είναι λογικά επακόλουθα ορισμένων απλών και βασικών αξιωματικών κανόνων συμπεριφοράς. Τα θέματα αυτά βρίσκονται στο επίκεντρο της διαμάχης γύρω από τα θεμέλια της στατιστικής θεωρίας αποφάσεων και της στατιστικής συμπερασματολογίας. Στο σύγγραμμα αυτό υιοθετείται η λεγόμενη ***Μπεϋσιανή*** (Bayesian) προσέγγιση.

Η Θεωρία Αποφάσεων διδάσκεται σε αρκετά πανεπιστήμια και ινστιτούτα σ’ όλο τον κόσμο. Από την εμπειρία της διδασκαλίας της θεωρίας σε επιχειρηματίες, έχει φανεί ότι τα σοβαρότερα εμπόδια στην αποτελεσματική εφαρμογή της θεωρίας αποφάσεων στη χάραξη της πολιτικής των επιχειρήσεων του ιδιωτικού και δημόσιου τομέα, προκύπτουν από την δυσκολία που έχει ο λήπτης αποφάσεων στο να δομεί τα προβλήματα απόφασης και στο να κάνει τις απαραίτητες εκτιμήσεις για την αβεβαιότητα και την χρησιμότητα των σχετικών προβλημάτων. Είναι σίγουρο όμως ότι τα προβλήματα αυτά μπορεί να ξεπεραστούν και ότι η Θεωρία Αποφάσεων είναι πλέον εφαρμόσιμη σε ένα ευρύ φάσμα πραγματικών προβλημάτων.

1 Εισαγωγή

1.1 Τυπικά προβλήματα απόφασης

α. Πρόβλημα γεώτρησης πετρελαίου

Μία εταιρεία πετρελαίου πρέπει ν' αποφασίσει αν θα πραγματοποιήσει γεώτρηση σε κάποια συγκεκριμένη περιοχή. Η διεύθυνση της εταιρείας είναι αβέβαιη για πολλά πράγματα: τα έξοδα της γεώτρησης, τον όγκο του πετρελαίου που υπάρχει, τα έξοδα εξόρυξης του πετρελαίου κλπ. Έχει όμως στην κατοχή της στοιχεία παρόμοια για παλιότερες γεωτρήσεις στην ίδια περιοχή, και μπορεί να συμβουλευθεί τον ειδικό γεωλόγο ή γεωφυσικό της εταιρείας. Μπορεί επίσης να έχει επιπλέον πληροφόρηση (όχι όμως απολύτως έγκυρη) για την γεωφυσική δομή του υπεδάφους, πραγματοποιώντας σεισμικές δοκιμές. Η πληροφορία αυτή όμως είναι αρκετά ακριβή, και το πρόβλημα είναι αν θα αποκτήσει αυτή την πληροφορία πριν να πάρουν την τελική απόφαση: αν θα πραγματοποιηθεί ή όχι η γεώτρηση.

β. Παραγωγή νέου φαρμάκου

Μία φαρμακευτική εταιρεία πρέπει ν' αποφασίσει αν θα παράγει ή όχι ένα νέο φάρμακο για δερματική αλλεργία που έχει αναπτύξει. Υπάρχει αβεβαιότητα για: το ποσοστό των ασθενών που θα γιατρευτούν, για το ποσοστό των ασθενών που θα έχουν επιβλαβείς παρενέργειες, την ζήτηση του φαρμάκου αν πωλείται σε κάποια καθορισμένη τιμή, με την υπόθεση κάποιου δεδομένου ποσοστού θεραπείας και εκπτώσεων, κ.λπ. Έχει στην διάθεσή της τις επιστημονικές αναφορές των τεχνικών της, την κρίση των υπεύθυνων της έρευνας αγοράς και τα αποτελέσματα ενός πειράματος-πιλότου σε κάποιο σωφρονιστικό ίδρυμα. Μπορεί επίσης να συλλέξει επιπλέον πληροφορία κάνοντας εκτεταμένα ελεγχόμενα κλινικά πειράματα. Τα πειράματα αυτά όμως είναι ακριβά και χρονοβόρα. Θα πρέπει να τα διεξάγει; Αν ναι, πόσα;

γ. Παραγωγή νέου προϊόντος

Μία χημική βιομηχανία έχει περατώσει την ανάπτυξη μιας καινούργιας βαφής για κατοικίες. Το Δ.Σ. πρέπει ν' αποφασίσει αν θα παράγουν το νέο προϊόν οι ίδιοι, και αν ναι, τι μέγεθος εργοστάσιο πρέπει να ανεγερθεί, ή αν θα πουλήσουν ή νοικιάσουν τα δικαιώματα παραγωγής σε μια εταιρεία που ασχολείται αποκλειστικά με την παραγωγή και διάθεση οικιακών χρωμάτων. Η αβεβαιότητά τους εστιάζεται βασικά στο μέγεθος της μελλοντικής αγοράς και στα διαφημιστικά έξοδα, όπως επίσης και στη χρονική διάρκεια που θα μεσολαβήσει μέχρι κάποιος ανταγωνιστής να παράγει ένα νέο προϊόν. Είναι δυνατόν να διανέμουν κάποιο ερωτηματολόγιο στους υποψήφιους διανομείς χρωμάτων, αλλά οι απαντήσεις δεν πρέπει να θεωρηθούν απόλυτα αληθείς. Τί πρέπει να κάνει η εταιρεία;

δ. Επένδυση έρευνας και ανάπτυξης από την Κυβέρνηση

Κάποιος κυβερνητικός αξιωματούχος πρέπει ν' αποφασίσει αν θα επενδυθούν χρήματα για ένα δεκαετές πρόγραμμα έρευνας και ανάπτυξης ήπιων μορφών ενέργειας. Τα γνωστά αποθέματα πετρελαίου επαρκούν για μερικά χρόνια με την αναμενόμενη ζήτηση ηλεκτρικής ενέργειας. Ο αξιωματούχος είναι αβέβαιος για την οικονομική απόδοση του νέου συστήματος. Ο λήπτης απόφασης πρέπει ν' αποφασίσει αν θα προχωρήσει σ' ένα γρήγορο πρόγραμμα, με την ευχέρεια να μην το εφαρμόσει αν αποδειχθεί αντιοικονομικό, ή αν θ' αρχίσει ένα μέτριο πρόγραμμα μεγαλύτερης διάρκειας, ελπίζοντας ότι θα έχει επιθυμητά αποτελέσματα. Πρέπει επίσης ν' αποφασίσει αν θα επικεντρώσει την έρευνα σε μία καινοτομία ή αν θα διαιρέσει τα κονδύλια σε διάφορα παράλληλα ερευνητικά έργα, μέχρι να συλλεχθεί ικανή πληροφορία για την απόδοση του καθενός.

ε. Το πρότυπο πρόβλημα

Όλα τα παραπάνω προβλήματα, όπως και πολλά παρόμοια που εμφανίζονται στην πράξη, είναι δυνατόν να αναλυθούν και επιλυθούν, με αναφορά σε ένα πρότυπο, βασικό πρόβλημα (Raiffa, [14]):

Ας φανταστούμε μία συλλογή 1000 δοχείων, δύο ειδών, θ_1 και θ_2. Κάθε δοχείο περιέχει κόκκινες και μαύρες σφαίρες με την εξής αναλογία:

$$\theta_1 : \begin{cases} 4 \text{ κόκκινες} \\ 6 \text{ μαύρες} \end{cases}$$

$$\theta_2 : \begin{cases} 9 \text{ κόκκινες} \\ 1 \text{ μαύρη} \end{cases}$$

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι επιλέγουμε τυχαία ένα δοχείο, και μαντεύουμε σε ποια κατηγορία ανήκει. Αν μαντέψουμε σωστά, κερδίζουμε κάποιο ποσό, αν όχι χάνουμε. Υπάρχουν λοιπόν τρεις πιθανές επιλογές:

$\boldsymbol{d_1}$: λέμε ότι το δοχείο είναι τύπου θ_1
$\boldsymbol{d_2}$: λέμε ότι το δοχείο είναι τύπου θ_2
$\boldsymbol{d_3}$: δεν παίζουμε

Τα αντίστοιχα χρηματικά ποσά, ας είναι τα ακόλουθα:

Αν επιλέξουμε την d_1, τότε: $\begin{cases} \text{κερδίζουμε 40 € αν είμαστε σωστοί} \\ \text{χάνουμε 20 € αν είμαστε λάθος} \end{cases}$
Αν επιλέξουμε την d_2, τότε: $\begin{cases} \text{κερδίζουμε 100 € αν είμαστε σωστοί} \\ \text{χάνουμε 5 € αν είμαστε λάθος} \end{cases}$

Μπορούμε ν' αποκτήσουμε επιπλέον πληροφορία κάνοντας ορισμένα πειράματα. Συγκεκριμένα, υπάρχουν οι παρακάτω επιλογές:

$\boldsymbol{\pi_1}$: με 8 € μπορούμε να δούμε μία σφαίρα
$\boldsymbol{\pi_2}$: με 12 € μπορούμε να δούμε δύο σφαίρες
$\boldsymbol{\pi_\varepsilon}$: με 9€ μπορούμε να δούμε μία σφαίρα και **μετά** να δούμε άλλη μία με 4,5 €. Μπορούμε επίσης να επανατοποθετήσουμε την πρώτη σφαίρα πριν δούμε την δεύτερη χωρίς έξοδα.

Επίσης, ξέρουμε ότι από τα 1000 δοχεία, τα 800 είναι τύπου θ_1.

Διάφορες παραλλαγές στο πρόβλημα αυτό, μπορεί να το φέρουν σε πλήρη αντιστοιχία με το πραγματικό πρόβλημα.

1.2 Ο ρόλος της επιστημονικής μεθόδου

Η συνεισφορά της επιστημονικής προσέγγισης στην λήψη αποφάσεων αξίζει κάποιας συζήτησης.

Συχνά λέγεται ότι η επιλογή κάποιας ενέργειας είναι μία τόσο ανθρώπινη δραστηριότητα, που εξαρτάται από την προσωπικότητα του κάθε λήπτη αποφάσεων, ώστε η αφηρημένη και κενή αισθημάτων ανάλυση των μαθηματικών, είναι ακατάλληλη. Ο Ναπολέων δεν χρειάστηκε υπολογιστή για να κατακτήσει την Ευρώπη. Η αντίθετη άποψη επισημαίνει ότι αν και υπάρχει ένα ισχυρό ανθρώπινο στοιχείο στην διαδικασία, υπάρχουν τμήματα της που μπορούν να επωφεληθούν από μερικούς υπολογισμούς. Ο επιχειρηματίας για παράδειγμα χρειάζεται τους λογιστές του. Το υλικό λοιπόν του βιβλίου αυτού παρέχει ένα βοήθημα στον λήπτη αποφάσεων. Δεν προσπαθεί να τον αντικαταστήσει. Θα συμφωνούσαμε ότι η προσωπικότητα του λήπτη αποφάσεων είναι σημαντική αλλά υπάρχουν μέρη που επιδέχονται συστηματική, αναλυτική σπουδή. Ειδικότερα, οι τρόποι με τους οποίους τμήματα ενός απλού προβλήματος απόφασης μπορούν να συνδυασθούν για να αποτελέσουν ένα σύνολο, αποδεικνύεται ότι υπακούουν σε μερικούς κανόνες. Δεν θα παρουσιάσουμε μία μηχανή στην οποία αρκεί να πατήσουμε ένα κουμπί για να μας υποδειχθεί η σωστή ενέργεια. Απλά θα δώσουμε μερικές κατευθυντήριες γραμμές για μία συνετή λήψη αποφάσεων, κατευθυντήριες γραμμές που θα μας δώσουν την ικανότητα να χωρίσουμε μία περίπλοκη διαδικασία σε μικρότερα και άρα ευκολότερα τμήματα, των οποίων οι αντίστοιχες αναλύσεις μπορούν να συνδυασθούν για να δώσουν μία συνολική απόφαση.

Αυτό που έχει κάνει ο θεωρητικός - στατιστικολόγος, μαθηματικός ή άλλος - είναι να σταθεί και να κοιτάξει τα προβλήματα που αντιμετωπίζει ο λήπτης αποφάσεων, και να αναρωτηθεί: μπορούν να εντοπισθούν πρότυπα συμπεριφοράς που αν αποκαλυφθούν φαίνονται γελοία και άρα πρέπει να απαλειφθούν; Με άλλα λόγια ο θεωρητικός έχει ψάξει για τη «συνέπεια» που πρέπει να υπάρχει σε κάθε διαδικασία απόφασης. Στη συνέχεια έχει συνάψει ορισμένους κανόνες που πρέπει να ακολουθούνται. Ο απλούστερος τρόπος για να εξασφαλισθεί η συνέπεια, είναι να υπάρχει ένα πρότυπο με το οποίο να συγκρίνονται όλες οι περιπτώσεις· έτσι η περισσότερη προσπάθεια του θεωρητικού είναι προς την κατεύθυνση της ανάπτυξης κατάλληλων προτύπων.

Για να καταλάβουμε καλύτερα την έννοια του συνεπούς, θα δώσουμε ένα ανάλογο παράδειγμα, έχοντας όμως υπόψη μας ότι οι αναλογίες δεν είναι ποτέ τέλειες. Ας θεωρήσουμε ένα μεγάλο και περίπλοκο κτήριο και ας συγκεντρωθούμε αποκλειστικά στις διαστάσεις του, ξεχνώντας τα υλικά του, τις χρήσεις των χώρων του και τους ανθρώπους που θα το κατοικήσουν. Η περίπλοκη αυτή δομή πρέπει να έχει συμβιβαστές διαστάσεις. Τα παράθυρα δεν μπορεί να είναι ψηλότερα από τα δωμάτια κλπ. Ο αρχιτέκτονας πρέπει να λάβει υπόψη του τους περιορισμούς αυτούς όταν σχεδιάζει το κτήριο και αυτό το επιτυγχάνει με την μέτρηση. Η μέτρηση επιτυγχάνεται με την αναφορά όλων των μερών σε κάποιο πρότυπο, στην Ελλάδα το μέτρο. Εκφράζει έτσι όλες τις διαστάσεις ως προς ένα πρότυπο. Με τον ίδιο τρόπο θα επιλύσουμε και ένα περίπλοκο πρόβλημα απόφασης: Θα εκφράσουμε τα ξεχωριστά του τμήματα ως προς έναν πρότυπο τύπο απόφασης και στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το πρότυπο αυτό για να λύσουμε το κυρίως πρόβλημα.

Προηγουμένως μιλήσαμε για την απαίτηση της συνέπειας στην λήψη αποφάσεων. Επειδή ο όρος αυτός χρησιμοποιείται με διαφορετική έννοια στην στατιστική, θα χρησιμοποιούμε στο εξής τον όρο «***συνεκτικός***», και θα αναφέρουμε την «***συνοχή***» σαν μία επιθυμητή ιδιότητα στην επιλογή μίας απόφασης.

1.3 Η λήψη αποφάσεων ως επιλογή μεταξύ εναλλακτικών ενεργειών

Ο άνθρωπος αντιμετωπίζει ένα πρόβλημα απόφασης όταν καλείται να επιλέξει μεταξύ τουλάχιστον δύο ενεργειών. Κάποιος που έχει ένα μόνο ρούχο για να φορέσει δεν χρειάζεται ν' αποφασίσει τί να φορέσει. Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει σε μία περίπτωση λήψης απόφασης είναι να εξετάσουμε ποιες είναι οι δυνατές εναλλακτικές ενέργειες. Δεν είναι αναγκαίο να ξεχωρίσουμε την απόφαση από την ενέργεια. Είναι επίσης συχνά ανεπαρκές να θεωρούμε μία απόφαση μαζί με την άρνησή της σαν εναλλακτικές αποφάσεις, ορίζοντας έτσι ένα πρόβλημα με μόνο δύο ενέργειες. Για παράδειγμα έστω ότι κάποιος θέλει να πάει στο θέατρο κάποιο βράδυ· δεν μπορεί να παρουσιάσει την κατάσταση αυτή σαν πρόβλημα επιλογής μεταξύ των ενεργειών «να πάω στο θέατρο», «να μη πάω στο θέατρο». Γιατί αν δεν πάει, πρέπει να κάνει κάτι άλλο· να καθίσει στο γραφείο του και να διαβάσει, να μείνει σπίτι του να δει τηλεόραση κ.λπ. Υπάρχουν στην πραγματικότητα πολλές ενέργειες από τις οποίες μπορεί να διαλέξει μία για να κάνει εκείνο το βράδυ, και το πρόβλημα απόφασης είναι η επιλογή μίας εξ αυτών.

Το σημείο αυτό έχει μεγάλη σημασία και υπάρχουν καθημερινά πολλές σημαντικές περιπτώσεις λήψης απόφασης όπου ξεχνιέται. Σημαντικές αποφάσεις των κυβερνήσεων συχνά φαίνονται στον απλό πολίτη ότι παίρνονται χωρίς τον απαιτούμενο σεβασμό σ' όλες τις δυνατότητες, αν και ένα από τα καθήκοντα της αντιπολίτευσης είναι η επισήμανση των εναλλακτικών οδών.

1.4 Εξαντλητικός κατάλογος αλληλοαποκλειομένων αποφάσεων

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να γίνει για την λύση οποιουδήποτε προβλήματος απόφασης είναι να κατασκευασθεί ένας κατάλογος με όλες τις πιθανές ενέργειες που μπορούμε να κάνουμε.

Μερικές φορές είναι δυνατόν να συμπεριλάβουμε όλες τις λογικές εναλλακτικές λύσεις. Για παράδειγμα, ένας καταστηματάρχης που πρέπει να αποφασίσει πόσα κομμάτια να παραγγείλει για το κατάστημα του μπορεί να παραγγείλει από κανένα μέχρι τόσα όσα χωράει το κατάστημα του. Αυτές είναι οι άμεσες δυνατότητες, αφού θα μπορούσε να διερωτηθεί αν πρέπει να μεγαλώσει το μαγαζί του. Συχνά, κάποιος δεν μπορεί να είναι σίγουρος ότι έχει συμπεριλάβει όλες τις δυνατότητες, είναι δε βέβαιο ότι η ικανότητα μερικών ληπτών αποφάσεων έγκειται στο γεγονός ότι σκέφτονται καινούργιες δυνατότητες πέρα από τις καθιερωμένες. Δυστυχώς δεν υπάρχουν επιστημονικές συμβουλές προς την κατεύθυνση αυτή. Οι συνταγές που προτείνονται σ' αυτό το βιβλίο περιορίζονται στον τρόπο επιλογής από ένα δοσμένο σύνολο αποφάσεων, και το σημαντικό στοιχείο είναι η εξάντληση των εναλλακτικών κατευθύνσεων. Όταν είμαστε σίγουροι ότι αυτό συμβαίνει, ονομάζουμε τον κατάλογο ***εξαντλητικό.*** Ας σημειωθεί επίσης ότι δεν είναι δυνατόν να προσθέσουμε σε κάποιο κατάλογο την απόφαση «κάνε κάτι άλλο», χωρίς να διευκρινίζεται τι είναι αυτό το κάτι άλλο.

Αρχίζουμε λοιπόν με ένα κατάλογο όλων των δυνατών αποφάσεων. Είναι βολικό να απαιτήσουμε ότι από αυτόν τον κατάλογο μόνο μία απόφαση μπορεί να επιλεχθεί: δηλαδή η πιθανότητα να επιλεχθούν δύο ή περισσότερες αποκλείεται. Ένας τέτοιος κατάλογος μπορεί πάντα να κατασκευασθεί αν ομαδοποιήσουμε όλα τα πιθανά ζευγάρια, τριπλέτες κ.λπ. αποφάσεων, και τα θεωρήσουμε μέλη του νέου καταλόγου.

Παράδειγμα 1.1: Ο κατάλογος του εστιατορίου που περιέχει ορεκτικά, κυρίως γεύμα, φρούτα κ.λπ. δεν πληροί τις προϋποθέσεις που αναφέραμε γιατί είναι δυνατόν να αποφασίσουμε για κάποιο ορεκτικό και κάποιο γεύμα και κάποιο φρούτο. Θα μπορούσε όμως να φτιαχτεί ένας κατάλογος που θα αποτελείτο από τριάδες που θα περιέχουν ένα ορεκτικό, ένα γεύμα και ένα φρούτο. Ο νέος κατάλογος βέβαια θα είναι πολύ μεγαλύτερος από τον αρχικό αλλά αυτό δεν θα μας δυσκολέψει, τουλάχιστον στην αρχή. Αργότερα, θα δούμε πως να χωρίζουμε τους καταλόγους πολλαπλών αποφάσεων σε μία σειρά ανεξαρτήτων καταλόγων.

Ένας κατάλογος αποφάσεων με την παραπάνω ιδιότητα καλείται κατάλογος ***αλληλοαποκλειομένων*** αποφάσεων. Οι αποφάσεις στον κατάλογο αυτό μπορούν να γραφτούν με οποιαδήποτε λογική σειρά και τις βαφτίζουμε σαν απόφαση αριθμός ένα, απόφαση αριθμός 2 κλπ, τις συμβολίζουμε δε σαν $d_1, d_2, ..., d_m$ (από το αρχικό της λέξης decision: απόφαση).

1.5 Εξαντλητικός κατάλογος ενδεχομένων

Ο όρος **ενδεχόμενο** (event) αναφέρεται σ' ένα συμβάν που ή είναι γνωστό ότι έχει λάβει χώρα ή πρόκειται να λάβει χώρα. Ένα ενδεχόμενο για το οποίο έχουμε πληροφορία ότι συνέβη ή όχι καλείται ***βέβαιο*** ενδεχόμενο, αλλιώς ***αβέβαιο.*** Τα ενδεχόμενα καλούνται επίσης «***καταστάσεις της φύ-***

σης». Τα ενδεχόμενα είναι, γενικά, μία απαρίθμηση των πιθανών εναλλακτικών καταστάσεων του φυσικού φαινομένου που εξετάζεται. Όπως στην περίπτωση του καταλόγου των αποφάσεων, τα ενδεχόμενα πρέπει να εξαντλούν την πραγματικότητα και να είναι αλληλοαποκλειόμενα. Πρέπει δηλαδή ένα και μόνο ένα από αυτά να μπορεί να συμβεί. Υπάρχει και εδώ επίσης περιθώριο για εφευρετικότητα, αφού ο έμπειρος λήπτης αποφάσεων μπορεί να σκεφτεί κάποιον σχετικό παράγοντα που οι άλλοι έχουν ξεχάσει, και που μεταβάλλει τα πιθανά ενδεχόμενα. Η ικανότητα να κρίνεται τι είναι σχετικό και τι όχι είναι μία από τις αρετές του λήπτη αποφάσεων.

Το πλήθος των ενδεχομένων θα συμβολίζεται με n και τα ενδεχόμενα με θ_1, θ_2, ..., θ_n.

Παράδειγμα 1.2: Ένας καταστηματάρχης θέλει να αποφασίσει πόσα κομμάτια κάποιου προϊόντος να παραγγείλει. Έστω ότι το μέγιστο που χωράει το μαγαζί του είναι 12 και ότι την στιγμή αυτή δεν έχει κανένα κομμάτι. Έχει λοιπόν να επιλέξει μεταξύ 12 αλληλοαποκλειομένων και εξαντλητικών αποφάσεων, d_1, d_2, ..., d_{12}, όπου d_i σημαίνει την απόφαση να παραγγελθούν i κομμάτια.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πουλιούνται j κομμάτια, όπου $0<j\leq 13$. Είναι φανερό ότι το σύνολο των ενδεχομένων είναι θ_1, θ_2, ..., θ_{12}, όπου θ_j σημαίνει το ενδεχόμενο να πουληθούν j κομμάτια.

<u>Ανακεφαλαιώνοντας</u>: υπάρχει ένας κατάλογος αποφάσεων d_i χωρίς να ξέρουμε ποιο από τα θ_j θα συμβεί.

1.6 Ο ρόλος της αβεβαιότητας

Η επιλογή μιας απόφασης με βάση κάποιο κριτήριο, είναι κατ’ αρχήν εύκολη με την προϋπόθεση ότι ο λήπτης έχει πλήρη πληροφορία της κατάστασης. Ο καταστηματάρχης του Παραδείγματος 1.2, δεν θα είχε κανένα πρόβλημα, αν ήξερε πόσα κομμάτια θα πουλήσει. Η δυσκολία της επιλογής οφείλεται συνήθως στην αβεβαιότητα των ενδεχομένων. Γι’ αυτό τον λόγο το αντικείμενο του συγγράμματος αυτού ονομάζεται μερικές φορές ***λήψη αποφάσεων κάτω από αβεβαιότητα*.**

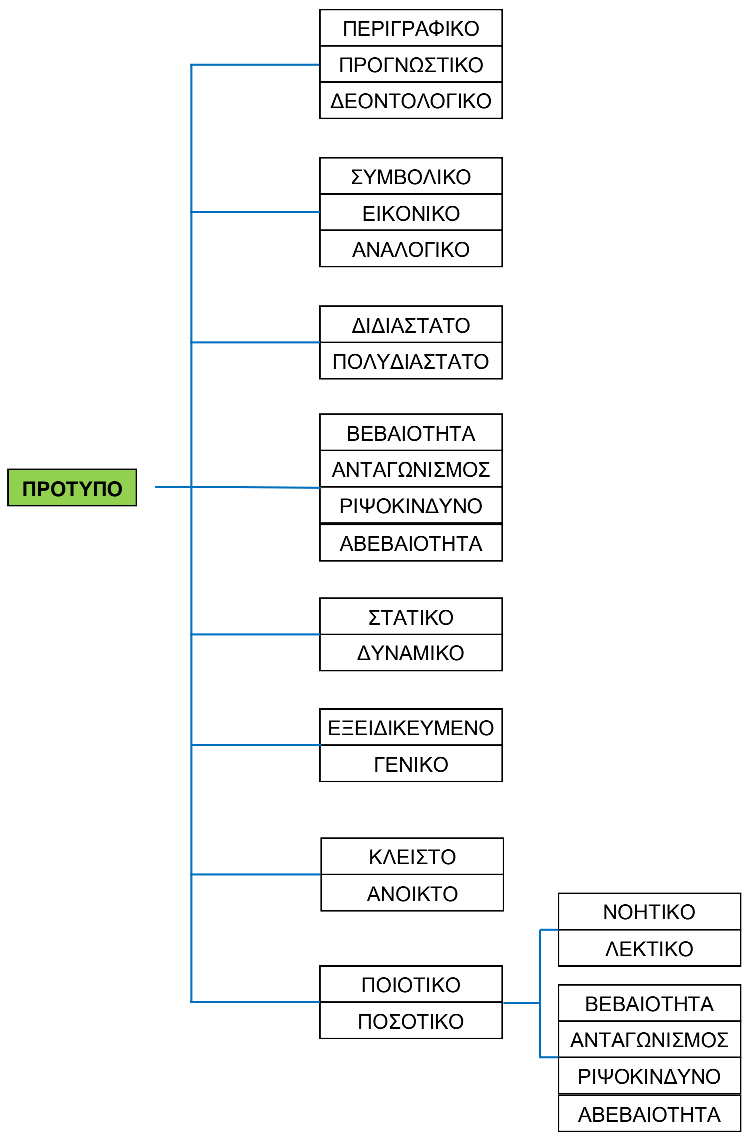
Υπάρχουν όμως περιπτώσεις όπου τα πάντα είναι γνωστά, και όμως η απόφαση είναι δύσκολη. Οι λόγοι τότε είναι συνήθως τεχνικοί. Το σκάκι είναι μία τέτοια περίπτωση. Οι νόμιμες κινήσεις μπορούν να απαριθμηθούν και οι πιθανές απαντήσεις του αντιπάλου μπορούν, θεωρητικά, να υπολογισθούν. Μία βέλτιστη στρατηγική του είδους αυτού οδηγεί σε νίκη, ήττα ή ισοπαλία. Οι αποφάσεις που οδηγούν στην νίκη θεωρούνται έτσι οι καλύτερες.

Ο λόγος για τον οποίο δεν ξέρουμε ποια είναι η καλύτερη απόφαση είναι ότι οι υπολογισμοί που χρειάζονται να γίνουν είναι πολυπλοκότεροι από τις δυνατότητες των γρηγορότερων σύγχρονων υπολογιστών.

Στο σύγγραμμα αυτό δεν θα ασχοληθούμε με τέτοιες τεχνικές δυσκολίες. Υποτίθεται ότι αν δεν υπάρχει αβεβαιότητα, τότε μπορούμε να πούμε ότι μία απόφαση από τον κατάλογο είναι η καλύτερη, ή ότι ορισμένες είναι το ίδιο καλές και όλες αυτές καλύτερες από τις υπόλοιπες. Συνεπάγεται λοιπόν ότι όλες οι αποφάσεις του καταλόγου μπορεί να διαταχθούν, από την καλύτερη ως την χειρότερη, με πιθανές ισοβαθμίες.

1.7 Ταξινόμηση προτύπων λήψης απόφασης

Πριν προχωρήσουμε στην λεπτομερή εξέταση του τρόπου λήψης αποφάσεων κάτω από συγκεκριμένες συνθήκες του περιβάλλοντος, είναι σκόπιμο να παρατεθεί μία ταξινόμηση των διαφόρων προτύπων [1]. Μπορούν να απαριθμηθούν οκτώ διαστάσεις ταξινόμησης που φαίνεται ότι περιγράφουν αρκετά καλά τα περισσότερα πρότυπα. Αυτές φαίνονται στο Σχήμα 1 και είναι οι: σκοπός, δομή, διάσταση, βαθμός βεβαιότητας, χρονική αναφορά, βαθμός γενικότητας, βαθμός επιρροής, βαθμός ποσοτικοποίησης.



***Σχήμα* 1**: διαστάσεις ταξινόμησης

Οι κατηγορίες αυτές αναλύονται ως εξής:

1.7.1 Σκοπός

Τα ***περιγραφικά πρότυπα*** απλά περιγράφουν ένα παρελθόν ή παρόν σύνολο δραστηριοτήτων ή συνθηκών χωρίς να προσπαθούν να προβλέψουν ή να προτείνουν. Παρέχουν μία αναπαράσταση της κατάστασης χωρίς συνταγές. Τα πρότυπα αυτά χρησιμοποιούνται για να ορισθεί καλύτερα μία δεδομένη κατάσταση, να αναγνωρισθούν περιοχές πιθανών αλλαγών και για να ερευνηθούν τα αποτελέσματα διαφόρων εναλλακτικών αποφάσεων. Παρέχουν δηλαδή ένα πλαίσιο που βοηθά τον λήπτη αποφάσεων στην επιλογή κάποιας στρατηγικής. Πρότυπα της κατηγορίας αυτής είναι οι χάρτες, οργανωτικά διαγράμματα, φωτογραφίες, χρηματοδοτικές καταστάσεις κ.λπ.

Τα ***προγνωστικά πρότυπα*** επισημαίνουν τις συνέπειες των διαφόρων στρατηγικών. Προβλέπουν το αποτέλεσμα των αποφάσεων, συσχετίζοντας ανεξάρτητες και εξαρτημένες μεταβλητές. Ούτε τα πρότυπα αυτά όμως παρέχουν πληροφορία για την ελκυστικότητα κάθε αποτελέσματος. Τυπικά προγνωστικά πρότυπα είναι οι ετήσιοι προϋπολογισμοί, δέντρα αποφάσεων, προγνωστικά αγοράς και η θεωρία αναμονής.

Τα ***δεοντολογικά πρότυπα*** επισημαίνουν τι πρέπει να γίνει για να επιτευχθεί ένας αντικειμενικός στόχος. Ο τύπος αυτός επιλέγει την καλύτερη απάντηση ή λύση από τις διαθέσιμες εναλλακτικές λύσεις. Όλες οι διαδικασίες βελτιστοποίησης είναι δεοντολογικές. Το μεγαλύτερο πρόβλημα στην χρήση του προτύπου αυτού είναι η επιλογή του κατάλληλου κριτηρίου της καλύτερης απόφασης. Τυπικά πρότυπα της κατηγορίας αυτής είναι: γραμμικός προγραμματισμός, ακέραιος προγραμματισμός, πρότυπα απογραφής κλπ.

1.7.2 Δομή

Τα πρότυπα μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με τη δομή τους σε: εικονικά, αναλογικά και συμβολικά.

- Τα ***εικονικά πρότυπα*** είναι φυσικά αντίγραφα και διατηρούν μερικές από τις φυσικές σχέσεις των πραγμάτων που αντιπροσωπεύουν. Είναι γενικά τα ευκολότερα να επινοηθούν και τα λιγότερο αφηρημένα. Τυπικά εικονικά πρότυπα είναι οι φωτογραφίες, μηχανολογικά προσχέδια, παιγνίδια κ.λπ.
- Τα ***αναλογικά πρότυπα*** χρησιμοποιούν τα χαρακτηριστικά ενός συστήματος για να παραστήσουν ορισμένα χαρακτηριστικά κάποιου άλλου. Τα πρότυπα αυτά μοιάζουν με το σύστημα που αντιπροσωπεύουν αλλά αφηρημένα. Τα αναλογικά πρότυπα επιτρέπουν να αναλύονται ευκολότερα πολύπλοκα μέρη του πραγματικού συστήματος υπό την προϋπόθεση ότι υπάρχει σωστή αντιστοιχία. Τυπικά αναλογικά πρότυπα είναι τα σχηματικά ηλεκτρολογικά διαγράμματα, διαγράμματα λογικής ροής, γραφήματα δικτύων κ.λπ.
- Τα ***συμβολικά πρότυπα*** χρησιμοποιούν διάφορα είδη συμβολισμών για να παραστήσουν τα χαρακτηριστικά του πραγματικού συστήματος. Τα πρότυπα αυτά δεν έχουν καμμία φυσική ομοιότητα με το εξεταζόμενο σύστημα. Επειδή τα περισσότερα προβλήματα οργάνωσης δεν είναι εύκολο να εξομοιωθούν με κάποια φυσική μορφή, τα συμβολικά πρότυπα είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμα στις περιπτώσεις αυτές. Είναι τα πιο γενικά, ευέλικτα και αφηρημένα-συχνά μαθηματικά. Τυπικά παραδείγματα της κατηγορίας αυτής είναι η προσομοίωση Monte Carlo, στατιστική δειγματοληψία, γραμμικός προγραμματισμός, ανάλυση νεκρού σημείου, θεωρία παιγνίων κλπ.

1.7.3 Διάσταση

Τα πρότυπα μπορούν να ταξινομηθούν ανάλογα με την διάσταση τους, δηλαδή τον αριθμό και είδος των μεταβλητών που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή τους.

- Τα ***διδιάστατα πρότυπα*** είναι τα απλούστερα και περιλαμβάνουν την ανάλυση παλινδρόμησης, προσχέδια, χάρτες κλπ.
- Τα ***πολυδιάστατα πρότυπα*** έχουν περισσότερες από δύο διαστάσεις και περιλαμβάνουν τριδιάστατα πρότυπα σε κλίμακα, πολλαπλή ανάλυση παλινδρόμησης, προσομοίωση και μελέτες πιλότους.

1.7.4 Βαθμός βεβαιότητας

Ο βαθμός βεβαιότητας αναφέρεται στην γνώση που κατέχει ο λήπτης αποφάσεων γύρω από τις φυσικές καταστάσεις που επηρεάζουν το σύστημα που αναλύεται. Με τον όρο φυσικές καταστάσεις εννοείται οι πλευρές αυτές του περιβάλλοντος, μέσα στο οποίο λειτουργεί το σύστημα, και στις οποίες ο λήπτης αποφάσεων έχει λίγο ή καθόλου επιρροή.

- Στα ***πρότυπα βεβαιότητας*** υπάρχει μόνο μία φυσική κατάσταση για κάθε στρατηγική. Στην ουσία η πιθανότητα με την οποία συμβαίνει η συγκεκριμένη κατάσταση είναι ένα (τέλεια γνώση). Ο λήπτης αποφάσεων απλά επιλέγει τη στρατηγική με το πλέον επιθυμητό αποτέλεσμα μέσω της απαρίθμησης όλων των στρατηγικών, της προοδευτικής βελτίωσης ή με την χρήση τεχνικών βελτιστοποίησης. Τυπικά πρότυπα βεβαιότητας είναι οι τεχνικές παρούσας αξίας, βασικά απογραφικά πρότυπα, οριακή ανάλυση, χρονοδιαγράμματα κλπ.

- Στα ***πρότυπα ανταγωνισμού*** οι φυσικές καταστάσεις είναι κάτω από τον έλεγχο ενός ανταγωνιστή ή αντιπάλου. Οι τεχνικές για την διαχείριση του ανταγωνισμού αποτελούν το αντικείμενο της θεωρίας παιγνίων. Ο ανταγωνισμός μπορεί να είναι μερικός ή ολικός και να εμπλέκει δύο ή περισσότερους παίκτες. Τυπικά παραδείγματα είναι οι αθλητικές συναντήσεις, ο πόλεμος, οι εργατικές διαπραγματεύσεις, οι διακανονισμοί κλπ.
- Στο ***ριψοκίνδυνο πρότυπο*** οι φυσικές καταστάσεις είναι γνωστές και μπορούν να περιγραφούν στοχαστικά. Ο λήπτης απόφασης επιλέγει την στρατηγική με την βέλτιστη απόδοση σύμφωνα με κάποιο κριτήριο προσδοκώμενου αποτελέσματος. Πρότυπα ριψοκίνδυνου είναι τα δένδρα απόφασης, οι στατιστικοί πίνακες ελέγχου, οι πίνακες των εμπειρογνωμόνων ασφαλειών κλπ.
- Στα ***πρότυπα αβεβαιότητας*** οι μελλοντικές συνθήκες και αντίστοιχες πιθανότητες δεν είναι γνωστές. Ο λήπτης αποφάσεων πρέπει να είναι ικανός να διαπιστώνει τις σχετικές φυσικές καταστάσεις. Οι διαδικασίες λήψης απόφασης απαιτούν επιλογή βασισμένη στην κρίση, την ωφέλεια ή το ριψοκίνδυνο μέσω υποκειμενικών πιθανοτήτων.

1.7.5 Χρονική αναφορά

Ανάλογα με την χρονική τους αναφορά, τα πρότυπα μπορεί να χωριστούν σε στατικά και δυναμικά. Η χρονική αναφορά αναφέρεται στην επίδραση του χρόνου πάνω στο πρότυπο.

- Στο ***στατικό πρότυπο*** ο χρόνος αγνοείται (καμμία σχέση δεν μεταβάλλεται με τον χρόνο). Με την μέθοδο αυτή ο αριθμός των μεταβλητών του προβλήματος ελαττώνεται κατά ένα. Τυπικοί αντιπρόσωποι της κατηγορίας αυτής είναι: οριακή ανάλυση, οργανογράμματα, θεωρία αναμονής.
- Το ***δυναμικό πρότυπο*** περιέχει σχέσεις που εξαρτώνται από τον χρόνο, και είναι έτσι ιδιαίτερα κατάλληλο για να απεικονίσει διαδικασίες που μεταβάλλονται με τον χρόνο. Σαν παραδείγματα των προτύπων αυτών μπορούν να αναφερθούν ο δυναμικός προγραμματισμός, κινούμενοι μέσοι όροι με εκθετικά βάρη, πρότυπα ανάπτυξης και τεχνικές πρόγνωσης.

1.7.6 Βαθμός γενικότητας

Ο βαθμός γενικότητας αναφέρεται στην ευρύτητα εφαρμογής του συγκεκριμένου προτύπου.

- Τα ***γενικά πρότυπα*** μπορεί να χρησιμοποιηθούν σε διαφορετικές κατηγορίες προβλημάτων απόφασης. Εάν το συγκεκριμένο πρόβλημα μπορεί να απεικονισθεί επαρκώς από ένα γενικό πρότυπο, τότε είναι συχνά οικονομικότερο και ταχύτερο να χρησιμοποιηθεί. Σε πολλές περιπτώσεις όμως τα γενικά πρότυπα δεν παρέχουν επαρκή απεικόνιση και τότε είναι δικαιολογημένη η περαιτέρω προσπάθεια για την κατασκευή ενός εξειδικευμένου προτύπου. Παραδείγματα του γενικού προτύπου είναι ο γραμμικός προγραμματισμός, στατιστικός έλεγχος ποιότητας και χρηματοοικονομικές εκθέσεις.
- Τα ***εξειδικευμένα πρότυπα*** μπορεί να εφαρμοσθούν μόνο σε ένα συγκεκριμένο πρόβλημα. Η προσομοίωση στον υπολογιστή είναι ένα παράδειγμα τέτοιου πρότυπου, αφού σχεδιάζεται για να προσομοιώσει ένα συγκεκριμένο σύστημα.

1.7.7 Βαθμός επιρροής περιβάλλοντος

Τα πρότυπα μπορεί να είναι κλειστού ή ανοικτού τύπου. Ο όρος αναφέρεται στον βαθμό επιρροής του εξωτερικού περιβάλλοντος πάνω στο πρότυπο.

- Ένα ***ανοικτό πρότυπο*** περιέχει μία ή περισσότερες εξωγενείς παραμέτρους. Η επίδραση των παραμέτρων αυτών είναι συνήθως έξω από τον έλεγχο του λήπτη αποφάσεων.
- Ένα ***κλειστό πρότυπο*** έχει μόνο ενδογενείς παραμέτρους οι οποίες είναι συνήθως ελεγχόμενες. Είναι δύσκολο να βρεθεί ένα σύστημα που είναι τελείως κλειστό. Είναι πιο χρήσιμο να ξεχωρίζουμε τα συστήματα ανάλογα με το βαθμό «κλεισίματος». Είναι επίσης εφικτό να απεικονίζουμε ένα πραγματικό σύστημα σαν κλειστό, όταν οι εξωγενείς επιδράσεις είναι αμελητέες. Τα πρότυπα εισόδου-εξόδου είναι ένα παράδειγμα ανοικτού προτύπου.

1.7.8 Βαθμός ποσοτικοποίησης

- Στα ***ποιοτικά πρότυπα*** αποφεύγεται η μαθηματική περιγραφή και η μέτρηση. Έτσι, τα πρότυπα αυτά είναι λιγότερο ακριβή και συνεπή από τα ποσοτικά. Είναι όμως συνήθως πιο ευέλικτα, πιο συμπαγή και αντικατοπτρίζουν καλύτερα την πραγματικότητα. Τα πρότυπα αυτά μπορεί να υποδιαιρεθούν σε νοητικά και λεκτικά. Τα πρώτα αναφέρονται συνήθως στο πρώτο επίπεδο αφαίρεσης του λήπτη αποφάσεων καθώς αυτός συλλαμβάνει κάποιο πρόβλημα ή κατάσταση. Τα λεκτικά πρότυπα ακολουθούν τα νοητικά και συνήθως τα μεταφέρουν προφορικά ή γραπτά. Τα πρότυπα αυτά χρησιμοποιούνται για την μετάδοση και καλυτέρευση των νοητικών προτύπων, αλλά είναι και αυτά αρκετά ανακριβή. Τα μνημόνια των διευθυντών είναι κλασσικό παράδειγμα της κατηγορίας αυτής.
- Στα ***ποσοτικά πρότυπα*** χρησιμοποιείται σχεδόν αποκλειστικά η μαθηματική γλώσσα. Οι αδυναμίες των προτύπων αυτών ξεπερνώνται σε μεγάλο βαθμό από την λογική των μαθηματικών. Τα ποσοτικά πρότυπα εξάγονται από τα ποιοτικά και βρίσκονται συνήθως στις φυσικές επιστήμες. Η αλματώδης ανάπτυξη των ποσοτικών προτύπων είχε σαν αποτέλεσμα την δημιουργία νέων περιοχών της επιστήμης της οργάνωσης όπως η επιχειρησιακή έρευνα, η ποσοτική ανάλυση και η επιστήμη διοίκησης. Οι αδυναμίες των ποσοτικών προτύπων προέρχονται από την ανεπάρκεια των μεθόδων μέτρησης, την φύση και πλήθος των μεταβλητών και την πολυπλοκότητα των σχέσεων που εξετάζονται. Τα πρότυπα αυτά μπορεί επίσης να υποδιαιρεθούν σε στατιστικά, βελτιστοποίησης, ευριστικά και προσομοίωσης.
    - Τα ***στατιστικά πρότυπα*** περιγράφουν δεδομένα ή συμπεραίνουν γι' αυτά. Τα δεδομένα αυτά προέρχονται από διαφορετικά φαινόμενα. Για την αποτελεσματικότητα των προτύπων αυτών, είναι απαραίτητο οι κατανομές πιθανότητας που χρησιμοποιούνται για την περιγραφή της συμπεριφοράς τους να είναι αρκετά ακριβείς.
    - Τα ***πρότυπα βελτιστοποίησης*** χρησιμοποιούν τεχνικές μεγιστοποίησης ή ελαχιστοποίησης κάποιου μέτρου χρησιμότητας για να φθάσουν στην πλέον επιθυμητή στρατηγική από ένα σύνολο εναλλακτικών λύσεων. Στην κατηγορία αυτή υπάγονται αναλυτικές μέθοδοι όπως η οριακή ανάλυση και αλγοριθμικές μέθοδοι όπως ο γραμμικός προγραμματισμός, ο ακέραιος προγραμματισμός κ.λπ.
    - Τα ***ευριστικά πρότυπα*** δεν εξασφαλίζουν βέλτιστες λύσεις αλλά χρησιμοποιούν κριτήρια που απλοποιούν την διαδικασία λήψης απόφασης και έχουν σαν αποτέλεσμα ευνοϊκές λύσεις. Τα ευριστικά πρότυπα δίνουν «πάνω-κάτω» λύσεις χρησιμοποιώντας κοινή λογική, παρατήρηση και ενδοσκόπηση. Τα πρότυπα αυτά δίνουν μία ανεκτή λύση

σε προβλήματα που είτε είναι άλυτα θεωρητικά είτε είναι αντιοικονομικό να λυθούν πρακτικά.

- Τα ***πρότυπα προσομοίωσης*** προσπαθούν να αναπαράγουν την ουσία της συμπεριφοράς ενός συστήματος στον χρόνο. Και τα πρότυπα αυτά στοχεύουν σε μία ανεκτή, παρά σε μία βέλτιστη λύση. Η προσομοίωση είναι πρακτικά χρήσιμη για πολύπλοκα συστήματα και ιδιαίτερα κατάλληλη για να δίνει απαντήσεις σε ερωτήματα του τύπου «τι θα συμβεί αν γίνει αυτή η μεταβολή στο σύστημα;»

2 ΛΗΨΗ ΑΠΟΦΑΣΕΩΝ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ

2.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε ορισμένες μεθόδους για την λήψη αποφάσεων κάτω από **αβεβαιότητα.** Με τον όρο αυτό εννοείται ότι υπάρχει πλήρη άγνοια της πιθανότητας να συμβεί κάποιο ενδεχόμενο. Ο όρος είναι λίγο αντιφατικός, και ορισμένοι τον χρησιμοποιούν και στις περιπτώσεις που οι πιθανότητες είναι γνωστές [2], αλλά υιοθετείται από ένα ευρύ φάσμα επιστημόνων της θεωρίας αποφάσεων. Σε κάθε περίπτωση πάντως, οι μέθοδοι που εφαρμόζονται όταν υπάρχει απόλυτη βεβαιότητα ως προς τα ενδεχόμενα - γραμμικός προγραμματισμός, θεωρία παιγνίων - κλπ, γενικά μπορούν να επεκταθούν στο περιβάλλον της αβεβαιότητας. Θεωρώντας λοιπόν ότι ο όρος αβεβαιότητα υπονοεί την άγνοια ή έλλειψη πιθανότητας, θα εξετάσουμε ορισμένα κριτήρια που έχουν προταθεί για την επιλογή μιας απόφασης από ένα σύνολο αλληλοαποκλειομένων αποφάσεων. Πρέπει να σημειωθεί ότι είναι δύσκολο να μιλήσει κανείς για την βέλτιστη απόφαση, αλλά πρέπει να έχουμε υπόψη μας ότι επιλέγουμε την βέλτιστη απόφαση με βάση κάποιο συγκεκριμένο κριτήριο.

Στην κατάσταση της αβεβαιότητας, ο λήπτης αποφάσεων μπορεί να έχει πλήρη πληροφορία γύρω από το δεσμευμένο αποτέλεσμα των διαφορετικών ενεργειών κάτω από τα πιθανά ενδεχόμενα.

Είναι αρχικά βολικό να τυποποιήσουμε το πρόβλημα της απόφασης με βάση τον ***πίνακα αποπληρωμής*** (payoff matrix). Αν d_1, d_2, d_3 είναι οι εναλλακτικές αποφάσεις και θ_1, θ_2, θ_3 είναι τα πιθανά ενδεχόμενα που θα επηρεάσουν τις αποπληρωμές u_{ij} (αν αποφασίσουμε την d_i και συμβεί το θ_j) τότε ο πίνακας θα είναι όπως ο Πίνακας 1.

***Πίνακας* 1:** πρότυπος πίνακας αποπληρωμής

	θ_1	θ_2	θ_3
d_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}
d_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}
d_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}

Παράδειγμα 2.1: το πρόβλημα του εφημεριδοπώλη

Ένα μικρό μαγαζί πουλάει μία κυριακάτικη εφημερίδα. Πληρώνει 3 € για κάθε φύλλο και το πουλάει 4 € Τα φύλλα που απομένουν δεν έχουν αξία. Έτσι αν,

d_i : παραγγελμένα φύλλα i

θ_j : πουλημένα φύλλα j

τότε,

$$u_{ij} = \begin{cases} 4\theta_j - 3d_i \text{ αν } i > j \\ 4d_i - 3d_i = d_i \text{ αν } j > i \end{cases} \tag{2.1}$$

Έτσι, με βάση την (2.1) ο πίνακας αποπληρωμής διαμορφώνεται όπως στον Πίνακα 2. Αν ο εφημεριδοπώλης παραγγείλει 18 φύλλα και πουλήσει 16, η αποπληρωμή του είναι 10 (στοιχείο (3, 1) του πίνακα). Αν η ζήτηση είναι ίση ή μεγαλύτερη των 18, τα πουλάει όλα και λαμβάνει 18.

***Πίνακας* 2**: πίνακας αποπληρωμής για τον εφημεριδοπώλη

d_i/θ_j	16	17	18	19	20	21	22	23	24
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
17	13	17	17	17	17	17	17	17	17
18	10	14	18	18	18	18	18	18	18
19	7	11	15	19	19	19	19	19	19
20	4	8	12	16	20	20	20	20	20
21	1	5	9	13	17	21	21	21	21
22	-2	2	6	10	14	18	22	22	22
23	-5	-1	3	7	11	15	19	23	23
24	-8	-4	0	4	8	12	16	20	24

Προφανώς η μέγιστη αποπληρωμή συμβαίνει όταν παραγγείλει 24 και τα πουλήσει όλα. Στην περίπτωση αυτή όμως, δηλαδή αν d=24, διατρέχει τον κίνδυνο να έχει την μικρότερη αποπληρωμή, −8 (δηλαδή ζημιά), αν ζητηθούν μόνο 16. Ο κίνδυνος αυτός, ίσως είναι πολύ μεγάλος συγκρινόμενος με την σίγουρη αποπληρωμή των 160, που λαμβάνει αν παραγγείλει μόνο 16.

Παρατήρηση: η επιλογή των αριθμών 16 και 24 είναι αυθαίρετη και όπως αναφέρθηκε στο πρώτο κεφάλαιο, θα έπρεπε κανονικά να θεωρούσαμε σαν ελάχιστο το 1 και μέγιστο την χωρητικότητα του μαγαζιού. Τα κριτήρια όμως που ακολουθούν έχουν παρόμοια εφαρμογή και στις δύο περιπτώσεις.

Για τη λήψη κάποιας απόφασης στο παραπάνω πρόβλημα έχουν προταθεί διάφορα κριτήρια, από τα οποία μερικά παρουσιάζονται στη συνέχεια.

2.2 Κριτήρια λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα

(α) Maximin

Το κριτήριο αυτό είναι αντιριψοκίνδυνο. Για κάθε απόφαση, d_i, βρίσκεται το χειρότερο αποτέλεσμα u_{ij}^*. Στη συνέχεια επιλέγεται η απόφαση i που δίνει το μέγιστο από τα χειρότερα u_{ij}^*. Με άλλα λόγια το κριτήριο maximin μεγιστοποιεί την ελάχιστη αποπληρωμή για κάθε απόφαση. Με βάση το κριτήριο αυτό, αποφασίζουμε d=16 για το Παράδειγμα 2.1.

(β) Maximax

Το κριτήριο αυτό είναι κατ' εξοχήν ριψοκίνδυνο αφού ο λήπτης απόφασης ενδιαφέρεται μόνο για το καλύτερο που μπορεί να συμβεί. Για κάθε απόφαση, βρίσκεται το καλύτερο αποτέλεσμα, u_{ij}^*. Στη συνέχεια επιλέγεται η απόφαση i που έχει το μέγιστο u_{ij}^*. Το κριτήριο αυτό λοιπόν, μεγιστοποιεί την μέγιστη αποπληρωμή για κάθε αποτέλεσμα και οδηγεί στην d=24 για το Παράδειγμα 2.1.

(γ) Hurwicz

Τα δύο προηγούμενα κριτήρια είναι εκ διαμέτρου αντίθετα, αφού το ένα επικεντρώνεται στο χειρότερο που μπορεί να συμβεί, και το άλλο στο καλύτερο. Σε μία προσπάθεια να εξισορροπηθούν οι δύο αυτές τάσεις, ο Hurwicz πρότεινε την χρήση ενός δείκτη αισιοδοξίας a ($0 \leq a \leq 1$).

Έτσι, για κάθε απόφαση d_i, υπολογίζεται η τιμή Hurwicz από την σχέση,

$$H(i) = a \max_j \{u_{ij}\} + (1-a) \min_j \{u_{ij}\}$$

και η απόφαση i που μεγιστοποιεί την $H(i)$ επιλέγεται σαν η καλύτερη. Η χρησιμότητα της μεθόδου αυτής εξαρτάται από την σωστή επιλογή του δείκτη αισιοδοξίας από τον λήπτη απόφασης. Προφανώς αν α=0, το κριτήριο Hurwicz είναι το κριτήριο maximin (πλήρης απαισιοδοξία), ενώ αν α=1 το κριτήριο Hurwicz ισοδυναμεί με το κριτήριο maximax (πλήρης αισιοδοξία). Η πρακτική χρησιμότητα του κριτηρίου αυτού είναι αμφισβητήσιμη.

(δ) Minimax του διαφυγόντος κέρδους

Η βασική ιδέα του κριτηρίου αυτού, που καλείται και κριτήριο Savage, είναι η ελαχιστοποίηση του διαφυγόντος κέρδους. Τα βήματα για την εκτίμηση της βέλτιστης απόφασης σύμφωνα με το κριτήριο αυτό είναι τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε απόφαση d_i και ενδεχόμενο θ_j υπολογίζουμε τη διαφορά της αποπληρωμής u_{ij} του Πίνακα 2 με την αποπληρωμή u_{i^*j} που θα είχαμε αν παίρναμε την βέλτιστη απόφαση για το ενδεχόμενο θ_j. Τις διαφορές αυτές, r_{ij}, τοποθετούμε σε νέο πίνακα που καλείται ***πίνακας διαφυγόντος κέρδους*** (opportunity loss table). Τα r_{ij} δίνονται από την σχέση:

$$r_{ij} = u_{ij} - \max_i \{u_{ij}\}$$

(ii) Για κάθε απόφαση d_i βρίσκουμε το μέγιστο r_{ij}^*, και στη συνέχεια επιλέγουμε την απόφαση που ελαχιστοποιεί τα r_{ij}^*.

Ο πίνακας διαφυγόντος κέρδους για το Παράδειγμα 2.1 φαίνεται στον Πίνακα 3.

Πίνακας **3**: πίνακας διαφυγόντος κέρδους για τον εφημεριδοπώλη

d_i/θ_j	16	17	18	19	20	21	22	23	24
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8
17	3	0	1	2	3	4	5	6	7
18	6	3	0	1	2	3	4	5	6
19	9	6	3	0	1	2	3	4	5
20	12	9	6	3	0	1	2	3	4
21	15	12	9	6	3	0	1	2	3
22	18	15	12	9	6	3	0	1	2
23	21	18	15	12	9	6	3	0	1
24	24	21	18	15	12	9	6	3	0

Όπως φαίνεται και από τον Πίνακα 3, για d=16, r_{ij}^*=8, ενώ για d=17, r_{ij}^*=7. Προφανώς η d=18 έχει το μικρότερο r_{ij}^*=6, δηλαδή το μικρότερο διαφυγόν κέρδος και επομένως σύμφωνα με αυτό το κριτήριο επιλέγεται σαν η βέλτιστη απόφαση.

Το κριτήριο του διαφυγόντος κέρδους είναι συχνά ιδιαίτερα ελκυστικό. Πολλοί οργανισμοί επιλέγουν να βραβεύουν τους υπαλλήλους τους εκ των υστέρων. Τώρα, το αν είναι προς το συμφέρον των οργανισμών, οι υπάλληλοί τους να λειτουργούν με βάση αυτό το κριτήριο, είναι θέμα προς συζήτηση.

(ε) Κριτήριο Laplace

Με το κριτήριο Laplace προτείνεται το εξής σκεπτικό: εφ' όσον υπάρχει άγνοια ως προς την πιθανότητα των ενδεχομένων, φαίνεται λογικό να θεωρήσουμε ότι τα ενδεχόμενα έχουν ίση πιθανότητα να συμβούν. Στη συνέχεια μπορούμε να επιλέξουμε την απόφαση που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη αποπληρωμή, δηλαδή,

$$d = \max_j \sum_i u_{i,j}$$

Με βάση το κριτήριο αυτό η βέλτιστη απόφαση είναι η d=18.

<u>Παρατηρήσεις:</u> με τόσα πολλά κριτήρια που προτείνουν βέλτιστες αποφάσεις, ο λήπτης απόφασης αντιμετωπίζει το πρόβλημα επιλογής του βέλτιστου κριτηρίου. Για την επιλογή αυτή ο λήπτης πρέπει να καταφύγει σε βασικές αρχές του ορθολογισμού. Δυστυχώς, ακόμη και στο επίπεδο αυτό, οι φιλοσοφικές θεωρίες της λογικής δεν παρέχουν ένα μοναδικό πλαίσιο ορθολογισμού. Ο Rescher [3] κάνει μία κριτική εκτίμηση της σύγχρονης σκέψης στο θέμα αυτό και επισημαίνει τα βασικά σημεία των αντιρρήσεων. Είναι φανερό ότι αν και δεν υπάρχουν ξεκάθαρες αρχές ανάλυσης και πίστης που να αποδεικνύονται **ικανές** για την εξασφάλιση του ορθολογισμού, υπάρχουν αρχές που είναι **αναγκαίες.** Μία από αυτές είναι η **αντιστοιχία,** που λέει απλά ότι οποιαδήποτε πίστη που έχει ένα άτομο πρέπει να «αντιστοιχεί» σε αδιάσειστα γεγονότα. Μία άλλη αρχή είναι η της **συνοχής.** Η αρχή αυτή θα αναλυθεί περισσότερο στη συνέχεια, αφού αποτελεί και την κεντρική αρχή των θεωριών που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.2. Μία επιχείρηση θέλει ν' αποφασίσει τι μεγέθους εργοστάσιο να ανεγείρει για την παραγωγή ενός νέου προϊόντος. Υπάρχουν τρεις επιλογές: μικρό (d_1), μεγάλο (d_2) και πολύ μεγάλο (d_3). Το βέλτιστο μέγεθος εξαρτάται από την ζήτηση: χαμηλή (θ_1), μεσαία (θ_2), υψηλή (θ_3).

Ο πίνακας αποπληρωμής του προβλήματος φαίνεται στον Πίνακα 4. Οι μονάδες είναι ενδεικτικές κάποιας χρηματικής κλίμακας.

***Πίνακας* 4**: πίνακας αποπληρωμής για το Παράδειγμα 2.2

d_i/θ_j	1	2	3
1	80	−8	0
2	−10	64	12
3	−15	12	66

Με βάση τα προαναφερθέντα κριτήρια οι βέλτιστες αποφάσεις είναι:

<u>(α) maximin</u>

Σύμφωνα με το κριτήριο αυτό που μας προτρέπει να επιλέξουμε την «καλύτερη από τις χειρότερες» απόφαση, η βέλτιστη απόφαση είναι η d_1 ($-8 = \max\{-8, -10, -16\}$).

<u>(β) maximax</u>

Σύμφωνα με το υπεραισιόδοξο αυτό κριτήριο, με το οποίο επιλέγουμε την «καλύτερη των καλυτέρων», η απόφαση d_3 ($66 = \max\{50, 64, 66\}$) προτιμάται.

<u>(γ) Hurwicz</u>

Ας υποθέσουμε ότι ο λήπτης απόφασης του παραδείγματος, επιλέγει την τιμή 0,7 σαν συντελεστή αισιοδοξίας, τότε:

$$H(1)=0,7\times50-0,3\times8=32,6$$
$$H(2)=0,7\times64-0,3\times10=41,8$$
$$H(3)=0,7\times66-0,3\times15=41,7$$

Η d_2 επιλέγεται με μικρή διαφορά από την d_3.

<u>(δ) Minimax διαφυγόντος κέρδους</u>

Όπως είπα και προηγούμενα, ο λήπτης απόφασης θα προσπαθήσει εδώ να ελαχιστοποιήσει την απώλεια που πιθανόν να υποστεί. Ο πίνακας διαφυγόντος κέρδους του Παραδείγματος 2.2 φαίνεται στον Πίνακα 5.

***Πίνακας* 5**: πίνακας διαφυγόντος κέρδους για το Παράδειγμα 2.2

d_i/θ_j	1	2	3
1	0	72	66
2	60	0	54
3	75	52	0

Έτσι, αφού min{72, 60, 75}=60, η d_2 επιλέγεται σύμφωνα μ' αυτό το κριτήριο.

(ε) Laplace

Θεωρώντας ότι κάθε ενδεχόμενο έχει ίση πιθανότητα (1/3), να συμβεί, η προσδοκώμενη αποπληρωμή (Π.Α.) για κάθε απόφαση, είναι:

Π.Α. $d_1=1/3\times(50-8)=14$
Π.Α. $d_2=1/3\times(-10+64+12)=\underline{\mathbf{22}}$
Π.Α. $d_3=1/3\times(-15+12+66)=21$

Η απόφαση d_2 που επιτυγχάνει την μέγιστη προσδοκώμενη αποπληρωμή, επιλέγεται.

3 ΜΕΤΡΟ ΤΗΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑΣ

3.1 Εισαγωγή

Στο προηγούμενο κεφάλαιο παρέθεσα μερικές μεθόδους για την λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες αβεβαιότητας ή ακριβέστερα άγνοιας της πιθανότητας των ενδεχομένων.

Στη συνέχεια θα περιγράψω ένα πλαίσιο για τη λήψη αποφάσεων κάτω από συνθήκες γνώσης της πιθανότητας των ενδεχομένων.

Αν και τα ενδεχόμενα είναι γενικά αβέβαια, με την έννοια ότι δεν είναι γνωστό αν θα συμβούν ή όχι, μερικά ενδεχόμενα είναι πιο πιθανά από άλλα. Επειδή ο ευκολότερος τρόπος της διάταξης πραγμάτων είναι μέσω αριθμών, είναι φυσικό να χρησιμοποιήσουμε αριθμούς για την διάταξη των αβέβαιων ενδεχομένων. Ειδικότερα, ο στόχος μας είναι να συσχετίσουμε με κάθε αβέβαιο ενδεχόμενο έναν αριθμό που να ανταποκρίνεται σ' αυτή την αβεβαιότητα. Οι αριθμοί αυτοί θα πρέπει να κανονιστούν έτσι, ώστε όσο μεγαλύτερος είναι ο αριθμός, τόσο πιθανότερο να είναι το ενδεχόμενο. Πολλοί, ίσως εκφράσουν αμέσως αντιρρήσεις ως προς την δυνατότητα μέτρησης της αβεβαιότητας κάθε αβέβαιου ενδεχομένου. Μερικά από αυτά είναι τόσο πολύπλοκα και εξαρτώμενα από συναισθηματικά στοιχεία, που φαίνεται παράλογο να αναχθούν τα ενδεχόμενα αυτά σε έναν αριθμό. Σε απάντηση, ο επιστήμονας μπορεί να αντιπαραθέσει ότι η μέτρηση με αριθμούς έχει αποδειχθεί πολύ χρήσιμο εργαλείο σε άλλους τομείς, ώστε να δικαιολογείται η προσπάθεια επέκτασης της μεθόδου στην αβέβαιη φύση. Εξάλλου, αυτό που κύρια ενδιαφέρει είναι η φιλοσοφία της μεθόδου, και λιγότερο ο τρόπος μέτρησης.

3.2 Στατιστικά και μη στατιστικά γεγονότα

Κατ' αρχάς θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι ορισμένα αβέβαια ενδεχόμενα περιγράφονται ήδη αριθμητικά. Για παράδειγμα, μπορεί να αναφερθούν οι ιπποδρομίες. Η φράση, «το τάδε άλογο παίζεται 5 προς 2», εκφράζει την αβεβαιότητα της νίκης του συγκεκριμένου αλόγου στην συγκεκριμένη ιπποδρομία. Άλλα τυχερά παιχνίδια, όπως τα ζάρια ή τα χαρτιά, συνοδεύονται από αριθμητικές ενδείξεις σχετικών γεγονότων: η πιθανότητα να έλθει έξι είναι 1/6 ενώ η πιθανότητα να πέσει άσσος 1/13.

Υπάρχουν όμως και άλλοι τρόποι μέτρησης της αβεβαιότητας των ενδεχομένων. Οι δημογράφοι τηρούν στατιστικά στοιχεία για το μέγεθος και την ηλικία των πληθυσμών, στοιχεία τα οποία χρησιμοποιούν με τη σειρά τους οι εμπειρογνώμονες ασφαλιστικών εταιρειών για να υπολογίσουν τον μέσο όρο ζωής. Η ημερομηνία θανάτου κάποιου πολίτη είναι αβέβαιη, αλλά ρίχνοντας μια ματιά στους πίνακες των εμπειρογνωμόνων, μπορεί να μάθει την προσδοκώμενη διάρκεια ζωής της ομάδας πληθυσμού στην οποία ανήκει: άνδρας, Έλληνας, 50 ετών. Τα στοιχεία αυτά λαμβάνονται πολύ σοβαρά υπόψη από τις ασφαλιστικές εταιρείες, που ουσιαστικά στοιχηματίζουν αν θα πεθάνουμε ή όχι, αν και δεν χρησιμοποιούν αυτήν ακριβώς την γλώσσα. Οι όροι της ασφάλειας, τα ασφάλιστρα, η πληρωμή όταν πεθάνουμε κλπ., εξαρτώνται από τα στοιχεία αυτά.

Η ασφάλεια όμως δεν αναφέρεται μόνο στη ζωή, αλλά αγκαλιάζει πολλές πλευρές της ανθρώπινης δραστηριότητας. Έχει ακόμη ειπωθεί ότι κάποιος μπορεί να ασφαλισθεί για οτιδήποτε. Όλη η ασφαλιστική δραστηριότητα συνδέεται με αβέβαια ενδεχόμενα, και η συσχέτιση των ενδεχομένων αυτών με κάποιο ασφάλιστρο είναι μία μέτρηση της αβεβαιότητάς τους.

Έχει γίνει λοιπόν φανερό ότι μερικών αβέβαιων ενδεχομένων μπορεί να μετρηθεί η αβεβαιότητα. Είναι δυνατόν όμως να εκτιμηθεί αριθμητικά η αβεβαιότητα όλων των αβέβαιων ενδεχομένων; Μία δυνατή απάντηση στην ερώτηση αυτή, είναι ότι ορισμένα αβέβαια γεγονότα μπορεί να μετρηθούν, ενώ ορισμένα όχι. Στην πρώτη κατηγορία ανήκουν για παράδειγμα, τα τυχερά παιγνίδια, στην δεύτερη, ενδεχόμενα όπως η συγγραφή των έργων που αποδίδονται στον Σαίξπηρ, από τον ίδιο. Η διαφορά των δύο αυτών κατηγοριών έγκειται στο γεγονός ότι η πρώτη μπορεί να επαναληφθεί άπειρες φορές, ενώ η δεύτερη όχι. Υπάρχει κάποιο στοιχείο επανάληψης και στον ασφαλιστή ή στο γραφείο στοιχημάτων - όχι όμως στον ασφαλιζόμενο ή σ' αυτόν που στοιχηματίζει. Μπορούμε λοιπόν να διακρίνουμε τα ενδεχόμενα σε ***στατιστικά*** και ***μη στατιστικά***. Στατιστικά θεωρούμε τα ενδεχόμενα που είναι δυνατόν να επαναληφθούν κάτω από τις ίδιες, ουσιαστικά, συνθήκες. Αντίθετα, μη στατιστικά θεωρούμε τα ενδεχόμενα που είναι μοναδικά. Η προσέγγιση αυτή, αν και φαινομενικά λογική, έχει μερικά προβλήματα:

α) Μετά από προσεκτικότερη εξέταση, γίνεται αρκετά δύσκολο να αποφασιστεί αν ένα ενδεχόμενο είναι στατιστικό ή όχι. Για παράδειγμα, ο αποκλεισμός ενός δρόμου από χιονοπτώσεις εξαρτάται από την χιονόπτωση που είναι στατιστικό ενδεχόμενο, αλλά και από την ικανότητα του αρμόδιου φορέα να τον καθαρίσει.

β) Υπάρχουν ορισμένα γεγονότα, που αν και μελλοντικά, είναι αδύνατο να επαναληφθούν. Ένα από αυτά, το σπουδαιότερο, είναι το ενδεχόμενο ενός πυρηνικού πολέμου πριν το έτος 2000.

Η ουσία της διαφοράς βρίσκεται ανάμεσα στην μακρόχρονη συμπεριφορά μιας επαναλαμβανόμενης κατάστασης και στην μοναδική, συγκεκριμένη πραγματοποίηση της. Ο ιδιοκτήτης του καζίνο ενδιαφέρεται για την μακρόχρονη συμπεριφορά της επιχείρησης του, ενώ ο παίκτης ενδιαφέρεται για την μοναδική φορά που θα παίξει. Είναι χρήσιμο να διαφοροποιήσουμε αυτές τις δύο περιπτώσεις. Για τον σκοπό αυτό μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λέξη ***τυχαιότητα*** για την μακρόχρονη συμπεριφορά και ***πιθανότητα*** για την μοναδική. Υιοθετώντας τη πιθανότητα, που βασίζεται στην μοναδική πραγματοποίηση του ενδεχομένου, ξεπερνώνται όλες οι προαναφερθείσες δυσκολίες, αφού είναι δυνατή η εφαρμογή της σε όλες τις περιστάσεις. Επιπλέον, είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για την θεωρία αποφάσεων, αφού ο λήπτης αποφάσεων ενδιαφέρεται σχεδόν όλες τις φορές, για το αποτέλεσμα μιας και μοναδικής απόφασης, και όχι για το αποτέλεσμα της επανάληψης της.

Συνοψίζοντας τη μέχρι τώρα επιχειρηματολογία: στόχος μας είναι η μέτρηση της αβεβαιότητας των ενδεχομένων. Μερικά ενδεχόμενα είναι δυνατόν να μετρηθούν στατιστικά αλλά η πληροφορία αυτή είτε δεν είναι διαθέσιμη είτε δεν είναι σχετική. Για τον λόγο αυτό θα αγνοήσουμε την στατιστική προσέγγιση και θα θεωρήσουμε μία εναλλακτική άποψη.

3.3 Μέτρο αβεβαιότητας

Κάθε μέτρηση επιτυγχάνεται με την αναφορά σε κάποιο σταθερό πρότυπο. Το μήκος, σήμερα, μετράται ως προς το μήκος κύματος του φωτός του sodium. Ο χρόνος, ως προς την ταλάντωση ενός κρυστάλλου. Φαίνεται λοιπόν λογικό να προσπαθήσουμε να μετρήσουμε την αβεβαιότητα με την ίδια τεχνική. Για την κατανόηση του προτεινόμενου σταθερού προτύπου, ας θεωρήσουμε ένα δοχείο, σαν και αυτό που βλέπουμε στις κληρώσεις των λαχείων, του οποίου δεν μπορούμε μεν να δούμε το περιεχόμενο μπορούμε όμως να το αδειάσουμε. Το περιεχόμενο είναι 100 μπάλλες, όσον το δυνατόν όμοιες, με την διαφορά ότι άλλες είναι άσπρες και άλλες μαύρες. Βγάζουμε μία μπάλλα από το δοχείο, και θεωρούμε το αβέβαιο ενδεχόμενο,

$$B = \{\text{η μπάλλα είναι μαύρη}\}$$

Η αβεβαιότητα εξαρτάται από το πόσες μαύρες μπάλλες υπάρχουν στο δοχείο. Αν b μπάλλες είναι μαύρες, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου B είναι:

$$p(B) = \frac{b}{100} = b\%$$

Επομένως, αν b=50, η πιθανότητα είναι 0,5.

Αυτό είναι το σταθερό πρότυπο με το οποίο θα συγκρίνουμε όλα τα αβέβαια γεγονότα.

Ας θεωρήσουμε τώρα κάποιο αβέβαιο ενδεχόμενο E, έστω ότι αύριο θα βρέξει. Επιπλέον ας υποθέσουμε ότι υπάρχει κάποιο δώρο αν το ενδεχόμενο συμβεί και κανένα δώρο αν δεν συμβεί. Στη συνέχεια, ας υποθέσουμε ότι προσφέρεται το ίδιο δώρο αν βγει μαύρη μπάλλα από το δοχείο. Υπάρχουν λοιπόν δύο τυχερά παιγνίδια. Το ένα εξαρτάται από το αβέβαιο ενδεχόμενο E, το άλλο από το B. Το ερώτημα είναι, αν κάποιος μπορεί να παίξει το παιγνίδι αυτό μόνο μία φορά, ποιο πρέπει να επιλέξει; Προφανώς η απόφαση εξαρτάται από το πλήθος, b, των μαύρων μπαλλών. Αν δεν υπάρχει καμμία, τότε προτιμότερο είναι να ποντάρουμε στην βροχή. Αν όλες είναι μαύρες, ποντάρουμε στο δοχείο. Προφανώς λοιπόν υπάρχει κάποιος αριθμός, b, για τον οποίο η επιλογή θα είναι αδιάφορη. Δηλαδή, αν υπάρχουν $b+1$ μπάλλες το ποντάρισμα στο δοχείο θα είναι προτιμότερο, ενώ αν υπάρχουν $b-1$ μπάλλες, καλύτερα να ποντάρουμε στη βροχή. Το ενδεχόμενο B έχει έτσι πιθανότητα $b\%$, και αφού και τα δύο τυχερά παιγνίδια είναι εξίσου προτιμητέα, λέμε ότι η πιθανότητα του ενδεχομένου E είναι επίσης $b\%$.

Γίνεται έτσι φανερό από τα παραπάνω ότι η πιθανότητα που υπολογίζεται με βάση την αναφορά σε κάποιο σταθερό πρότυπο εξαρτάται από το άτομο που κάνει την αναφορά. Λέμε ότι η πιθανότητα αυτή είναι ***υποκειμενική***. Δεν υπάρχει κανένας λόγος να υποθέσουμε ότι δύο διαφορετικοί άνθρωποι που θα αντιμετώπιζαν το προηγούμενο δίλημμα, θα έπαιρναν την ίδια απόφαση, δηλαδή θα υπολόγιζαν το ίδιο b. Επεκτείνοντας το σκεπτικό αυτό, μπορούμε να πούμε ότι η έννοια της υποκειμενικής πιθανότητας, υπονοεί ότι η πιθανότητα δεν υπάρχει έξω από το μυαλό ενός ανθρώπου: εκφράζει την σχέση μεταξύ του συγκεκριμένου ανθρώπου και του κόσμου όπως τον αντιλαμβάνεται. Αν αυτό το γεγονός είναι υπέρ ή κατά της συγκεκριμένης αντίληψης, είναι αντικείμενο της φιλοσοφίας και σαν τέτοιο το αντιπαρερχόμαστε.

3.4 Συνοχή

Η διαφορά του υπολογισμού της πιθανότητας ανάμεσα σε δύο παρατηρητές ή ακόμα και από έναν παρατηρητή, οφείλεται κυρίως, στην διαφορά πληροφορίας. Ας συμβολίσουμε την διαθέσιμη πληροφορία με H. Τότε, η πιθανότητα του ενδεχομένου E, βασισμένη στην πληροφορία H, γράφεται:

$$p(E|H)$$

Κατά τη διατύπωση του σταθερού προτύπου της πιθανότητας, έχει γίνει μία σιωπηρή υπόθεση: ότι κάθε ενδεχόμενο μπορεί να συγκριθεί με το ενδεχόμενο B, και ότι η σύγκριση αυτή μπορεί να γίνει με συνοχή. Με τον όρο ***συνοχή*** εννοείται ο κανόνας σύμφωνα με τον οποίο:

1) αν E_1 είναι πιθανότερο του E_2 και
2) αν E_2 είναι πιθανότερο του E_3 τότε,
3) E_1 είναι πιθανότερο του E_3

για οποιαδήποτε ενδεχόμενα E_1, E_2, E_3.

Ο κανόνας αυτός μπορεί να φαίνεται τετριμμένος και προφανής, αποτελεί όμως το υπόβαθρο πάνω στο οποίο στηρίζεται όλη η ανάλυση της λήψης αποφάσεων. Ο κανόνας αυτός δεν ασχολείται με το αν οι δηλώσεις (1), (2), (3) είναι σωστές η καθεμία ξεχωριστά, αλλά αν είναι σωστές σαν σύνολο, δηλαδή αν έχουν συνοχή. Στη θεωρία που ακολουθεί, είναι ακριβώς η σχέση μεταξύ των ενδεχομένων και των αποφάσεων που ενδιαφέρει, και όχι αυτά καθ' εαυτά τα ενδεχόμενα και οι αποφάσεις.

Η προσέγγιση αυτή είναι ταυτόχρονα περιοριστική και αποδεσμευτική. Αποδεσμευτική ως προς το ότι επιτρέπει μεγάλο φάσμα επιλογών, περιοριστική ως προς τον περιορισμό της συνοχής. Πολλές αποφάσεις είναι λάθος ακριβώς επειδή αντιβαίνουν τον κανόνα της συνοχής.

3.5 Βασικοί νόμοι πιθανοτήτων

Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι να καταδείξει ότι ανεξάρτητα από την μέθοδο υπολογισμού της, η πιθανότητα υπακούει σε ορισμένους κανόνες. Οι κανόνες αυτοί είναι πολύ βασικοί για την χρήση της πιθανότητας, και πηγάζουν κατευθείαν από τις ιδέες που έχουν συζητηθεί μέχρι τώρα.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ορίσαμε ως $p\left(E \mid H\right)$ την πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο *E*, σύμφωνα με την κρίση κάποιου παρατηρητή που έχει διαθέσιμη την πληροφορία *H*. Ο πρώτος κανόνας είναι ο κανόνας κυρτότητας.

3.5.1 Κανόνας κυρτότητας

$$0 \leq p\left(E \mid H\right) \leq 1$$

Ο κανόνας αυτός είναι αποτέλεσμα του τρόπου υπολογισμού της πιθανότητας αφού η τιμή της είναι το ποσοστό των μαύρων μπαλλών, που είναι αναγκαστικά μεταξύ 0 και 1. Ο κανόνας αυτός είναι κατά βάση, συνθήκη.

3.5.2 Κανόνας πρόσθεσης

Αν E_1, E_2 είναι δύο αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα, τότε με πληροφορία *H*,

$$p\left(E_1 \text{ ή } E_2 \mid H\right) = p\left(E_1 \mid H\right) + p\left(E_2 \mid H\right) \tag{3.1}$$

Ο κανόνας της πρόσθεσης ισχύει για περισσότερα από δύο ενδεχόμενα, έστω *n*:

$$p\left(E_1 \text{ ή } E_2 \ \cdots \text{ ή } E_n \mid H\right) = p\left(E_1 \mid H\right) + p\left(E_2 \mid H\right) + \cdots + p\left(E_n \mid H\right)$$

Ο κανόνας αυτός αποδεικνύεται επίσης εύκολα, χρησιμοποιώντας το πρότυπο.

3.5.3 Κανόνας πολλαπλασιασμού

Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα E_1, E_2 και πληροφορία *H*,

$$p\left(E_1 \text{ και } E_2 \mid H\right) = p\left(E_1 \mid H\right) p\left(E_2 \mid E_1 \text{ και } H\right) \tag{3.2}$$

Και ο κανόνας αυτός μπορεί να επεκταθεί σε *n* ενδεχόμενα,

$$p\left(E_1 \text{ και } E_2 \text{ και } \cdots \text{ και } E_n \mid H\right) = p\left(E_1 \mid H\right) p\left(E_2 \mid E_1 \text{ και } H\right) \cdots p\left(E_n \mid E_1 \text{ και } E_2 \text{ και } \cdots \text{ και } E_{n-1} \text{ και } H\right)$$

3.6 Θεωρήματα

3.6.1 Θεώρημα της ολικής πιθανότητας

Έστω *E* κάποιο ενδεχόμενο, $\overline{E}$ το αντίστροφο του και *A* ένα οποιοδήποτε ενδεχόμενο. Τότε,

$$p(A) = p(A \mid E) p(E) + p(A \mid \overline{E}) p(\overline{E})$$

Επεκτείνοντας το θεώρημα για *n* εξαντλητικά, αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα,

$$p(A) = p(A \mid E_1)p(E_1) + p(A \mid E_2)p(E_2) + \cdots + p(A \mid E_n)p(E_n) \tag{3.3}$$

Ο τύπος αυτός θα είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στο πρόβλημα της λήψης απόφασης, γιατί έχουμε υποθέσει ότι αντιμετωπίζουμε ένα σύνολο ενδεχομένων που είναι αλληλοαποκλειόμενα και εξαντλητικά. Τα ενδεχόμενα αυτά τα ορίσαμε σαν θ_1, θ_2, ..., θ_n.

3.6.2 Θεώρημα Bayes

Αν E και F είναι δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα, και $p(E) \neq 0$, τότε,

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)p(F)}{p(E)} = \frac{p(E \text{ και } F)}{p(E)}$$

όπου η αναφορά στη πληροφορία H έχει παραλειφθεί.

Η σημασία του θεωρήματος έγκειται στο γεγονός ότι συνδέει δύο εντελώς διαφορετικές πιθανότητες που αφορούν τα ίδια ενδεχόμενα, δηλαδή τις $p(E \mid F)$ και $p(F \mid E)$.

3.7 Παραδείγματα

Παράδειγμα 3.1. Ας υποθέσουμε ότι πρόκειται να κάνετε μία χειμωνιάτικη εκδρομή με το αυτοκίνητο σας. Ο δρόμος είναι χιονισμένος και είστε αναγκασμένος να περάσετε μέσα από μία σήραγγα. Θέλετε να υπολογίσετε την πιθανότητα να φτάσετε στον προορισμό σας σώος και αβλαβής.

Για να συμβεί το ενδεχόμενο {φτάνω στον προορισμό μου χωρίς ατύχημα} πρέπει να συμβούν ταυτόχρονα δύο ενδεχόμενα:

E_1: {να φτάσω στον προορισμό μου}

E_2: {να μην γίνει δυστύχημα}

Το E_1 είναι ισοδύναμο με το,

{να είναι ο δρόμος ανοικτός}

Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι με διάφορους υπολογισμούς, εκτιμάτε την:

$p(E_1) = 4/5$

Για να χρησιμοποιηθεί ο κανόνας του πολλαπλασιασμού (3.2), πρέπει να εκτιμηθεί και η $p(E_2 \mid E_1)$, δηλαδή η,

p {να μη γίνει δυστύχημα δοθέντος ότι ο δρόμος είναι ανοικτός}

Στην περίπτωση αυτή, ίσως είναι ευκολότερο να εκτιμηθεί η συμπληρωματική πιθανότητα, δηλαδή η,

p {να γίνει δυστύχημα, δοθέντος ότι ο δρόμος είναι ανοικτός}

και έστω ότι,

$p(E_2 \mid E_1) = \frac{1}{16}$

Επομένως,

$p(E_2 \mid E_1) = 1 - \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$

Άρα,

$p(E_1 \text{ και } E_2) = \frac{4}{5} \times \frac{15}{16} = \frac{3}{4}$

Στη συνέχεια, θέλετε να υπολογίσετε την πιθανότητα να σας συμβεί κάποιο ατύχημα. Από το θεώρημα της ολικής πιθανότητας,

$$p(A) = p(A \mid E_1) p(E_1) + p(A \mid \bar{E}_1) p(\bar{E}_1)$$

όπου,

A: {ατύχημα}

και E_1 όπως προηγούμενα. Ήδη είναι γνωστές οι,

$$p(A \mid E_1) = \frac{1}{16}, \quad p(\bar{E}_1) = \frac{4}{5}, \quad p(E_1) = \frac{1}{5}$$

Απομένει η $p(A \mid \bar{E}_1)$ δηλαδή η πιθανότητα να γίνει ατύχημα δοθέντος ότι ο δρόμος είναι κλειστός. Θεωρώντας την πιθανότητα αυτή διπλάσια της $p(A \mid E_1)$, έχουμε τελικά,

$$p(A) = \tfrac{1}{16} \times \tfrac{4}{5} + \tfrac{1}{8} \times \tfrac{1}{5} = \tfrac{3}{40}$$

Επομένως, αν αποφασίσετε να κάνετε την εκδρομή σας, η πιθανότητα ατυχήματος είναι περίπου 7,5%, όση περίπου η πιθανότητα γέννησης κάποιου ανθρώπου τον Φλεβάρη.

Παράδειγμα 3.2. Ας γυρίσουμε στο πρόβλημα του εφημεριδοπώλη και ας θέσουμε την εξής ερώτηση: αν ο εφημεριδοπώλης δανειστεί λεφτά από την τράπεζα, ποιά είναι η πιθανότητα να τα ξεπληρώσει;

Για να απαντηθεί η ερώτηση αυτή είναι προτιμότερο να την διασπάσουμε σε επιμέρους ενδεχόμενα του τύπου,

$A \mid \theta_j$: {να ξεπληρωθεί το δάνειο αν πουληθούν j φύλλα}

Τότε,

$$p(A) = p(A \mid \theta_{16})\, p(\theta_{16}) + p(A \mid \theta_{17})\, p(\theta_{17}) + \ldots + p(A \mid \theta_{24})\, p(\theta_{24})$$

Εκτιμώντας τις πιθανότητες των $p(A \mid \theta_j)$, $p(\theta_j)$, μπορεί στην συνέχεια ν' απαντήσει στο σύνθετο ερώτημα της τιμής της $p(A)$.

Παράδειγμα 3.3: το αίνιγμα των τριών φυλακισμένων. Τρεις άνδρες, οι Αλέκος, Βασίλης και Γιώργος, βρίσκονται φυλακισμένοι χωρίς την δυνατότητα επικοινωνίας. Ο Αλέκος ξέρει ότι δύο από τους τρεις θα εκτελεσθούν, ενώ ο τρίτος θα αφεθεί ελεύθερος. Οι πιθανότητες να ελευθερωθούν είναι ίσες, δηλαδή,

$$p(A) = p(B) = p(\Gamma) = \tfrac{1}{3}$$

Ο Αλέκος απευθυνόμενος στον δεσμοφύλακα του, τον ρωτάει: «αφού ένας από τους Βασίλη, Γιώργο σίγουρα θα εκτελεσθεί, δεν θα μου δώσεις περισσότερη πληροφορία για τις δικές μου πιθανότητες να ελευθερωθώ, αν μου πεις το όνομα ενός που θα εκτελεσθεί».

Ο δεσμοφύλακας συμφωνεί με τον συλλογισμό του και του απαντά: «ο Βασίλης θα εκτελεσθεί». Με την απάντηση αυτή ο Αλέκος αισθάνεται καλύτερα, αφού ξέρει ότι τώρα ή αυτός ή ο Γιώργος θα ελευθερωθεί και η πιθανότητα του είναι $\tfrac{1}{2}$ αντί του αρχικού $\tfrac{1}{3}$. Τί είναι το σωστό;

Για ν' αναλύσουμε τη κατάσταση, πρέπει να συγκρίνουμε τις $p(A) = \tfrac{1}{3}$ και $p(A \mid \delta)$ όπου δ η δήλωση του δεσμοφύλακα ότι θα εκτελεσθεί ο Βασίλης. Ξέρουμε ότι ο δεσμοφύλακας λέει πάντα την αλήθεια, επομένως,

$p(\delta \mid B) = p$ (δήλωση ότι θα εκτελεσθεί ο Βασίλης δεδομένου ότι θα ελευθερωθεί) = 0

$p(\delta \mid \Gamma) = 1$

Δεν είναι όμως προφανές τί τιμή να δώσουμε στην $p(\delta \mid A)$, γιατί αν ο Αλέκος ελευθερωθεί, δηλαδή οι Βασίλης, Γιώργος θανατωθούν, ο δεσμοφύλακας μπορεί να επιλέξει τον Βασίλη ή τον Γιώργο στην απάντησή του. Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι, $p(\delta \mid A)=p$ και $p(A \mid \delta)=x$. Τότε, από την (3.3),

$$p(\delta) = p(\delta \mid A)\, p(A) + p(\delta \mid B)\, p(B) + p(\delta \mid \Gamma)\, p(\Gamma) = \tfrac{p}{3} + 0 + \tfrac{1}{3} = \frac{1+p}{3}$$

Από την (3.2),

$$p(A \text{ και } \delta) = p(\delta)\, p(A \mid \delta) = \frac{(1+p)x}{3}$$

$$= p(A)\, p(\delta \mid A) = \tfrac{p}{3}$$

Επομένως,

$$x = \frac{p}{1+p}$$

Στην πρόταση του στον δεσμοφύλακα ο Αλέκος ισχυρίστηκε ότι $x=\frac{1}{3}$. Στην περίπτωση αυτή,

$$p=p(\delta \mid A)=\tfrac{1}{2}$$

που σημαίνει ότι αν ο Αλέκος ελευθερωθεί, ο δεσμοφύλακας θα απαντήσει με την ίδια πιθανότητα Βασίλης ή Γιώργος. Στο μετέπειτα σκεπτικό ο Αλέκος θεώρησε $x=\frac{1}{2}$, που δίνει $p=1$ και σημαίνει ότι κάτω από τις ίδιες συνθήκες ο δεσμοφύλακας θα απαντήσει Βασίλης.

Η ουσία του προβλήματος και η αιτία της ασάφειας έγκειται στη μη δήλωση της απόκρισης του δεσμοφύλακα στην περίπτωση που θα ελευθερωνόταν ο Αλέκος.

Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει ότι λογικές πιθανότητες μπορεί να οδηγήσουν σε παράλογα συμπεράσματα. Για τον λόγο αυτό, οι εκτιμήσεις των πιθανοτήτων των ενδεχομένων πρέπει να ελέγχονται συγκρίνοντας την μία με την άλλη.

4 ΜΕΤΡΟ ΤΩΝ ΕΠΙΠΤΩΣΕΩΝ

4.1 Επιπτώσεις απόφασης

Η ενότητα αυτή παραλληλίζει την Ενότητα 3.3. Εκεί προσπαθήσαμε να δείξουμε ότι είναι λογικό να συσχετίσουμε αριθμούς με τα αβέβαια ενδεχόμενα. Εδώ, θα προχωρήσουμε λίγο ακόμα, για να υποστηρίξουμε ότι και οι επιπτώσεις των αποφάσεων που λαμβάνονται, μπορεί να αναπαρασταθούν με κάποια αριθμητική τιμή. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε τον γνωστό κατάλογο αποφάσεων d_1, d_2, ..., d_m, τα αβέβαια ενδεχόμενα θ_1, θ_2, ..., θ_n και επίσης τις πιθανότητες $p(\theta_1)$, $p(\theta_2)$, ..., $p(\theta_n)$ των τελευταίων.

Έστω ότι επιλέγεται μία συγκεκριμένη απόφαση, d_i, και στη συνέχεια λαμβάνει χώρα το αβέβαιο ενδεχόμενο θ_j. Το γεγονός, πλέον, θ_j θα απομακρύνει κάθε αβεβαιότητα του προβλήματος και η απόφαση d_i θα έχει κάποιο συγκεκριμένο αποτέλεσμα που μπορεί να προβλεφθεί με βεβαιότητα. Με άλλα λόγια ο συνδυασμός της d_i με το θ_j θα έχει μία προβλεπτή επίπτωση. Η επίπτωση αυτή συμβολίζεται με C_{ij} ή (d_i, θ_j).

Παράδειγμα 4.1. Ένας κατασκευαστής κουρτινών θέλει να αποφασίσει αν θα ελέγχει ή όχι τα παραγόμενα τόπια του υλικού, πριν αποσταλούν στον πελάτη. Το πρόβλημα της λήψης απόφασης έχει ως εξής:

Υπάρχουν δύο εναλλακτικές αποφάσεις: d_1, να κάνει έλεγχο και d_2, να πωλήσει χωρίς έλεγχο. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι υπάρχουν μόνο δύο αβέβαια ενδεχόμενα: θ_1, το τόπι δεν έχει ελαττώματα και θ_2 το τόπι είναι ελαττωματικό. Οι πιθανές επιπτώσεις είναι οι εξής:

- C_{11}: η επίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην απόφαση d_1 (να ελέγξει) και στο ενδεχόμενο θ_1 (να μην βρει ελάττωμα). Στην περίπτωση αυτή η επίπτωση θα είναι «ευχαριστημένος πελάτης με επιβάρυνση του ελέγχου.
- C_{22}: η επίπτωση αυτή αντιστοιχεί στην απόφαση d_2 (να μην ελέγξει) και στο ενδεχόμενο θ_2 (να υπάρχει κάποιο ελάττωμα). Η επίπτωση θα είναι «δυσαρεστημένος πελάτης χωρίς επιβάρυνση ελέγχου».
- C_{12}: αντιστοιχεί στην απόφαση d_1 (να ελέγξει) και στο ενδεχόμενο θ_2 (να βρει ελάττωμα). Η επίπτωση θα είναι «αλλαγή τοπιού, επιβάρυνση ελέγχου, ευχαριστημένος πελάτης».
- C_{21}: αντιστοιχεί στην απόφαση d_2 (να μην ελέγξει) και στο ενδεχόμενο θ_1 (να μην υπάρχει ελάττωμα). Η επίπτωση θα είναι «ευχαριστημένος πελάτης, χωρίς την επιβάρυνση του ελέγχου».

Είναι βολικό να εκφράσουμε και την περίπτωση αυτή σε μορφή πίνακα αποπληρωμής (Πίνακας 6).

***Πίνακας* 6**: πίνακας αποπληρωμής για το Παράδειγμα 4.1

d_i/θ_j	1	2
1	C_{11}: ικανοποιημένος πελάτης, επιβάρυνση ελέγχου	C_{12}: αλλαγή τοπιού, επιβάρυνση ελέγχου, ικανοποιημένος πελάτης
2	C_{21}: ικανοποιημένος πελάτης	C_{22}: δυσαρεστημένος πελάτης, αλλαγή τοπιού
	$\boldsymbol{p(\theta_1)}$	$\boldsymbol{p(\theta_2)}$

Θεωρητικά, μπορούμε να παραστήσουμε κάθε πρόβλημα λήψης απόφασης στην μορφή αυτή, αν και ένας μεγάλος αριθμός παραμέτρων θα δυσκόλευε τα πράγματα. Αργότερα, θα δούμε μία μέθοδο διαχωρισμού ενός μεγάλου πίνακα σε άλλους μικρότερους.

Ξαναγυρίζοντας στο παράδειγμα μας, μπορούμε να πούμε ότι η C_{21} είναι η πλέον επιθυμητή επίπτωση για τον κατασκευαστή: θα έχει ικανοποιημένους πελάτες χωρίς την επιβάρυνση του ελέγχου. Η C_{11} είναι η επόμενη καλύτερη με ικανοποιημένο πελάτη αλλά με την επιβάρυνση ενός ελέγχου. Ακολουθεί η C_{12} που διαφέρει από την C_{11} κατά έναν έλεγχο και τελευταία είναι προφανώς η C_{22}. Έτσι, οι τέσσερεις πιθανές επιπτώσεις μπορεί να διαταχθούν ως εξής:

$C_{21}, C_{11}, C_{12}, C_{22}$

Ας σημειωθεί ότι η συγκεκριμένη διάταξη δεν είναι η μοναδική. Υπάρχουν περιπτώσεις όπου η επιβάρυνση του ελέγχου είναι πολύ υψηλή και η διόρθωση του ελαττώματος πολύ εύκολη. Κατά συνέπεια η C_{22} ίσως να μην είναι τελευταία. Το σημείο που έχει σημασία εδώ είναι ότι υπάρχουν μερικές ***προτιμήσεις*** μεταξύ των επιπτώσεων. Με την συγκεκριμένη διάταξη δεν είναι προφανές ποιά απόφαση πρέπει να πάρει ο κατασκευαστής γιατί δεν ξέρει αν το υλικό είναι ελαττωματικό ή όχι. Αν το θ_1 είναι αληθές, τότε η d_2 είναι σαφώς καλύτερη, αφού είναι άσκοπο να ελέγχεις μη ελαττωματικά προϊόντα. Από την άλλη μεριά αν το θ_2 αληθεύει, τότε η d_1 πρέπει να προτιμηθεί αφού η C_{12} προτιμάται από την C_{22}. Ο κατασκευαστή βρίσκεται μπροστά σε αμηχανία, αλλά χρησιμοποιώντας την επιχειρηματολογία της Ενότητας 3.3, μπορεί να εκτιμήσει τις πιθανότητες $p(\theta_1)$, $p(\theta_2)$ των δύο αβέβαιων ενδεχομένων. Επειδή τα ενδεχόμενα είναι εξαντλητικά, το άθροισμα των πιθανοτήτων τους είναι 1. Έτσι αρκεί να εκτιμήσουμε τη μία από τις δύο πιθανότητες. Αν η $p(\theta_1)$ είναι κοντά στο 1, που σημαίνει ότι είναι σχετικά βέβαιος ότι το υλικό δεν είναι ελαττωματικό, τότε, όπως προηγουμένως, πρέπει να επιλέξει την d_2. Αντίθετα αν η $p(\theta_1)$ είναι κοντά στο μηδέν, η d_1 πρέπει να θεωρηθεί καλύτερη (μία τρίτη απόφαση, να επιθεωρήσει και επιδιορθώσει όλη την παραγωγική διαδικασία, θα ήταν ακόμη καλύτερη, αλλά δεν την εξετάζουμε προς το παρόν). Κάπου ανάμεσα στο 0 και το 1 υπάρχει κάποια τιμή της $p(\theta_1)$ όπου συμβαίνει η αλλαγή από την d_2 στην d_1. Αλλά πού ακριβώς;

Προφανώς το σημείο εξαρτάται όχι μόνο από την διάταξη των επιπτώσεων αλλά και από το πόσο καλύτερη είναι κάθε επίπτωση από τις υπόλοιπες. Για παράδειγμα, αν η C_{22} χειροτερεύει γιατί το καλό όνομα απέναντι στον πελάτη είναι πολύ σημαντικό, τότε η $p(\theta_2)$, η πιθανότητα ελαττωματικού υλικού, δεν χρειάζεται να είναι πολύ υψηλή για να προτιμηθεί ο έλεγχος.

4.2 Αριθμητική τιμή για την επίπτωση

Φαίνεται λοιπόν ότι το επόμενο βήμα είναι να συνδέσουμε τις επιπτώσεις με κάτι περισσότερο από μία απλή διάταξη, δηλαδή με συγκεκριμένους αριθμούς. Για να επιτευχθεί αυτό πρέπει να εισάγουμε ένα σταθερό πρότυπο, όπως και με την περίπτωση της πιθανότητας. Για τις επιπτώσεις χρησιμοποιούνται δύο επιπτώσεις αναφοράς:

- η μία από αυτές είναι καλύτερη ή το λιγότερο όχι χειρότερη από τις υπόλοιπες.
- η άλλη είναι χειρότερη ή το πολύ όχι καλύτερη από τις υπόλοιπες.

Γενικά, ας θεωρήσουμε ότι ένα πρόβλημα απόφασης απεικονίζεται σε έναν πίνακα αποπληρωμής με αποφάσεις d_i, ενδεχόμενα θ_j και επιπτώσεις C_{ij}. Ας υποθέσουμε ότι κάθε ζευγάρι επιπτώσεων μπορεί να συγκριθεί, με την έννοια ότι η μία από τις δύο προτιμάται ή ότι και οι δύο είναι το ίδιο επιθυμητές. Ας υποθέσουμε επιπλέον ότι η σύγκριση αυτή έχει συνοχή, δηλαδή αν η επίπτωση C_{11} προτιμάται από την C_{12} και η C_{12} από την C_{22}, τότε η C_{11} προτιμάται από την C_{22}. Υποθέτουμε, δηλαδή συνεκτική σύγκριση των επιπτώσεων, όπως υποθέσαμε συνεκτική σύγκριση των αβέβαιων ενδεχομένων.

Έστω τώρα C_b οποιαδήποτε επίπτωση, τέτοια ώστε καμμία επίπτωση από τον πίνακα να είναι προτιμότερη της, και C_w οποιαδήποτε επίπτωση τέτοια ώστε καμμία επίπτωση του πίνακα να είναι χειρότερή της.

Ας εξετάσουμε τώρα την επίπτωση C_{ij}, και ας συγκρίνουμε την C_{ij} με την C_b ως εξής:

- Ποια είναι η πιθανότητα u που να κάνει το ενδεχόμενο {C_b με πιθανότητα u} το ίδιο επιθυμητό με το C_{ij};

Για κάθε επίπτωση C_{ij} υπάρχει ένας και μόνον ένας αριθμός u, μεταξύ 0 και 1, τέτοιος ώστε η C_{ij} να είναι ακριβώς η {C_w με πιθανότητα $1-u$}.

Ο αριθμός αυτός που συμβολίζεται με $u(C_{ij})$ ή u_{ij} καλείται ***χρησιμότητα*** (utility) της C_{ij}. Εξαιτίας της υπόθεσης της συνοχής αν $C_{ij}>C_{kl}$ τότε $u_{ij}>u_{kl}$. Η εισαγωγή λίγου συμβολισμού ακόμη θα διευκολύνει.

> : σημαίνει «προτιμάται από»

~ : σημαίνει «το ίδιο επιθυμητό με»

< : σημαίνει «δεν προτιμάται από»

Επίσης αν $C_{ij} \sim C_{ke}$ τότε $u_{ij} = u_{kl}$ και τέλος αν $C_{ij}<C_{kl}$ τότε $u_{ij}<u_{kl}$.

Πετύχαμε λοιπόν τον στόχο μας, αλλά θα πρέπει να θυμόμαστε ότι το μέτρο της επίπτωσης είναι και αυτό πιθανότητα και υπακούει έτσι στους νόμους των πιθανοτήτων.

Ο γνωστός μας λοιπόν πίνακας αποπληρωμής παίρνει την μορφή που φαίνεται στον Πίνακα 7. Οι αποφάσεις είναι στις γραμμές, τα ενδεχόμενα στις στήλες και στις τομές τους έχουν έναν αριθμό, την χρησιμότητα της επίπτωσης. Στον πίνακα επίσης συμπεριλαμβάνονται οι πιθανότητες των ενδεχομένων.

***Πίνακας* 7**: πίνακας αποπληρωμής για το Παράδειγμα 4.1

d_i/θ_j	1	2
1	0.9	0.5
2	1	0
	$p(\theta_1)$: 0,8	$p(\theta_2)$: 0,2

Οι χρησιμότητες έχουν επιλεγεί με τέτοιο τρόπο ώστε να αντανακλούν τις ιδιότητες που αναπτύχθηκαν προηγούμενα. Έτσι τα C_{21}, C_{22} είναι αντίστοιχα τα C_b, C_w με χρησιμότητες 1 και 0. Η C_{11} διαφέρει από την C_b κατά την επιβάρυνση του ελέγχου και έτσι έχει χρησιμότητα 0,9. Η C_{12} περιέχει επίσης την διόρθωση του ελαττώματος, και έχει χρησιμότητα 0,5. Οι πιθανότητες είναι επίσης υπολογισμένες με την λογική που προαναφέρθηκε και έχει υποτεθεί ότι η πιθανότητα ελαττωματικού υλικού είναι 0,2.

4.3 Ο συνδυασμός πιθανοτήτων με τη χρησιμότητα

Μέχρι τώρα έχουμε συσχετίσει αριθμούς με τα ενδεχόμενα και τις επιπτώσεις. Απομένει να συσχετίσουμε αριθμούς και με τις αποφάσεις, με τέτοιο τρόπο όμως, ώστε η καλύτερη απόφαση να είναι αυτή που έχει τον μεγαλύτερο αριθμό. Αυτό είναι πλέον εύκολο να γίνει αφού και τα δύο σύνολα αριθμών, πιθανότητες και χρησιμότητες, υπακούουν στους νόμους των πιθανοτήτων. Έτσι πρέπει να μπορεί να συνδυάζονται και να παράγουν ένα σύνολο αριθμών για τις αποφάσεις, με τρόπο που υπαγορεύεται από τους νόμους αυτούς. Για να το εφαρμόσουμε αυτό ας δούμε τι γίνεται όταν λαμβάνεται μία απόφαση d_i. Το αποτέλεσμα εξαρτάται από ένα αβέβαιο ενδεχόμενο και αν αυτό είναι το θ_j, η επίπτωση θα είναι η C_{ij}, που μπορεί να αντικατασταθεί από την χρησιμότητα της, u_{ij}.

Η χρησιμότητα u_{ij} όμως, δεν είναι τίποτε άλλο από την πιθανότητα να συμβεί η C_b. Βλέπουμε λοιπόν ότι για κάθε απόφαση και ενδεχόμενο, μπορούμε να βλέπουμε το αποτέλεσμα ως C_b (ή C_w). Σύμφωνα με τον συμβολισμό μας,

$$p(C_b \mid d_i \text{ και } \theta_j)=u_{ij}$$

ή απλούστερα,

$$p(C_b \mid \theta_j)=u_{ij}$$

αφού εξετάζουμε προς το παρόν τις d_i.

Από την (3.3),

$$p(C_b)=p(C_b \mid \theta_1)p(\theta_1)+p(C_b \mid \theta_2)p(\theta_2)+\ldots+p(C_b \mid \theta_n)p(\theta_n)$$

όπου τα θ_i είναι αλληλοαποκλειόμενα και εξαντλητικά ενδεχόμενα όπως απαιτεί το Θεώρημα. Ισοδύναμα,

$$p(C_b) = \sum_{j=1}^{n} p(C_b \mid \theta_j)p(\theta_j) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(\theta_j) \tag{4.1}$$

Θυμίζοντας ότι η $p(C_b)$ είναι στην ουσία η $p(C_b \mid d_i)$, βλέπουμε ότι καταλήξαμε σε μία παράσταση για την πιθανότητα να συμβεί η C_b αν επιλεγεί η d_i. Επίσης, εξαιτίας της υπόθεσης ότι αν δεν συμβεί η C_b, τότε αναγκαία θα συμβεί η C_w, βλέπουμε ότι η $p(C_b \mid d_i)$ είναι το μέτρο της αξιολόγησης της d_i, με την έννοια ότι όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα αυτή, τόσο πιο επιθυμητή είναι η d_i. Επομένως η ενδεδειγμένη απόφαση είναι αυτή που μας δίνει τον μεγαλύτερο αριθμό $p(C_b \mid d_i)$.

Κάθε πρόβλημα απόφασης μπορεί να μορφοποιηθεί σε καταλόγους αποφάσεων και αβέβαιων ενδεχομένων. Υποθέτοντας ότι τα ενδεχόμενα μπορούν να συγκριθούν με συνοχή, όπως επίσης και οι χρησιμότητες, μπορούμε να συσχετίσουμε πιθανότητες με τα ενδεχόμενα και χρησιμότητες με τις επιπτώσεις. Στην συνέχεια για κάθε απόφαση υπολογίζουμε μία τιμή από την Εξίσωση 4.1. Η βέλτιστη απόφαση είναι αυτή με την μεγαλύτερη τιμή.

4.4 Προσδοκώμενη χρησιμότητα

Το δεξιό μέλος της (4.1) ονομάζεται ***προσδοκώμενη χρησιμότητα*** της απόφασης d_i και συμβολίζεται με $u(d_i)$. Έτσι, η διαδικασία επιλογής της βέλτιστης λύσης συνίσταται στη μεγιστοποίηση:

$$\bar{u} = \max_i u(d_i) \tag{4.1}$$

Παράδειγμα 4.1   Από την Εξ. 4.1 και τις πιθανότητες του Πίνακα 7, έχουμε:

$$u(d_1)=0,9\times0,8+0,5\times0,2=0,82$$
$$u(d_2)=1,0\times0,8+0,0\times0,2=0,80$$

Επομένως η $u(d_1)$ είναι μεγαλύτερη και η βέλτιστη απόφαση είναι η d_1 με $\bar{u}$=0,82. Παρατηρούμε ότι η προσδοκώμενη χρησιμότητα της d_1 είναι λίγο υψηλότερη από αυτήν της d_2, πράγμα που σημαίνει ότι η d_1 είναι λίγο καλύτερη της d_2.

Αυτό μπορούμε να το αντιληφθούμε καλύτερα αν δούμε τι γίνεται αν αλλάξουν οι πιθανότητες ή/και οι χρησιμότητες. Αν η πιθανότητα ελαττώματος πέσει στο 0,1, τότε:

$$u(d_1) = 0,86, \quad u(d_2) = 0,90$$

Επομένως, η d_2 είναι καλύτερη με υψηλότερη προσδοκώμενη χρησιμότητα από πριν, 0,90. Εναλλακτικά, ας υποθέσουμε ότι ο έλεγχος γίνεται δυσκολότερος, με αποτέλεσμα την μείωση των χρησιμοτήτων για την d_1 κατά 0,1 αντίστοιχα. Η μείωση αυτή επιδρά στην προσδοκώμενη χρησιμότητα της d_1, που πέφτει στο 0,72, καθιστώντας έτσι την d_1 ανεπιθύμητη.

4.5 Πρακτική υλοποίηση

Ο αναγνώστης που έχει παρακολουθήσει την μέχρι τώρα επιχειρηματολογία, πιθανόν να μην έχει εντυπωσιασθεί καθόλου εξαιτίας της δυσκολίας της πρακτικής υλοποίησης. Πώς θα εκτιμηθούν οι πιθανότητες και οι χρησιμότητες; Είναι καλό να υπάρχει μία ωραία, λογική θεωρία, αλλά αν αποδεικνύεται αδύνατο να εφαρμοσθεί, είναι άχρηστη.

Η απάντηση στην αμφισβήτηση αυτή είναι: αν η λογική πείθει, τότε πρέπει να βρεθούν τρόποι για να υλοποιηθεί. Προς το παρόν, δεν υπάρχει απόλυτη μέθοδος για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων και των χρησιμοτήτων. Ορισμένοι μέθοδοι παρουσιάζονται στο επόμενο κεφάλαιο. Ο λόγος για την κατάσταση αυτή έγκειται στο γεγονός ότι ο κόσμος δεν ήταν πεισμένος για την αναγκαιότητα της εφαρμογής του κανόνα της μέγιστης προσδοκώμενης χρησιμότητας. Οι βασικές αρχές της θεωρίας αυτής, είναι στην ουσία αποτέλεσμα των εργασιών του Frank Ramsey στα 1920. Θα μπορούσε κάποιος να παραλληλίσει της ανακαλύψεις του Ramsey στο πεδίο της ανθρώπινης δράσης με αυτές του Newton στο πεδίο της μηχανικής. Η διαφορά τους είναι στο ότι κανείς επιστήμονας δεν σκέφτηκε να απορρίψει την θεωρία του Νεύτωνα επειδή στην εποχή του δεν μπορούσαν να μετρήσουν με ακρίβεια τις σχετικές ποσότητες. Αντίθετα, επινόησαν μεθόδους γι' αυτόν ακριβώς τον σκοπό. Ο δρόμος αυτός πρέπει να ακολουθηθεί και για την ανθρώπινη δράση.

Μία άλλη απάντηση στην αρχική αμφισβήτηση ότι η θεωρία δεν μπορεί να εφαρμοσθεί είναι ότι ο κόσμος ήδη παίρνει αποφάσεις, και ότι το μόνο που επιβάλλει η θεωρία είναι η απλοποίηση και εκλογίκευση της λήψης με βάση την συνοχή. Ας χρησιμοποιήσουμε πάλι το παράδειγμα του ελέγχου ποιότητας για να κατανοηθεί καλύτερα η απάντηση αυτή. Οι αρμόδιοι σήμερα παίρνουν αποφάσεις για το αν θα πρέπει να γίνεται έλεγχος ποιότητας ή όχι. Σε μερικές περιπτώσεις υπάρχουν εγχειρίδια με πολύπλοκες διαδικασίες για να τους βοηθήσουν. Σε άλλες περιπτώσεις η απόφαση λαμβάνεται εμπειρικά. Ας δούμε όμως τι πρέπει να εξετασθεί στο πρόβλημα αυτό. Υπάρχει η πιθανότητα ελαττωματικού υλικού, η επιβάρυνση του ελέγχου, ο μη ικανοποιημένος πελάτης. Αυτός που αποφασίζει πρέπει να τα λάβει όλα αυτά υπόψη του. Μπορεί ένα άτομο να το κάνει αυτό; Η ουσία είναι ότι θα το κάνει. Η απόφαση **τού** επιβάλλεται. Αυτό που προτείνει η θεωρία είναι η εστίαση σε διαφορετικές πλευρές του προβλήματος, και ο συνδυασμός τους με βάση την λογική. Πόσο ακριβός είναι ο έλεγχος και πόσο σοβαρή είναι η μείωση της φήμης; Να εκτιμηθούν οι χρησιμότητες. Οι ερωτήσεις αυτές είναι πολύ ευκολότερες από την ερώτηση να γίνει ή να μην γίνει έλεγχος, γιατί είναι μέρη του όλου προβλήματος. Οι απαντήσεις στις επιμέρους αυτές απαντήσεις, συνδυάζονται στη συνέχεια μέσω της μεγιστοποίησης της προσδοκώμενης χρησιμότητας, για να δώσουν την συνολική απάντηση.

Η αλήθεια στο ζήτημα αυτό είναι ότι ο κόσμος δεν αρέσκεται στα απλά προβλήματα. Τους αρέσει να καταφεύγουν στα περίπλοκα, γιατί εκεί η ανεπάρκεια των διαδικασιών είναι δύσκολο να καταδειχθεί, εξαιτίας της σύγχυσης που προκαλείται από την πολυπλοκότητα.

4.6 Εξάρτηση της πιθανότητας από την απόφαση

Για την εξαγωγή της προσδοκώμενης χρησιμότητας χρησιμοποιήσαμε πιθανότητες για τα ενδεχόμενα που **δεν** εξαρτιόταν από τις αποφάσεις. Στην πραγματικότητα όμως αυτό μπορεί να συμβαίνει, και στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να χρησιμοποιούμε την $p(\theta_j \mid d_i)$ και όχι την $p(\theta_j)$. Η αλλαγή αυτή δεν επηρεάζει το τελικό αποτέλεσμα, αφού,

$$p(C_b \mid d_i \text{ και } \theta_j) = u_{ij}$$

και,

$$p(C_b \mid d_i) = \sum_{j=1}^{n} p(C_b \mid d_i \text{ και } \theta_j) p(\theta_j \mid d_i) = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(\theta_j \mid d_i) \tag{4.2}$$

Παράδειγμα 4.2. Ένας αγοραστής έχει να διαλέξει μεταξύ δύο συστημάτων. Το ένα (d_1) είναι φθηνότερο από το άλλο (d_2). Τα αβέβαια ενδεχόμενα είναι να συμβεί ατύχημα (θ_1) ή όχι (θ_2). Οι χρησιμότητες μπορεί να υπολογισθούν ως εξής:

α. Λόγω κόστους: $u_{12}>u_{22}$, $u_{11}>u_{21}$

β. Λόγω ασφάλειας: $u_{12}>u_{11}$, $u_{22}>u_2$

Επομένως u_{12}=1, u_{21}=0. Με βάση τα στοιχεία αυτά, επιλέγεται η d_1. Η πρωτοτυπία του παραδείγματος αυτού είναι ότι το d_2 είναι ασφαλέστερο σύστημα, άρα η πιθανότητα ατυχήματος είναι μικρότερη, δηλαδή,

$$p(\theta_1 \mid d_2) < p(\theta_1 \mid d_1)$$

4.7 Άλλα κριτήρια

Στα προηγούμενα προτάθηκε η υιοθέτηση του κριτηρίου της μέγιστης προσδοκώμενης χρησιμότητας, ως κριτήριο λήψης απόφασης σε συνθήκες αβεβαιότητας. Το κριτήριο αυτό απαιτεί τον υπολογισμό της χρησιμότητας της κάθε επίπτωσης, που σε μερικές περιπτώσεις είναι ίσως δύσκολο. Θα δούμε στη συνέχεια δύο άλλα κριτήρια, που οδηγούν στο ίδιο συμπέρασμα.

Ας θεωρήσουμε το Παράδειγμα 2.1 με τις παρακάτω πιθανότητες:

***Πίνακας* 8:** πίνακας πιθανοτήτων για τον εφημεριδοπώλη

θ_j	16	17	18	19	20	21	22	23	24
$p(\Theta_j)$	0,05	0,1	0,12	0,16	0,1	0,2	0,1	0,12	0,05

(α) Κριτήριο μέγιστης προσδοκώμενης τιμής

Το κριτήριο αυτό επιλέγει την απόφαση που έχει την μέγιστη προσδοκώμενη αξία αποπληρωμής. Έτσι, για κάθε d_i, υπολογίζεται η προσδοκώμενη τιμή όπως στον Πίνακα 9.

***Πίνακας* 9:** προσδοκώμενες τιμές για τον εφημεριδοπώλη

d_i/θ_j	16	17	18	19	20	21	22	23	24	
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16	16,00
17	13	17	17	17	17	17	17	17	17	16,80
18	10	14	18	18	18	18	18	18	18	17,20
19	7	11	15	19	19	19	19	19	19	17,12
20	4	8	12	16	20	20	20	20	20	16,40
21	1	5	9	13	17	21	21	21	21	15,28
22	−2	2	6	10	14	18	22	22	22	13,36
23	−5	−1	3	7	11	15	19	23	23	11,04
24	−8	−4	0	4	8	12	16	20	24	8,24
$p(\theta_j)$	0,05	0,1	0,12	0,16	0,1	0,2	0,1	0,12	0,05	

Με βάση το κριτήριο αυτό, επιλέγεται η d_{18}.

Το κριτήριο αυτό ***μεγιστοποιεί τις μακροπρόθεσμες απολαβές***, κάτω από συνθήκες επανάληψης.

(β) Κριτήριο προσδοκώμενου διαφυγόντος κέρδους

Το κριτήριο αυτό είναι σχετικό με το προηγούμενο. Αντί να ενδιαφέρεται όμως για την προσδοκώμενη τιμή, επικεντρώνεται στο προσδοκώμενο διαφυγόν κέρδος. Έτσι με βάση τον πίνακα διαφυγόντος κέρδους του Παραδείγματος 2.1, υπολογίζουμε για κάθε απόφαση την, Προσδοκώμενη τιμή $(d_i)=\sum_{j=1}^{n} r_{ij}\, p(\theta_j)$

(Πίνακας 10).

Έτσι, και με αυτό το κριτήριο, επιλέγεται η d=18. Είναι απλό να δειχθεί ότι η ελαχιστοποίηση του προσδοκώμενου διαφυγόντος κέρδους είναι ισοδύναμη με την μεγιστοποίηση της προσδοκώμενης τιμής.

***Πίνακας* 10** Πίνακας διαφυγόντος κέρδους για τον εφημεριδοπώλη (Παράδειγμα 2.1)

d_i/θ_j	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Π.Τ.
16	0	1	2	3	4	5	6	7	8	4,06
17	3	0	1	2	3	4	5	6	7	3,26
18	6	3	0	1	2	3	4	5	6	2,86
19	9	6	3	0	1	2	3	4	5	2,94
20	12	9	6	3	0	1	2	3	4	3,66
21	15	12	9	6	3	0	1	2	3	4,78
22	18	15	12	9	6	3	0	1	2	6,78
23	21	18	15	12	9	6	3	0	1	9,82
24	24	21	18	15	12	9	6	3	0	11,82

4.8 Σύγκριση κριτηρίων

Για τη σύγκριση των δύο κριτηρίων που προτάθηκαν είναι χρήσιμη η έννοια του «***ισοδύναμου βεβαιότητας***». Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο αβέβαια αποτελέσματα x και y με πιθανότητα να συμβούν, p και $1-p$ αντίστοιχα. Έχουμε λοιπόν τη κατάσταση,

$$A:\begin{cases} x \text{ με πιθανότητα } p \\ y \text{ με πιθανότητα } 1-p \end{cases}$$

και έστω ότι ο λήπτης απόφασης είναι αδιάφορος μεταξύ της A και της,

B: Z με πιθανότητα 1

Ορίζουμε σαν ισοδύναμο βεβαιότητας της αβέβαιης κατάστασης A, τη κατάσταση Z.

Προφανώς η εκτίμηση της Z εξαρτάται από την ικανότητα του λήπτη απόφασης να κάνει συμβατές επιλογές μεταξύ βέβαιων και αβέβαιων ενδεχομένων. Έτσι, τα κριτήρια λήψης απόφασης μπορεί να θεωρηθούν σαν συνταγές ισοδύναμων βεβαιότητας για τον λήπτη απόφασης, και το πρόβλημα επιλογής κάποιου από αυτά μπορεί να αναχθεί στο πρόβλημα υπολογισμού κατάλληλου ισοδύναμου βεβαιότητας. Για παράδειγμα, ας δούμε την παρακάτω κατάσταση:

$$A:\begin{cases} \text{είσπραξη 100 € με πιθανότητα 0,5} \\ \text{είσπραξη 0 € με πιθανότητα 0,5} \end{cases}$$

και ας εφαρμόσουμε το κριτήριο της προσδοκώμενης τιμής για τον υπολογισμό του ισοδύναμου βεβαιότητας:

Ι.Β.=(100×0,5)+(0×0,5)=50€

Αν πράγματι ο λήπτης απόφασης είναι αδιάφορος μεταξύ της βεβαιότητας των 50€ και της πιθανότητας 100 € ή 0 € ανάλογα με το αν θα έλθει κορώνα ή γράμματα, τότε η προσδοκώμενη τιμή είναι ίση με το ισοδύναμο βεβαιότητας. Με άλλα λόγια ο λήπτης απόφασης θα πλήρωνε μέχρι 50€ για να λάβει μέρος σε μία κατάσταση σαν την *A*. Επομένως, αν και το κριτήριο προσδοκώμενης τιμής μπορεί να μεγιστοποιεί μακροπρόθεσμα, ο λήπτης απόφασης θα πρέπει να έχει την ικανότητα να αντέχει πιθανές μεγάλες ζημιές κατά τη διάρκεια της διαδικασίας. Όταν όμως η περιουσία του λήπτη απόφασης δεν είναι αρκετή για την κάλυψη τέτοιων βραχυπρόθεσμων ζημιών, θα πρέπει να είναι λιγότερο ριψοκίνδυνος απ' ότι του προτείνει το κριτήριο προσδοκώμενης τιμής, δηλαδή το ισοδύναμο βεβαιότητας του θα είναι μικρότερο από την προσδοκώμενη τιμή.

Ένα σχετικώς εύπορο άτομο θα ήταν λοιπόν διατεθειμένο να πληρώσει μέχρι 50€ για την κατάσταση *A*, ενώ κάποιος ενδεής φοιτητής δεν θα έδινε παραπάνω από 35€. Ακόμα και το σχετικώς εύπορο άτομο θα μεταβληθεί σε λιγότερο ριψοκίνδυνο αν οι αποπληρωμές πολλαπλασιασθούν επί 1000.

Το ισοδύναμο βεβαιότητας και επομένως το κριτήριο απόφασης για αβέβαια ενδεχόμενα, εξαρτάται λοιπόν από την ριψοκίνδυνη διάθεση του λήπτη απόφασης. Στη συνέχεια θα δούμε πως υπολογίζονται τα ισοδύναμα βεβαιότητας με βάση το στοιχείο του ριψοκίνδυνου ή με άλλα λόγια πώς υπολογίζουμε την χρησιμότητα της κάθε επίπτωσης.

4.9 Ορισμένα κριτήρια υπό το φως της συνοχής

4.9.1 Maximin

Το κριτήριο αυτό παρουσιάστηκε στην Ενότητα 2.2. Εδώ, θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι το κριτήριο αυτό δεν έχει συνοχή.

Ας θεωρήσουμε τους πίνακες αποπληρωμής του Πίνακα 11.

***Πίνακας* 11:** πίνακες αποπληρωμής

(α)

	θ_1	θ_2
d_1	u	0
d_2	1	1

(β)

	θ_1	θ_2
d_2	1	1
d_3	0	u

(γ)

	θ_1	θ_2
d_1	u	0
d_2	1	1
d_3	0	u

Ο maximin λήπτης θα επιλέξει την d_2 και στις δύο περιπτώσεις (α), (β). Θα διαλέξει δηλαδή τη σίγουρη αποπληρωμή του 1 παρά την αβέβαιη του u (όπου u>1), όσο μεγάλη και αν είναι η πιθανότητα της επίπτωσης αυτής. Η d_2 επιλέγεται επίσης και στην περίπτωση (γ). Ας θεωρήσουμε τώρα μία νέα επιλογή d με την εξής λογική: στρίβουμε ένα νόμισμα και επιλέγουμε την d_1 ή d_3 ανάλογα με το τι θα έρθει. Ποιά είναι η χρησιμότητα της d; Αν ο λήπτης συμφωνεί με την θεωρία της χρησιμότητας, πρέπει να είναι $u/2$ και για το θ_1 και για το θ_2. Επομένως, αν u>2, η d πρέπει να προτιμηθεί από την d_2. Άρα, έχουμε μία κατάσταση όπου ούτε η d_1 ούτε η d_3 προτιμούνται, αλλά η επιλογή μίας από τις δύο, τυχαία, προτιμάται από την d_2. Αυτό είναι έλλειψη συνοχής.

4.9.2 Minimax διαφυγόντος κέρδους

Η αδυναμία αυτού του κριτηρίου μπορεί να καταδειχθεί, αποδεικνύοντας ότι ο λήπτης που υιοθετεί το κριτήριο αυτό, καταντάει μία μηχανή πληρωμής χρημάτων ([2], "perpetual money making machine"). Ας θεωρήσουμε τον πίνακα αποπληρωμής του Πίνακα 12 (α), με τον αντίστοιχο πίνακα διαφυγόντος κέρδους, Πίνακα 12 (β).

***Πίνακας* 12**: πίνακες αποπληρωμής minimax διαφυγόντος κέρδους

(α)

	θ_1	θ_2
d_1	8	0
d_2	2	4

(β)

	θ_1	θ_2	min j
d_1	0	4	**4**
d_2	6	0	6

Σύμφωνα με το κριτήριο του minimax διαφυγόντος κέρδους, επιλέγεται η d_1, αφού 4=min {4, 6}. Στην ουσία ο λήπτης αυτός, αν βρισκόταν στην κατάσταση d_2, θα πλήρωνε μερικά χρήματα, κάτι λιγότερο από 2, για να βρεθεί στην κατάσταση d_1. Ας του πάρουμε λοιπόν την αμοιβή, δίνοντάς του την ευκαιρία να πραγματοποιήσει την d_1, αλλά ταυτόχρονα του δίνεται η ευκαιρία να θεωρήσει και μία τρίτη λύση με τα δεδομένα που φαίνονται στον Πίνακα 13 (α), (β).

***Πίνακας* 13**: πίνακας αποπληρωμής minimax διαφυγόντος κέρδους

	θ_1	θ_2		θ_1	θ_2	min j
d_1	8	0	d_1	0	7	7
d_2	2	4	d_2	6	0	**6**
d_3	1	7	d_3	7	0	7
(α)			(β)			

Ο λήπτης μας θα προτιμήσει τώρα την d_2, σύμφωνα με το κριτήριο του· επιπλέον είναι διατεθειμένος να πληρώσει μερικά λεφτά για να εξασφαλίσει την επιλογή αυτή. Ας του πάρουμε ξανά τα λεφτά, και ας του δώσουμε το αρχικό πρόβλημα. Είναι προφανές τι συμβαίνει: μία άσχετη απόφαση, με την έννοια ότι ποτέ δεν είναι βέλτιστη, αλλάζει την υπεροχή της αρχικής απόφασης. Είναι παρόμοια κατάσταση με το να προτιμάς να πας στο θέατρο αντί σε μία συναυλία, αλλά να προτιμάς το αντίθετο όταν σου δίνεται και μία τρίτη, επιλογή.

5 Υπολογισμός της χρησιμότητας

5.1 Χρηματική χρησιμότητα

Η χρησιμότητα είναι ένας αριθμός που μετράει την ελκυστικότητα μίας επίπτωσης. Όσο μεγαλύτερη είναι η χρησιμότητα, τόσο πιο επιθυμητή είναι η επίπτωση. Αρκετές φορές είναι δύσκολο να μετρήσουμε μία επίπτωση γιατί οι σχετικοί παράμετροι δεν ποσοτικοποιούνται. Ψυχολογικά, αισθητικά ή κοινωνικά στοιχεία δεν μετατρέπονται άμεσα και εύκολα σε αριθμούς. Γι' αυτό τον λόγο είναι απλούστερο ν' αρχίσουμε τον υπολογισμό της χρησιμότητας από περιπτώσεις που περιέχουν εξαρχής μία αριθμητική τιμή, δηλαδή όσων οι επιπτώσεις είναι αποκλειστικά χρηματικές. Σαν παραδείγματα μπορούν ν' αναφερθούν τα χρηματικά στοιχήματα, το χρηματιστήριο, οι ασφάλειες απώλειας υλικών αγαθών και όλες οι περιπτώσεις όπου η επιλογή κάποιας απόφασης μπορεί να εκφρασθεί με κάποιο χρηματικό ποσό.

Παράδειγμα 5.1. Ένας επενδυτής θέλει να επενδύσει K € σε μετοχές, για 3 μήνες. Στο τέλος της περιόδου αυτής οι μετοχές μπορεί να αξίζουν λιγότερο ή περισσότερο από το αρχικό ποσό αγοράς τους. Ας υποθέσουμε για απλούστευση ότι η τιμή τους θα είναι K+10.000 ή K−10.000. Έχουμε έτσι δύο αβέβαια ενδεχόμενα:

θ_1: αύξηση σε K+10.000 €

θ_2: μείωση σε K−10.000 €

Υπάρχουν προφανώς δύο αποφάσεις, d_1: να επενδύσει και d_2: να τα βάλει στην τράπεζα. Έτσι ο πίνακας απόφασης διαμορφώνεται όπως στον Πίνακα 14 (έχει υποτεθεί μηδενικό επιτόκιο κατάθεσης).

***Πίνακας* 14**: πίνακας αποπληρωμής επένδυσης

	θ_1: αύξηση μετοχών	θ_2: μείωση μετοχών
d_1: επένδυση	K+10.000	K−10.000
d_2: τράπεζα	K	K

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας περιέχει προς το παρόν τις επιπτώσεις, οι οποίες εκφράζονται σαν απόλυτοι αριθμοί του ποσού που θα έχει ο επενδυτής στο τέλος της περιόδου. Το πρόβλημά μας είναι να δώσουμε τιμές στους αριθμούς αυτούς, (K, K+10.000, K−10.000), ώστε να ανταποκρίνονται στις απαιτήσεις της χρησιμότητας. Με άλλα λόγια, ζητούμε μία συνάρτηση χρησιμότητας $u(x)$ που να περιγράφει την σχέση ανάμεσα στην χρησιμότητα και το συνολικό κεφάλαιο.

Η πρώτη προφανής παρατήρηση είναι ότι όσο αυξάνει το x θα πρέπει να αυξάνει και η $u(x)$. Μία δεύτερη ιδιότητα της $u(x)$ συνάγεται εξετάζοντας μεγάλες τιμές του x. Η ιδιότητα αυτή είναι ίσως λίγο δύσκολο να εκτιμηθεί από όσους δεν έχουν εμπειρία με μεγάλα χρηματικά ποσά. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να εκτιμήσουμε μία επίπτωση που θα μας αποφέρει 100.000.000 και μία δεύτερη που θα μας αποφέρει 101.000.000. Είναι σαφές ότι η διαφορά της χρησιμότητάς τους δεν θα είναι ίση με την διαφορά της χρησιμότητας δύο επιπτώσεων 1.000.000 και 2.000.000 αντίστοιχα.

Θα υπάρξει λοιπόν κάποιο σημείο όπου το επιπλέον κεφάλαιο δεν θα έχει επιπλέον χρησιμότητα. Για τον λόγο αυτό απαιτούμε από την συνάρτηση χρησιμότητας να είναι φραγμένη από πάνω. Όπως επίσης έχουμε υποθέσει, θα πρέπει να είναι φραγμένη και από κάτω, αφού το κεφάλαιο δεν μπορεί να είναι μικρότερο του 0, και έτσι σαν $u(0)$ θεωρούμε το 0. Παρόμοια θεωρούμε σαν άνω όριο την τιμή 1. Το αποτέλεσμα των υποθέσεων αυτών είναι ότι,

- η $u(x)$ είναι ***αύξουσα*** συνάρτηση του x και ***φραγμένη*****,** με κατώτερο όριο το 0 και ανώτερο το 1.

Ας γυρίσουμε στο Παράδειγμα 5.1, όπου υποθέσαμε ότι το αρχικό κεφάλαιο είναι K, και το τελικό

K+10.000. Τότε το κέρδος σε χρησιμότητα είναι $u(K+10.000)-u(K)$, και η διαφορά αυτή είναι **το *μέτρο της ικανοποίησης*** από τα επιπλέον 10.000 €. Τώρα, για τον περισσότερο κόσμο η ικανοποίηση θα εξαρτάται από το K, το αρχικό κεφάλαιο.

Αν το K είναι 10.000, το κέρδος αντιπροσωπεύει διπλασιασμό του κεφαλαίου. Αν το K είναι 1.000.0000, το κέρδος είναι αμελητέο. Οι δύο αυτές ακραίες περιπτώσεις, φανερώνουν ότι για τον περισσότερο κόσμο, η αύξηση της χρησιμότητας από μία αύξηση 10.000 €, ελαττώνεται όσο αυξάνεται το αρχικό κεφάλαιο. Η κατάσταση αυτή συνήθως αναφέρεται σαν αρχή της ***ελάττωσης της περιθωριακής χρησιμότητας***, όπου περιθωριακή χρησιμότητα ονομάζουμε την αύξηση της χρησιμότητας εξαιτίας της αύξησης του κεφαλαίου.

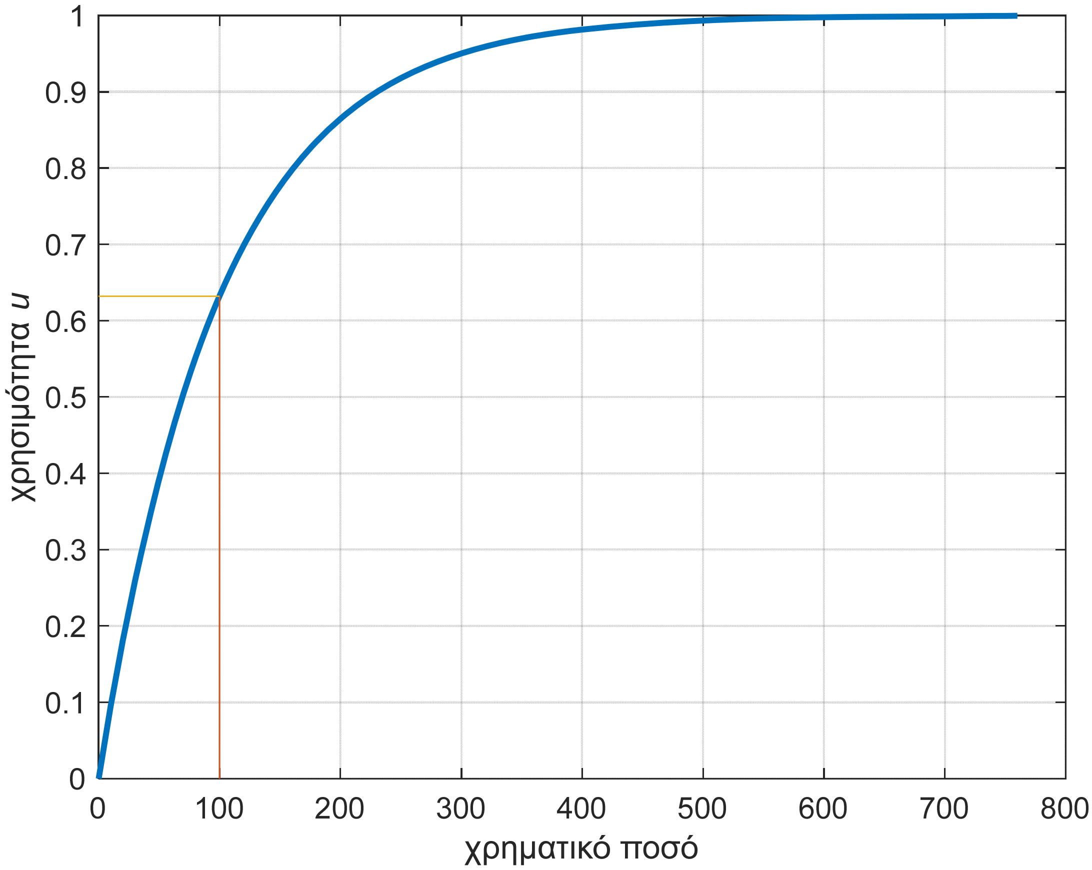
5.2 Παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας

Έχουμε μέχρι τώρα μερικές λογικές ιδιότητες για την $u(x)$:

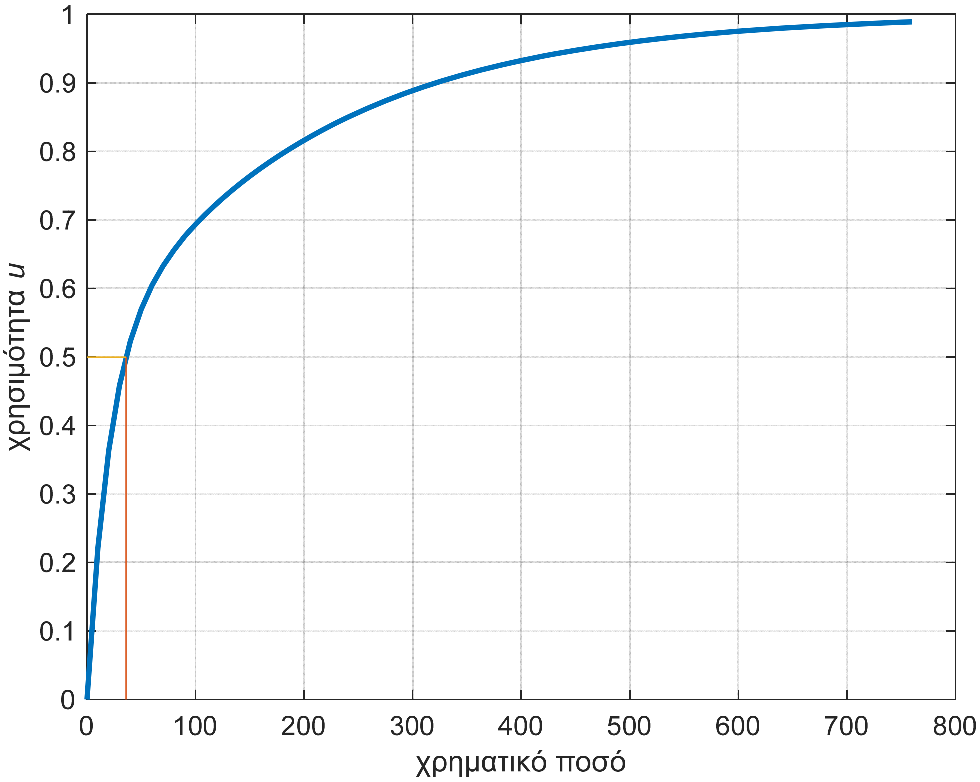
α) αύξουσα από $u(0) = 0$ έως ένα ανώτερο όριο $u(x) = 1$ (μονοτονικά φραγμένη).

β) η διαφορά $u(x+A)-u(x)$ μειώνεται όσο αυξάνεται το x.

Δύο τέτοιες συναρτήσεις φαίνονται στα Σχήματα 2, 3.



***Σχήμα* 2**: συνάρτηση χρηματικής χρησιμότητας για τον ΛΑΙ (σταθερή επιφύλαξη στο ριψοκίνδυνο)



***Σχήμα* 3:** συνάρτηση χρηματικής χρησιμότητας για τον ΛΑΙΙ (μειούμενη επιφύλαξη στο ριψοκίνδυνο)

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο άτομα που τα ονομάζουμε ΛΑΙ και ΛΑΙΙ, που χρησιμοποιούν τις δύο αυτές συναρτήσεις αντίστοιχα, για τον υπολογισμό των χρησιμοτήτων ή των ισοδυνάμων βεβαιότητας σε καταστάσεις λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα. Πριν συγκρίνουμε ποιοτικά τις δύο αυτές συναρτήσεις, που φαίνονται σε πρώτη ματιά παρόμοιες, ας πούμε δύο λόγια επεξηγηματικά.

Τα Σχήματα (2), (3) δείχνουν δύο παραδείγματα συναρτήσεων χρησιμότητας για χρηματικά ποσά. Έτσι στο Σχήμα 3 βλέπουμε ότι η χρησιμότητα 0,5 αντιστοιχεί σε 36 €.

Είναι απλό να δούμε ότι οι δύο αυτές συναρτήσεις έχουν όλες τις ιδιότητες που προαναφέραμε. Σίγουρα είναι αύξουσες, από το $u(0)=0$ έως το 1. Είναι επίσης εύκολο να δούμε ότι έχουν μειούμενη περιθωριακή χρησιμότητα. Για τους εντρυφώντες στα μαθηματικά, η ιδιότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την απαίτηση η δεύτερη παράγωγος της $u(x)$ να είναι αρνητική. Μία τέτοια συνάρτηση καλείται ***κοίλη***.

Από το Σχήμα 2, πολλαπλασιάζοντας τον άξονα των x επί 100, η συνάρτηση δίνει χρησιμότητα 0,632 στα 10.000 €. Με άλλα λόγια ο ΛΑΙ είναι αδιάφορος μεταξύ των καταστάσεων,

A: { 76.000 με πιθανότητα 0,632 } ή { 0 με πιθανότητα 0,368 }

B: { 10.000 με πιθανότητα 1}

που σημαίνει ότι δεν διατίθεται να δώσει πάνω από 10.000 € για να παίξει σ' ένα παιγνίδι που μπορεί να του αποδώσει 76.000 με πιθανότητα 0,632 (ο αριθμός 76.000 είναι η πλέον επιθυμητή κατάσταση δηλαδή η C_b, αφού σύμφωνα με το Σχήμα 2 έχει, οριακά, χρησιμότητα 1). Η τιμή αυτή όμως μπορεί να είναι αρκετά υψηλή για πολύ κόσμο, και γι' αυτό ίσως είναι πιο ρεαλιστικό να πολλαπλασιαστεί η οριζόντια κλίμακα επί 1.000, έτσι ώστε οι 100.000 να έχουν χρησιμότητα 0,632, η δε χρησιμότητα των 10.000 να μειωθεί στο 0,095, όση δηλαδή ήταν πριν των 1.000 €. Η συνάρτηση που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο είναι εντελώς διαφορετική από την αρχική, αλλά οποιαδήποτε από τις δύο μπορεί να χρησιμοποιηθεί στην κατάλληλη περίσταση.

Η πείρα δείχνει ότι οι περισσότεροι άνθρωποι θεωρούν ότι η χρησιμότητα των περιουσιακών τους στοιχείων είναι 0,5. Μία συνάρτηση με αυτή την ιδιότητα μπορεί να κατασκευασθεί πολλαπλασιάζοντας τον άξονα των x του Σχήματος 2 επί $K/70$. Παρόμοια, αν το Σχήμα 3 είναι καταλληλότερο, πολλαπλασιάζουμε επί $K/36$. Γενικότερες μέθοδοι υπολογισμού των συναρτήσεων χρησιμότητας, στη συνέχεια.

Για να δούμε την διαφορά των ΛΑΙ, ΛΑΙΙ ας ξαναγυρίσουμε στο Παράδειγμα 5.1. Για να ολοκληρωθεί ο ορισμός του προβλήματος χρειάζεται να ορισθεί η πιθανότητα της αύξησης της τιμής των μετοχών $p(\theta_1)$. Ας θεωρήσουμε επίσης ότι το αρχικό κεφάλαιο δεν είναι γνωστό, έστω K. Θα μελετήσουμε την εξάρτηση της λύσης από τα K, $p(\theta_1)$ και την συνάρτηση χρησιμότητας. Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν ότι K=10.000, η μικρότερη δυνατή τιμή (γιατί;) και ότι υιοθετούμε τους πίνακες με χιλιαπλάσια κλίμακα. Οι σχετικές χρησιμότητες είναι οι εξής:

***Πίνακας* 15**: χρησιμότητες αποφασιζόντων, K=10.000

€	**ΛΑΙ**	**ΛΑΙΙ**
20.000	0,181	0,364
10.000	0,095	0,221
0	0	0

Έτσι, για τον ΛΑΙ ο Πίνακας 14 γίνεται ως ο Πίνακας 16, ενώ για τον ΛΑΙΙ ως ο Πίνακας 17.

***Πίνακας* 16**: πίνακας απόφασης για ΛΑΙ, K=10.000

	θ_1: αύξηση μετοχών	θ_2: μείωση μετοχών
d_1: επένδυση	0,181	0
d_2: τράπεζα	0,095	0,095
	p	$1-p$

***Πίνακας* 17**: πίνακας απόφασης για ΛΑΙΙ, K=10.000

	θ_1: αύξηση μετοχών	θ_2: μείωση μετοχών
d_1: επένδυση	0,364	0
d_2: τράπεζα	0,221	0,221
	p	$1-p$

Για τον ΛΑΙ έχουμε,

$$\text{Π.Χ. }(d_1)=0{,}181p$$
$$\text{Π.Χ. }(d_2)=0{,}095$$

ενώ για τον ΛΑΙΙ,

$$\text{Π.Χ. }(d_1)=0{,}364p$$
$$\text{Π.Χ. }(d_2)=0{,}221$$

(**Π.Χ.**: προσδοκώμενη χρησιμότητα)

Συνάγεται λοιπόν ότι, για τον ΛΑΙ, ΠΧ(d_1) = ΠΧ(d_2) για p=0,52 και για τον ΛΑΙΙ, ΠΧ(d_1) = ΠΧ(d_2) για p=0,61. Με άλλα λόγια, ο ΛΑΙΙ ζητάει μεγαλύτερη πιθανότητα αύξησης των μετοχών για να επενδύσει απ' ότι ο ΛΑΙ. Η πιθανότητα αυτή πρέπει να είναι μεγαλύτερη του 0,61, έτσι ώστε:

$$\text{Π.Χ. }(d_1)>\text{Π.Χ. }(d_2)$$

Επειδή η τιμή που διαλέξαμε είναι ακραία περίπτωση, ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι K=100.000. Οι σχετικοί πίνακες απόφασης είναι:

Για τον ΛΑΙ,

***Πίνακας* 18**: πίνακας απόφασης για ΛΑΙ, K=100.000

	θ_1: αύξηση μετοχών (110.000)	**θ_2: μείωση μετοχών (90.000)**
d_1: επένδυση	0,667	0,593
d_2: τράπεζα	0,632	0,632
	p	$1-p$

και για τον ΛΑΙΙ,

***Πίνακας* 19**: πίνακας απόφασης για ΛΑΙΙ, K=100.000

	θ_1: αύξηση μετοχών (110.000)	**θ_2: μείωση μετοχών (90.000)**
d_1: επένδυση	0,709	0,676
d_2: τράπεζα	0,693	0,693
	p	$1-p$

Για τον ΛΑΙ,

$$\text{Π.Χ. }(d_1)=0{,}667p+0{,}593(1-p)$$
$$\text{Π.Χ. }(d_2)=0{,}632$$

Άρα,

$$\text{Π.Χ. }(d_1)=\text{Π.Χ. }(d_2) \text{ για } \underline{p=0{,}52}$$

όπως και προηγούμενα.

Παρόμοια για τον ΛΑΙΙ, βρίσκουμε $\underline{p=0{,}52}$.

Επομένως, συμπεραίνουμε ότι οι δύο λήπτες, θα είχαν την ίδια συμπεριφορά στην περίπτωση αυτή, δηλαδή θα προτιμούσαν την επένδυση μόνο αν η πιθανότητα επιτυχίας είναι 52%. Σαν αποτέλεσμα των αυξημένων περιουσιακών του στοιχείων, ο ΛΑΙΙ είναι διατεθειμένος να δεχθεί την επένδυση, έχοντας λιγότερη πιθανότητα επιτυχίας από πριν.

5.3 Επιφύλαξη στο ριψοκίνδυνο

Θα δείξουμε τώρα ότι ένας λήπτης απόφασης με <u>κοίλη</u> συνάρτηση χρησιμότητας, είναι κατά κάποιο τρόπο, που θα εξηγηθεί αμέσως, επιφυλακτικός στις ριψοκίνδυνες αποφάσεις και δεν του αρέσουν μερικά φαινομενικά ευνοϊκά στοιχήματα.

Ας υποθέσουμε ότι το κεφάλαιο είναι x και ότι υπάρχει ίση πιθανότητα κέρδους ή ζημίας A €, δηλαδή αν ο λήπτης αποδεχθεί το στοίχημα, θα έχει $x+A$ ή $x-A$ €. Εξαιτίας όμως της ιδιότητας της μειούμενης περιθωριακής χρησιμότητας,

$$u(x+A)-u(x)<u(x)-u(x-A)$$

ή,

$$u(x+A)+u(x-A)<2u(x)\Rightarrow \tfrac{1}{2}u(x+A)+\tfrac{1}{2}u(x-A)<u(x)$$

Το αριστερό μέλος είναι η προσδοκώμενη χρησιμότητα του στοιχήματος, ενώ το δεξιό η χρησιμότητα της μη αποδοχής. Επομένως με βάση την χρησιμότητα δεν συμφέρει τον λήπτη απόφασης να αποδεχθεί το στοίχημα.

Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να γενικευθεί για περιπτώσεις όπου υπάρχει πιθανότητα p κέρδους α και πιθανότητα $1-p$ ζημίας b, με την προϋπόθεση ότι είναι χρηματικά τίμιες, δηλαδή:

$$ap - b(1-p) = 0 \Rightarrow a = \frac{b(1-p)}{p} = \frac{b}{p} - b$$

Συμπερασματικά, ο λήπτης απόφασης με κοίλη συνάρτηση χρηματικής χρησιμότητας δεν θα αποδεχθεί ένα χρηματικά τίμιο στοίχημα. Ένας τέτοιος λήπτης καλείται ***επιφυλακτικός στο ριψοκίνδυνο.*** Υπενθυμίζουμε εδώ, ότι στην Ενότητα 4.12, χρησιμοποιώντας την έννοια του Ισοδύναμου Βεβαιότητας, είχαμε καταλήξει σε παρόμοιο συμπέρασμα. Η σχέση μεταξύ του Ι.Β. και της χρησιμότητας, φαίνεται αν θεωρήσουμε τη κατάσταση,

$$A: \begin{cases} \text{κεφάλαιο } x + a \text{ με πιθανότητα } 0{,}5 \\ \text{κεφάλαιο } x - a \text{ με πιθανότητα } 0{,}5 \end{cases}$$

Η χρησιμότητα του Ι.Β. θα είναι:

$$u(\text{Ι.Β.}) = 0{,}5u(x+\alpha) + 0{,}5u(x-\alpha)$$

Αν Ι.Β.=x (βάσει της προσδοκώμενης τιμής), βλέπουμε ότι η μέθοδος αυτή δεν συμφωνεί με την προϋπόθεση της μειούμενης περιθωριακής χρησιμότητας. Επομένως για τον επιφυλακτικό λήπτη απόφασης:

$$\text{Ι.Β.} < 0{,}5(x+\alpha) + 0{,}5(x-\alpha) \ (=\boldsymbol{x})$$

Το σκεπτικό αυτό μας δίνει μία άλλη μέθοδο υπολογισμού της καμπύλης χρησιμότητας που θα δούμε παρακάτω.

5.4 Τίμημα πιθανότητας

Έχουν ήδη γίνει μερικοί απλοί υπολογισμοί που καταδεικνύουν την έννοια του τίτλου. Όσον αφορά στην επένδυση του Παραδείγματος 5.1, είδαμε ότι για κάθε περίπτωση κεφαλαίου, η επένδυση δεν προτείνεται αν η πιθανότητα αύξησης των μετοχών είναι 0,5. Σε μία περίπτωση δε, η πιθανότητα έπρεπε να είναι 0,61 το λιγότερο, για να αξίζει η επένδυση.

Γενικά, ας είναι p η πιθανότητα που καθιστά ένα στοίχημα πάνω σε δύο αποτελέσματα, χρηματικά τίμιο. Ας είναι P η πιθανότητα που καθιστά το ίδιο στοίχημα τίμιο στην βάση της χρησιμότητας. Η διαφορά τους, $P-p$, καλείται ***τίμημα πιθανότητας*** του στοιχήματος. Στα παραδείγματα που εξετάσαμε, το τίμημα της πιθανότητας κυμαινόταν από 0,02 έως 0,11.

Το αποτέλεσμα της επιφυλακτικότητας στο ριψοκίνδυνο γίνεται εμφανέστερο όσο μεγαλώνουν τα νούμερα σε σχέση με την αρχική περιουσία. Ας θεωρήσουμε ότι ο ΛΑΠ έχει περιουσία 50.000 € και αντιμετωπίζει ένα στοίχημα που θα του αποφέρει ή θα τον ζημιώσει 50.000 €. Οι χρησιμότητες είναι 0,570 και 0,693 αντίστοιχα. Για ν' αποδεχθεί το στοίχημα, η προσδοκώμενη χρησιμότητα πρέπει να είναι τουλάχιστον ίση με την χρησιμότητα αν δεν στοιχηματίσει. Σε μορφή πίνακα,

	θ_1	θ_2
d_1	0,693	0
d_2	0,570	0,570
	p	$1-p$

Δηλαδή η κρίσιμη p δίνεται από την σχέση,

$$0{,}693p = 0{,}57 \text{ ή } p = 0{,}82$$

Το στοίχημα είναι χρηματικά τίμιο αν,

$$500p - 500(1-p) = 0 \text{ ή } \boldsymbol{p = 0{,}5}$$

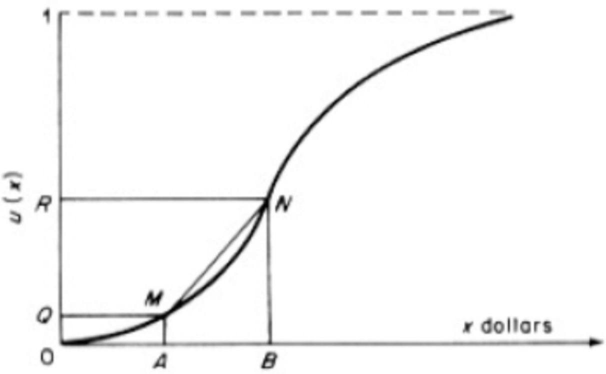
Έτσι, το τίμημα της πιθανότητας είναι,

$$Τ.Π.=0,82-0,50=0,32$$

Το συμπέρασμα αυτό συμφωνεί με την κοινή λογική, γιατί αυτός που παίζει το στοίχημα έχει πολλά να χάσει και έτσι θα ήθελε μεγάλη πιθανότητα επιτυχίας για να το αποδεχθεί.

Το φαινόμενο της επιφύλαξης στο ριψοκίνδυνο είναι απόρροια της υπόθεσης της μειούμενης περιθωριακής χρησιμότητας, που εκφράζεται καθαρά στην κοίλη μορφή των καμπυλών, στις οποίες η κλίση ελαττώνεται όσο ελαττώνονται τα περιουσιακά στοιχεία. Εάν η καμπυλότητα της γραφικής παράστασης είναι προς την αντίθετη έννοια, έτσι ώστε η κλίση να αυξάνεται, τότε έχουμε το αντίθετο φαινόμενο, και ο λήπτης απόφασης θα αποδέχεται ριψοκίνδυνα στοιχήματα. Η συνάρτηση στην περίπτωση αυτή καλείται ***κυρτή***.

Ας εξετάσουμε την συνάρτηση του Σχήματος 4. Παρατηρούμε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση χρησιμότητας είναι κυρτή για μικρά x, ενώ γίνεται κοίλη από κάποια τιμή και μετά. Το κυρτό τμήμα της καμπύλης περιγράφει καταστάσεις αντίστροφες από αυτές που περιγράψαμε πρωτύτερα. Έχουμε έτσι αρνητικά τιμήματα πιθανότητας και αύξουσα περιθωριακή χρησιμότητα. Ονομάζεται έτσι ***επιρρεπής στο ριψοκίνδυνο*****.**



Σχήμα 4: καμπύλη μορφής S

Έχει προταθεί ότι οι περισσότεροι άνθρωποι έχουν συνάρτηση χρησιμότητας με το γενικό σχήμα της καμπύλης του Σχήματος 4, δηλαδή κυρτό για μικρά κεφάλαια και κοίλο για μεγάλα. Η αποδοχή της πρότασης αυτής σημαίνει και την αποδοχή, για το κυρτό τμήμα της καμπύλης, του στοιχήματος που αναφέραμε παραπάνω ακόμα και αν είχαν πιθανότητα επιτυχίας μικρότερη από 0,5.

5.5 Είδη επιφυλακτικότητας στο ριψοκίνδυνο

Αν και η καμπυλότητα της συνάρτησης χρησιμότητας προφανώς επηρεάζει την επιφυλακτικότητα στο ριψοκίνδυνο, δεν είναι τόσο προφανές το πώς το μέγεθος της καμπυλότητας σχετίζεται με το μέγεθος της επιφυλακτικότητας. Για να καταδείξουμε την σχέση αυτή έχουμε δώσει δύο συναρτήσεις. Ο ΛΑΙ έχει σταθερή επιφυλακτικότητα, ενώ του ΛΑΙΙ η επιφυλακτικότητα μειώνεται, όσο αυξάνεται η περιουσία του. Πιο συγκεκριμένα, για τον ΛΑΙ, το τίμημα της πιθανότητας, όπως είδαμε, είναι σταθερό για κάθε x. Ο ΛΑΙ θα αναφέρεται λοιπόν σαν ***λήπτης απόφασης με σταθερή επιφυλακτικότητα στο ριψοκίνδυνο***. Αντίστοιχα, ο ΛΑΙΙ θα αναφέρεται σαν ***λήπτης απόφασης με μειούμενη επιφυλακτικότητα στο ριψοκίνδυνο***, με την έννοια ότι το τίμημα της πιθανότητας μειώνεται όσο αυξάνεται η περιουσία. Οι περισσότεροι από μας συμπεριφέρονται με τον τρόπο αυτό, δηλαδή η επιφυλακτικότητά μας μειώνεται όσο αυξάνεται η περιουσία μας. Για τον λόγο αυτό η συνάρτηση χρησιμότητας του Σχήματος 3 είναι πιο ρεαλιστική από αυτήν του Σχήματος 2. Βεβαίως, υπάρχουν πολλές συναρτήσεις χρησιμότητας που δίνουν μειούμενη επιφυλακτικότητα, και το Σχήμα 3 είναι απλά ένα παράδειγμα. Όμως η συνάρτηση που δίνει σταθερή επιφυλακτικότητα είναι μοναδική και είναι αυτή που φαίνεται στο Σχήμα 2.

Λεπτομερέστερα, το τίμημα της πιθανότητας, για ένα στοίχημα h είναι $p-1/2$, όπου η p ικανοποιεί,

$$u(x+h)p+u(x-h)(1-p)=u(x)$$
$$p=\frac{u(x)-u(x-h)}{u(x+h)-u(x-h)}$$

Για να μην εξαρτάται το p από το x πρέπει:

$$-\left(p-\frac{1}{2}\right)=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{2\{u(x+h)-u(x-h)\}}=\text{σταθερά}$$

ή,

$$\lim_{h\to 0}=\frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{2\{u(x+h)-u(x-h)\}}=\text{σταθερά}\Rightarrow\frac{u''(x)}{u(x)}=c$$

Η λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης, με $u(0)=0$, $u(\infty)=1$ είναι:

$$u(x)=1-\mathrm{e}^{-cx},\ c>0$$

όπου η c απλά επηρεάζει την κλίμακα του x.

Υπάρχει μία ευρύτερη κλάση συναρτήσεων χρησιμότητας με μειούμενη επιφυλακτικότητα στο ριψοκίνδυνο, όπως για παράδειγμα συναρτήσεις της μορφής,

$$1-w\mathrm{e}^{-\alpha x}-(1-w)\mathrm{e}^{-bx},\ \alpha,\ b>0,\quad 0<w<1$$

Το Σχήμα 3 είναι η συνάρτηση,

$$1-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{200}}-\tfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{20}}$$

5.6 Έμμεσοι μέθοδοι

Θα παρουσιάσουμε αρχικά δύο παρόμοιες μεθόδους για τον υπολογισμό της συνάρτησης χρηματικής χρησιμότητας για κάποιο λήπτη απόφασης: τη μέθοδο της ***σταθερής κατάστασης*** και τη μέθοδο της ***σταθερής πιθανότητας***.

5.6.1 Μέθοδος σταθερής κατάστασης

Ο λήπτης απόφασης υπολογίζει κατ' αρχάς ότι το αρχικό του κεφάλαιο K και στην συνέχεια θεωρεί μία τυχαία κατάσταση όπου μπορεί να κερδίσει Y ή να χάσει X, με αντίστοιχο τελικό κεφάλαιο $K+Y$ ή $K-X$. Κατόπιν ερωτάται για ποια πιθανότητα κέρδους, p, (αντίστοιχα $1-p$ για ζημία) είναι αδιάφορος μεταξύ του αρχικού του κεφαλαίου και του $K+Y$.

Εξισώνοντας τις χρησιμότητες, παίρνουμε,

$$u(K)=pu(K+Y)+(1-p)u(K-X)$$

Θέτοντας,

$$u(K+Y)=1$$
$$u(K-X)=0$$

παίρνουμε,

$$u(K)=p$$

Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για άλλα σημεία της συνάρτησης, και η τελική καμπύλη, αν είναι συνεχής, συμπληρώνεται με παρεμβολή. Πέντε σημεία είναι συνήθως αρκετά. Η μέθοδος αυτή, όπως περιγράφηκε, δεν εξασφαλίζει αυτόματα την απαιτούμενη συνοχή. Για να εξασφαλιστεί η συνοχή, ας θεωρήσουμε μία τέταρτη κατάσταση K_4, καλύτερη από τις προηγούμενες τρεις, (που τις ονομάζουμε K_1: $K-X$, K_2: K, K_3: $K+Y$. Τότε εκτός της προηγούμενης πιθανότητας, ας είναι p_2, ο λήπτης μπορεί να συγκρίνει το K_3 με ένα τυχαίο παιγνίδι μεταξύ K_2 και K_1, που θα δώσει μία νέα πιθανότητα p_3. Θέτοντας τώρα, $u(K_1)$=0, $u(K_4)$=1, έχουμε,

$$u(K_2)=p_2u(K_3)+(1-p_2)u(K_1)=p_2u(K_3)$$
$$u(K_3)=p_3u(K_4)+(1-p_3)u(K_2)=P_3+(1-p_3)u(K_2)$$

Λύνοντας το σύστημα ως προς $u(K_2)$, $u(K_3)$, έχουμε,

$$u(K_2)=\frac{p_2p_3}{1-p_2+p_2p_3}$$

$$u(K_3)=\frac{p_3}{1-p_2+p_2p_3}$$

Έχουν βρεθεί έτσι τέσσερις χρησιμότητες, και η συνοχή εξασφαλίζεται με μία επιπλέον σύγκριση μεταξύ K_2 και ενός τυχαίου παιγνιδιού μεταξύ K_1 και K_4. Αν p είναι η πιθανότητα αδιαφορίας, τότε,

$$u(K_2)=p=\frac{p_2p_3}{1-p_2+p_2p_3}$$

(αφού $u(K_1)$=0, $u(K_4)$=1).

Η γενική διαδικασία έχει ως εξής:

1. Επιλέγονται n σημεία κεφαλαίου: $K_1, K_2, ..., Kn \mid K_{i+1}>K_i$.
2. Τίθεται $u(K_1) = 0$, $u(K_n) = 1$.
3. Συγκρίνεται το K_i με τυχαίο παιγνίδι μεταξύ (K_{i-1}, K_{i+1}) για i=2, 3, ..., $n-1$. Οι πιθανότητες P_i ορίζουν έτσι τις χρησιμότητες $u(K_i)$.
4. Η συνοχή μπορεί να εξασφαλισθεί συγκρίνοντας περαιτέρω τα K_j με τυχαία παιγνίδια μεταξύ (K_i, K_l), $i<j<l$, με ζημία K_j-K_i και κέρδος K_l-K_j. Υπάρχουν βέβαια πολλές τέτοιες συγκρίσεις, αλλά θεωρητικά είναι έτσι δυνατή η εξασφάλιση της συνοχής.

5.6.2 Μέθοδος σταθερής πιθανότητας

Η μέθοδος αυτή είναι παρόμοια με την προηγούμενη, με τη διαφορά ότι ο λήπτης ερωτάται για το ποσό του κεφαλαίου που έχει συγκεκριμένη χρησιμότητα. Ας δούμε για παράδειγμα, πώς μπορεί να εξαχθεί μία καμπύλη χρησιμότητας για το Παράδειγμα 2.1. Τα οριακά αποτελέσματα είναι −80 και 240. Τα σημεία αυτά έχουν χρησιμότητα 0 και 1 αντίστοιχα. Έτσι,

$$u(-80)=0$$
$$u(240)=1$$

Στη συνέχεια συγκρίνουμε ένα τυχερό παιγνίδι μεταξύ (−80, 240) με ίση πιθανότητα 0,5, και του βέβαιου ενδεχομένου x. Ας υποθέσουμε ότι ο λήπτης δίνει 25. Τότε,

$$u(25)=0{,}5u(-80\ +0{,}5u(240)=0{,}5$$

Κατόπιν βρίσκουμε το ισοδύναμο βεβαιότητας για το παιγνίδι,

25 με πιθανότητα 0,5

240 με πιθανότητα 0,5

Ας είναι 130. Τότε,

$$u(130)=0,5u(25)+0,5u(240)=0,75$$

Τελικά, ας είναι το ισοδύναμο βεβαιότητας για το παιγνίδι,

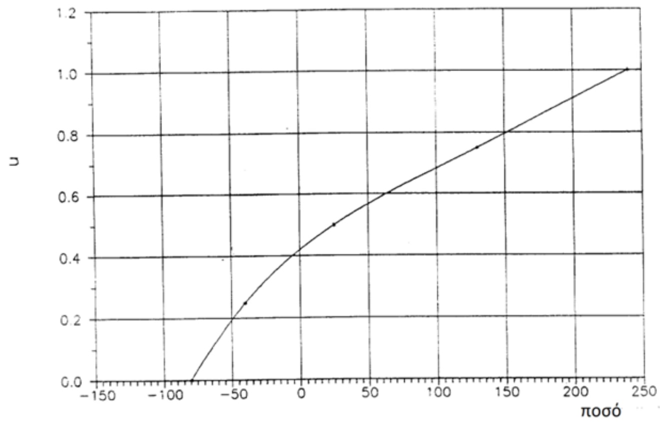
−80 με πιθανότητα 0,5

25 με πιθανότητα 0,5

ίσο με −40. Τότε,

$$u(-40)=0,5u(-80)+0,5u(25)=0,25$$

Η καμπύλη που προκύπτει με παρεμβολή μεταξύ των πέντε αυτών σημείων, φαίνεται στο Σχήμα 5.



***Σχήμα* 5**: συνάρτηση χρησιμότητας για το Παράδειγμα 2.1

Στις περιπτώσεις που οι επιπτώσεις δεν είναι χρηματικές, αλλά μπορεί να μετρηθούν με κάποια μονάδα μέτρησης, π.χ. ενέργεια, όγκος αποθεμάτων νερού, βαθμοί, ώρα κλπ, εφαρμόζονται οι μέθοδοι που είπαμε προηγουμένως. Στην ουσία, μία απλή διάταξη αρκεί. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.

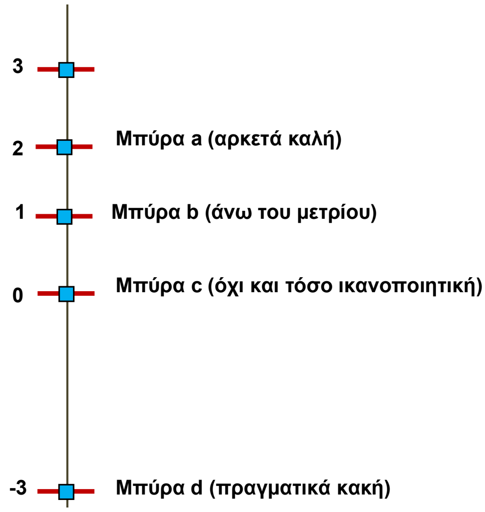
(α) Ποιότητα όρασης

Η ποιότητα όρασης μετράται σε μία κλίμακα από το 0 ως το 10. Το μηδέν αντιπροσωπεύει πλήρη τυφλότητα, ενώ το 10 τέλεια όραση. Οι ενδιάμεσοι αριθμοί, απλά αντιπροσωπεύουν τη διάταξη. Έτσι το 5 είναι καλύτερο από τους προηγούμενους αριθμούς, αλλά δεν σημαίνει ότι είναι 50% του 10. Ας φανταστούμε έναν ασθενή με όραση 1 που θέλει ν' αποφασίσει αν θα κάνει μία εγχείρηση που θα τον φέρει στο 6, αλλά υπάρχει και μία μικρή πιθανότητα να τυφλωθεί τελείως. Η απόφαση απαιτεί μία σύγκριση μεταξύ της C_1 και ενός τυχερού παιγνιδιού μεταξύ (C_0, C_6).

Το συγκεκριμένο παράδειγμα έχει κάποιο ενδιαφέρον, γιατί αν $u(C_0)=0$, $u(C_{10})=1$, τότε η $u(C_1)$ είναι αρκετά μεγάλη, ίσως 1/2 ή ακόμα και 2/3. Αυτό αντικατοπτρίζει τη σημασία που έχει, έστω η λίγη όραση. Επίσης η $u(C_5)$ είναι σχεδόν 1 γιατί με τη βοήθεια φακών μυωπίας, μπορεί να φτάσει στη $u(C_{10})$. Επομένως, η εγχείρηση θα πρέπει να επιχειρηθεί αν η πιθανότητα αποτυχίας της είναι πολύ μικρή.

(β) Ποιότητα μπύρας

Για την εύρεση χρησιμότητας μίας νέας μπύρας, ένας δοκιμαστής δοκιμάζει τέσσερις παραλλαγές, και του ζητείται να τις βαθμολογήσει σε μία κλίμακα από −3 έως 3. Η βαθμολογία του φαίνεται στο Σχήμα **6**.



***Σχήμα* 6**: βαθμολογία μπύρας

Σε όλες τις προηγούμενες μεθόδους έχει υποτεθεί ότι η χρησιμότητα είναι αύξουσα ή φθίνουσα. Υπάρχουν, όμως περιπτώσεις, όπου η χρησιμότητα αυξάνει μέχρις ενός σημείου και στη συνέχεια φθίνει. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του εφημεριδοπώλη, θα μπορούσε να υπολογισθεί κάποιο κόστος από τον δυσαρεστημένο αγοραστή. Έτσι, αν η ζήτηση θ_j είναι ίση με τα αγορασμένα φύλλα J, η χρησιμότητα είναι μέγιστη, όταν $j=J$. Η χρησιμότητα αυξάνει μέχρι το J και στη συνέχεια φθίνει.

6 Δένδρα απόφασης

6.1 Εισαγωγή

Τα προβλήματα απόφασης που μελετήσαμε μέχρι τώρα περιγράφηκαν σε πίνακες απόφασης ή αποπληρωμής. Η ανάλυση επίσης χρησιμοποίησε την μορφή αυτή των πινάκων. Η δομή των πινάκων είναι τέτοια ώστε οι γραμμές να αντιστοιχούν στις αποφάσεις, οι στήλες στα αβέβαια ενδεχόμενα και τα στοιχεία του πίνακα στις χρησιμότητες των επιπτώσεων. Οι πιθανότητες φαίνονται σε μία τελευταία γραμμή του πίνακα. Η ανάλυση για την βέλτιστη απόφαση συνίσταται στην ουσία στο σπάσιμο του πίνακα σε μικρότερα προβλήματα απόφασης, για το καθένα από τα οποία βρίσκουμε την χρησιμότητα της επίπτωσής του, θεωρώντας το σαν ισοδύναμο με ένα τυχερό παιγνίδι ανάμεσα στο καλύτερο και το χειρότερο αποτέλεσμα.

Εισάγοντας στη συνέχεια τη χρηματική χρησιμότητα, είδαμε ότι υπάρχουν κι άλλοι τρόποι για την περιγραφή των επιπτώσεων. Μπορούμε να βρούμε τη χρησιμότητά τους, χρησιμοποιώντας μία συνάρτηση χρησιμότητας, αποφεύγοντας έτσι την σύγκριση με το καλύτερο και χειρότερο αποτέλεσμα.

Στο κεφάλαιο αυτό σκοπεύουμε να παρουσιάσουμε μία άλλη μέθοδο, με την οποία ένα πρόβλημα απόφασης μπορεί να διαιρεθεί σε μικρότερα προβλήματα, τα οποία αφού λυθούν ξεχωριστά, μπορεί να επανασυνδυασθούν για να δώσουν την απάντηση στο αρχικό πρόβλημα. Η μέθοδος αυτή είναι ιδιαίτερα χρήσιμη όταν το αρχικό πρόβλημα μπορεί να διαιρεθεί σε τμήματα που ακολουθούν το ένα το άλλο σε κάποια φυσική σειρά, συνήθως χρονική. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως ***δένδρα απόφασης*****.**

Όπως και ένα πραγματικό δένδρο, ένα δένδρο απόφασης περιέχει διάφορα μέρη που ενεργούν μαζί, ή έχουν συνοχή. Η μέθοδος που προτείνεται, λύνει τα ευκολότερα προβλήματα που ανακύπτουν στα διάφορα μέρη του δένδρου και χρησιμοποιεί τους νόμους των πιθανοτήτων για να τα κάνει να έχουν συνοχή. Όπως και πριν, η συνοχή είναι η βασική πρωτοτυπία αυτής της μεθόδου.

6.2 Θεώρημα Bayes και πιθανοφάνεια

Η φυσική αντίδραση του καθένα μας όταν αντιμετωπίζει μία κατάσταση λήψης απόφασης κάτω από αβεβαιότητα, είναι να προσπαθήσει να απομακρύνει την αβεβαιότητα.

Ένας από τους τρόπους δηλαδή, να επιλέξουμε μεταξύ m αποφάσεων (d_1, d_2, ..., d_m) όταν είναι πιθανόν να συμβούν n ενδεχόμενα (θ_1, θ_2, ..., θ_n), είναι να βρούμε ποιο από τα θ_i θα συμβεί. Ο τρόπος αυτός όμως είναι εξαιρετικά σπάνιο να εφαρμοσθεί στην πράξη, αφού τα θ_i είναι γενικά μελλοντικά ενδεχόμενα. Ένας άλλος λόγος μπορεί να είναι το κόστος. Υπάρχει, παρ' όλα αυτά, μία μερική λύση. Ίσως να μην είναι δυνατόν να απομακρύνουμε όλη την αβεβαιότητα, αλλά μερικές φορές είναι εφικτό να την ελαττώσουμε. Έτσι κάποιος επενδυτής μπορεί να συμβουλευθεί τον χρηματιστή του, που ξέρει πιο πολλά. Ο κατασκευαστής μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία του για να δει τι ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων είχε στο παρελθόν.

Ο λήπτης απόφασης έχει αρχική πληροφορία $p(\theta_1)$, ..., $p(\theta_n)$. Αν αποκτήσει πλήρη πληροφορία, μία από αυτές θα γίνει μονάδα ενώ οι άλλες θα μηδενιστούν. Η μερική πληροφόρηση θα έχει λιγότερο κτυπητό αποτέλεσμα. Ας ονομάσουμε x τη νέα πληροφορία, και τις αναθεωρημένες πληροφορίες $p(\theta_1 \mid x)$, ..., $p(\theta_n \mid x)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Bayes, η σχέση των δύο αυτών συνόλων είναι:

$$p(\theta_j \mid x) = \frac{p(x \mid \theta_j) p(\theta_j)}{p(x)}$$

[Επισημαίνουμε ότι η πληροφορία x είναι επιπλέον της όποιας αρχικής H, που παραλείπουμε για απλοποίηση].

Αγνοώντας τον παρονομαστή $p(x)$, που είναι απλά παράγοντας αναγωγής, μπορούμε να γράψουμε,

$$p(\theta_j \mid x) \propto p(x \mid \theta_j) p(\theta_j)$$

Καλούμε την $p(\theta_j)$ ***πρότερη πιθανότητα***, την $p(\theta_j \mid x)$ ***ύστερη πιθανότητα*** (όπου η χρονική κλίμακα είναι ως προς x) και την $p(x \mid \theta_j)$ ***πιθανοφάνεια*** του θ_j.

6.3 Το πρόβλημα της επένδυσης σε μετοχές

Το παράδειγμα αυτό, που είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, θα το προσεγγίσουμε τώρα με την μέθοδο των δένδρων απόφασης. Ο επενδυτής έχει 500.000 κεφάλαιο και μπορεί να κερδίσει ή να χάσει 10.000 (Πίνακας 20). Η χρηματική χρησιμότητα υποτίθεται γραμμική στο πεδίο που εξετάζεται. Ο επενδυτής μπορεί επιπλέον να προσφύγει σε κάποιον σύμβουλο επιχειρήσεων ο οποίος για κάποια αμοιβή α θα τον συμβουλέψει.

***Πίνακας* 20**

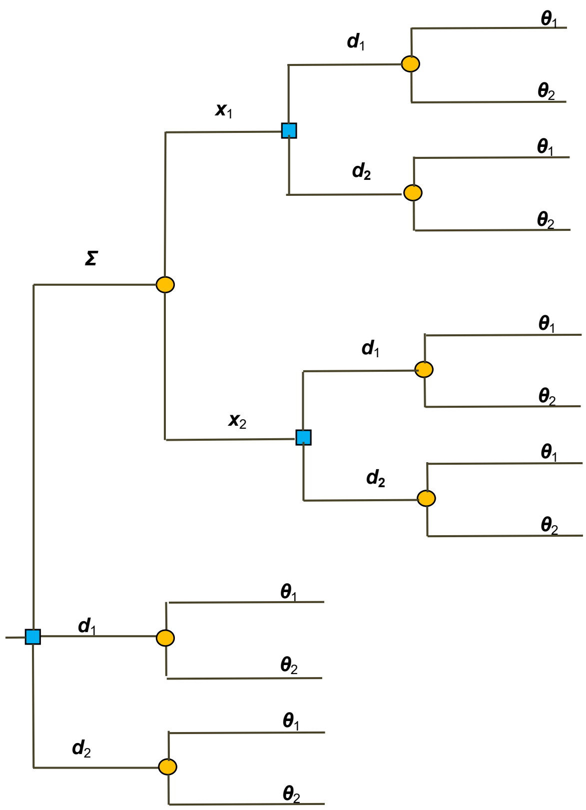
	θ_1: αύξηση μετοχών	**θ_2: μείωση μετοχών**
d_1: επένδυση	510.000	490.000
d_2: τράπεζα	500.000	500.000
	0,6	0,4

Η συμβουλή του θα είναι ότι θα αυξηθούν οι μετοχές (x_1) ή όχι (x_2). Η αξιοπιστία του συμβούλου δίνεται από τις πιθανότητες,

$$p(x_1 \mid \theta_1)=0,8 \ , \ p(x_2 \mid \theta_2)=0,7$$

Με άλλα λόγια ο επενδυτής πιστεύει ότι ο σύμβουλος έχει μεγαλύτερη ικανότητα να προβλέπει την αύξηση. Ο επενδυτής πρέπει να αποφασίσει αν θα πληρώσει για τη συμβουλή και αν θα αγοράσει μετοχές. Ένας από τους τρόπους προσέγγισης του προβλήματος αυτού, είναι η μορφοποίησή του ως δένδρο απόφασης.

Το αρχικό δένδρο απόφασης του προβλήματος φαίνεται στο Σχήμα 7. Αρχίζοντας από τα αριστερά, ο επενδυτής έχει αρχικά τρεις επιλογές: να συμβουλευθεί, να επενδύσει, να μην επενδύσει. Οι τρεις αυτές επιλογές απεικονίζονται από τα τρία πρώτα κλαδιά του δένδρου ως Σ, d_1, d_2. Ας ακολουθήσουμε το κλαδί που αντιστοιχεί στη συμβουλή. Αν συμβουλευθεί, δύο πράγματα μπορεί να συμβούν: να τον συμβουλεύσουν αύξηση, x_1, ή μείωση, x_2. Επομένως, το κλαδί αυτό χωρίζεται σε δύο. Για το καθένα από τα δύο αυτά κλαδιά ο επενδυτής πρέπει τελικά να επιλέξει μεταξύ d_1 και d_2. Έτσι, καθένα από τα δύο αυτά κλαδιά, διακλαδίζεται σε δύο ακόμη. Η διαδικασία αυτή χαρακτηρίζει πλήρως την δομή των αποφάσεων του προβλήματος, αλλά χρειάζεται ακόμη να προστεθούν δύο ακόμη κλαδιά σε καθένα από τα τελικά. Τα κλαδιά αυτά αντιπροσωπεύουν τα ενδεχόμενα θ_1, θ_2. Τα δύο άλλα αρχικά κλαδιά εξελίσσονται με την ίδια λογική. Έχουμε έτσι ένα πλήρες δένδρο που αποτελείται από μία σειρά κλαδιών, τα οποία αντιπροσωπεύουν αποφάσεις ή αποτελέσματα.



Σχήμα 7: αρχικό δένδρο απόφασης

6.3.1 Κόμβοι απόφασης και τυχαίοι κόμβοι

Ας θεωρήσουμε τώρα τα σημεία όπου τα κλαδιά διακλαδίζονται σε άλλα κλαδιά. Τα σημεία αυτά ονομάζονται ***κόμβοι*. ** Οι κόμβοι είναι δύο ειδών: ***απόφασης*** και ***τυχαίοι*.** Οι κόμβοι απόφασης συμβολίζουν σημεία όπου η επιλογή της οδού εξαρτάται από τον λήπτη απόφασης. Τέτοιος κόμβος είναι για παράδειγμα ο πρώτος. Οι κόμβοι αυτοί συμβολίζονται με τετράγωνα. Οι τυχαίοι κόμβοι συμβολίζουν καταστάσεις όπου η επιλογή της οδού δεν εξαρτάται από τον λήπτη απόφασης. Τέτοιοι είναι για παράδειγμα οι τρεις δεύτεροι κόμβοι. Οι τυχαίοι κόμβοι συμβολίζονται με κύκλους.

Ένα τυπικό δένδρο απόφασης αποτελείται λοιπόν από σειρές κλαδιών που ξεκινάνε από δύο είδη κόμβων, απόφασης ή τυχαίοι. Προχωρώντας από αριστερά προς τα δεξιά, τα δύο αυτά είδη κόμβων εναλλάσσονται (χωρίς αυτό να είναι απολύτως απαραίτητο). Κάθε κλαδί έχει μία πινακίδα. Αυτά που ξεκινάνε από κόμβο απόφασης, έχουν μία απόφαση, ενώ αυτά που ξεκινάνε από τυχαίο κόμβο περιγράφονται από ένα αβέβαιο ενδεχόμενο.

6.3.2 Πιθανότητες στους τυχαίους κόμβους

Η ανάλυση ενός δένδρου απόφασης περιλαμβάνει δύο είδη ποσοτήτων: πιθανότητες και χρησιμότητες. Θ' αρχίσουμε με τον υπολογισμό των πιθανοτήτων που αναφέρονται στα κλαδιά που ξεκινάνε από τυχαίους κόμβους. Οι πιθανότητες αυτές εξαρτώνται από την γνώση μας σε κάθε κόμβο. Ότι ακολουθεί, φαίνεται στο πλήρες δένδρο απόφασης του Σχήματος 8.

Ξεκινώντας από την βάση του δένδρου (αριστερά), ακολουθώντας την d_1, φθάνουμε στον τυχαίο κόμβο του οποίου τα κλαδιά αντιστοιχούν στα θ_1, θ_2. Προφανώς οι πιθανότητες που αντιστοιχούν είναι οι αρχικές, δηλαδή $p(\theta_1)=0{,}6$, $p(\theta_2)=0{,}4$. Παρόμοια για το κλαδί d_2. Για το τρίτο κλαδί η επιχειρηματολογία είναι διαφορετική. Ο πρώτος τυχαίος κόμβος εξαρτάται από το τι συμβουλή θα δοθεί. Χρειαζόμαστε λοιπόν τις $p(x_1)$, $p(x_2)$. Τη στιγμή αυτή δεν ξέρουμε αν θα συμβεί το θ_1 ή το

θ_2, ξέρουμε όμως τις $p(x_1 \mid \theta_1)$, $p(x_2 \mid \theta_2)$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα της ολικής πιθανότητας βρίσκουμε,

$$p(x_1)=p(x_1 \mid \theta_1)p(\theta_1)+p(x_1 \mid \theta_2)p(\theta_2)$$
$$p(x_2)=p(x_2 \mid \theta_1)p(\theta_1)+p(x_2 \mid \theta_2)p(\theta_2)$$

Τα σχετικά αποτελέσματα φαίνονται στον Πίνακα 21.

***Πίνακας* 21**: υπολογισμός πιθανοτήτων δένδρου απόφασης

		πρότερες $p(\theta_i)$	πιθανοφάνεια $p(x_i \mid \theta_j)$		γινόμενο	ύστερες $p(\theta_j \mid x_i)$
x_1:	θ_1	0,6	0,8		0,48	0,8
	θ_2	0,4	0,3		0,12	0,2
				$p(x_1)$	0,6	
x_2:	θ_1	0,6	0,2		0,12	0,3
	θ_2	0,4	0,7		0,28	0,7
				$p(x_2)$	0,4	

Οι τιμές για τις $p(x_1)$, $p(x_2)$ τοποθετούνται στα κατάλληλα κλαδιά που ξεκινάνε από τον τυχαίο κόμβο. Προχωρώντας, φθάνουμε στους κόμβους απόφασης όπου πρέπει να ληφθεί απόφαση, έχοντας πάρει την συμβουλή. Στη συνέχεια φθάνουμε στους τυχαίους κόμβους που αντιστοιχούν στα θ_1, θ_2. Ας εξετάσουμε τον πάνω κόμβο, που αντιστοιχεί στη συμβουλή αύξησης x_1 και στην απόφαση να γίνει δεκτή η συμβουλή d_1. Οι σχετικές πιθανότητες είναι τώρα οι $p(\theta_1 \mid x_1)$ και $p(\theta_2 \mid x_1)$. Από το θεώρημα Bayes,

$$p(\theta_i \mid x_1) = \frac{p(x_1 \mid \theta_i)p(\theta_i)}{p(x_1)}, \quad i = 1,2$$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στην τέταρτη στήλη του Πίνακα 21. Αντίστοιχοι υπολογισμοί μπορεί να γίνουν και για τα άλλα κλαδιά και τυχαίους κόμβους, και τα αποτελέσματα φαίνονται στο δένδρο απόφασης του προβλήματος (Σχήμα 8).

Η αρχή που διέπει τους μέχρι τώρα υπολογισμούς είναι απλή. Από κάθε τυχαίο κόμβο ξεκινάνε κλαδιά τα οποία αντιστοιχούν σε τυχαία ενδεχόμενα με αντίστοιχες πιθανότητες που εξαρτώνται (δεσμευμένες) από όλη την προηγούμενη γνώση μέχρι την βάση του δένδρου. Οι πιθανότητες των διαφόρων τμημάτων του δένδρου πρέπει να έχουν συνοχή, πράγμα που επιτυγχάνεται ακολουθώντας τους νόμους των πιθανοτήτων. Αυτή είναι και η γενική αρχή για τον υπολογισμό των πιθανοτήτων κάθε δένδρου απόφασης.

6.3.3 Ανάλυση του δένδρου απόφασης

Έχοντας τελειώσει τον υπολογισμό των πιθανοτήτων για το δένδρο, απομένει να εκτιμήσουμε τις χρησιμότητες, ή για το συγκεκριμένο πρόβλημα, τις χρηματικές αξίες, αφού η χρησιμότητα υποτέθηκε γραμμική ως προς την χρηματική αξία.

Τα τελικά κλαδιά θα έχουν χρησιμότητα που αντιστοιχούν στις επιπτώσεις που είναι αποτέλεσμα των συγκεκριμένων αποφάσεων και αβέβαιων ενδεχομένων.

Για παράδειγμα, η επάνω δεξιά γωνία αντιστοιχεί στην συμβουλή x_1 και στην απόφαση d_1, με αύξηση της αξίας των μετοχών. Η σειρά αυτή έχει σαν αποτέλεσμα την αύξηση του κεφαλαίου σε 510.000 μείον την αμοιβή του συμβούλου. Οι άλλες χρησιμότητες των τελικών κλαδιών υπολογίζονται παρόμοια με την βοήθεια του πίνακα απόφασης.

Οι χρησιμότητες των άλλων σημείων υπολογίζονται ως εξής: ξεκινώντας από τα τελικά κλαδιά, προχωρούμε προς την βάση του δένδρου. Σε κάθε τυχαίο κόμβο υπολογίζουμε την προσδοκώμενη χρησιμότητα, και σε κάθε κόμβο απόφασης επιλέγουμε το κλαδί με την μέγιστη προσδοκώμενη χρησιμότητα. Οι υπολογισμοί φαίνονται στο δέντρο του προβλήματος.

Στην βάση του δένδρου, όπου υπάρχει κόμβος απόφασης, υπάρχουν τρεις επιλογές: να ζητηθεί συμβουλή με προσδοκία $503.600-\alpha$, να αγορασθούν μετοχές με προσδοκία 502.000 και να μείνουν τα λεφτά στην τράπεζα με προσδοκία 500.000. Προφανώς η τελευταία λύση αποκλείεται. Η πρώτη είναι επιθυμητή αν η αμοιβή είναι λιγότερη από 1.600 €, που είναι η προσδοκώμενη αξία της πληροφορίας που μπορεί να παρέχει ο σύμβουλος. Για τον όρο αυτό θα αναφερθούμε διεξοδικότερα παρακάτω. Για παράδειγμα αν α=800 €, θα πρέπει να ζητηθεί η συμβουλή, ενώ αν α=2000 € είναι προτιμότερο να αγορασθούν οι μετοχές χωρίς συμβουλή με προσδοκώμενο αποτέλεσμα 502.000 €.

Συνοπτικά η μέθοδος του δένδρου απόφασης αποτελείται από τα εξής βήματα:

1. Το δένδρο σχεδιάζεται με χρονολογική σειρά. Τα κλαδιά παριστούν αποφάσεις και τυχαία ενδεχόμενα με την χρονική σειρά που συμβαίνουν.
2. Υπολογίζονται οι πιθανότητες που αντιστοιχούν στα κλαδιά που ξεκινάνε από τυχαίους κόμβους με οποιαδήποτε συνεκτική μέθοδο.
3. Υπολογίζονται οι χρησιμότητες των τελικών κλαδιών.
4. Αρχίζοντας από το τέλος (δεξιά) και προχωρώντας προς την βάση του δένδρου (αριστερά), υπολογίζονται οι προσδοκώμενες χρησιμότητες των τυχαίων κόμβων και επιλέγονται οι αποφάσεις που μεγιστοποιούν τις χρησιμότητες.

Η μέθοδος έχει ευρεία εφαρμογή και είναι ιδιαίτερα κατάλληλη για εφαρμογή στον υπολογιστή, αφού χρειάζονται μόνο δύο ειδών πράξεις στο βήμα 4, δηλαδή μεγιστοποίηση και εύρεση προσδοκίας. Η κύρια προγραμματιστική δυσκολία είναι η αποθήκευση της πληροφορίας με κάποιο τρόπο που να διευκολύνει την ανάκτησή της.

Στις πρακτικές εφαρμογές, τα δύσκολα βήματα είναι τα (1)-(3), τα οποία περιέχουν την περιγραφή του δένδρου και την ποσοτική αναπαράσταση των πεποιθήσεων και αξιών.

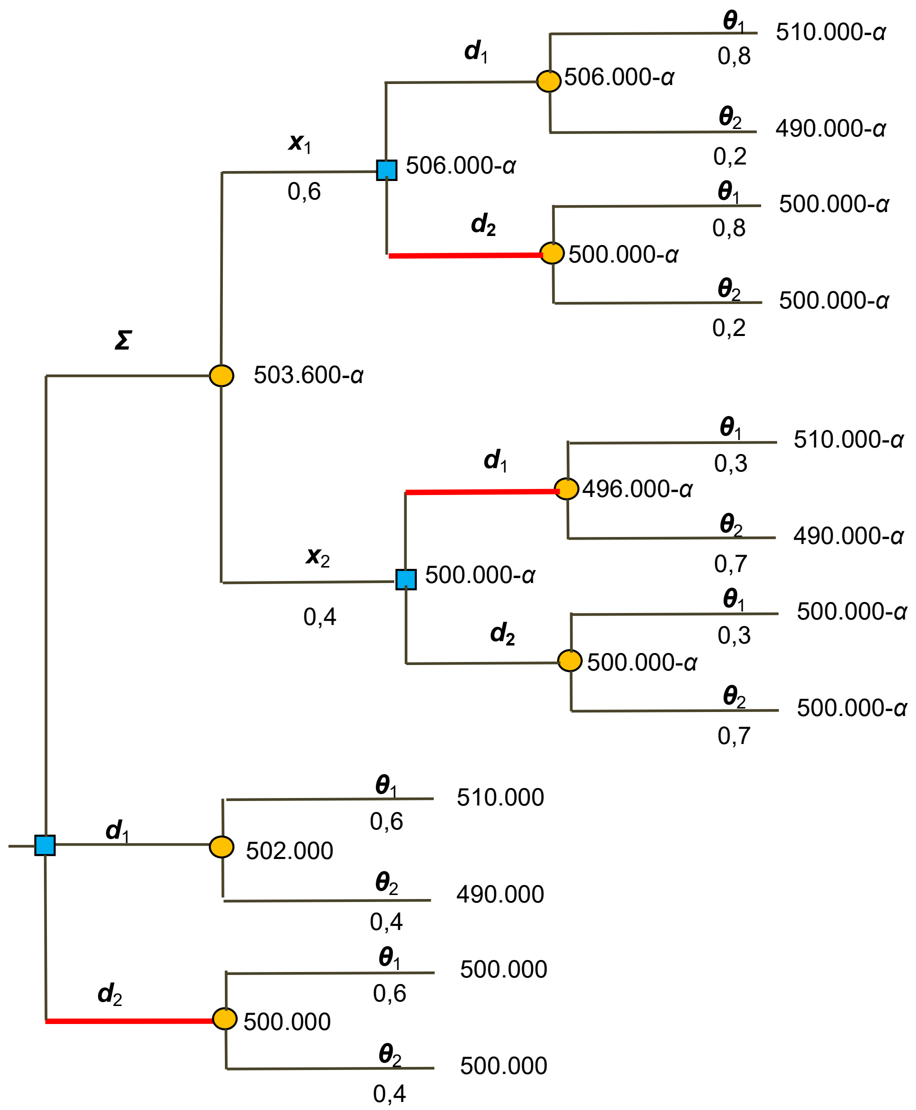
Υπάρχει ένα ηθικό δίδαγμα από την παραπάνω ανάλυση. Παρατηρούμε ότι οι υπολογισμοί αρχίζουν από τα ενδεχόμενα που συμβαίνουν στο τέλος του χρόνου και τελειώνουν στα ενδεχόμενα που συμβαίνουν στην αρχή του χρόνου.

Δεν μπορεί δηλαδή να αποφασισθεί αν θα ρωτηθεί ο σύμβουλος χωρίς να έχει αποφασισθεί τι θα γίνει με την συμβουλή του. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η συμβουλή γίνεται δεκτή. Το σημείο αυτό είναι πολύ λεπτό: δεν μπορούμε να αποφασίσουμε τι θα κάνουμε σήμερα αν δεν ξέρουμε τι θα κάνουμε αύριο με τα αποτελέσματα των σημερινών πράξεων μας. Αυτό μπορεί να είναι ένα δυσάρεστο αλλά αναμφισβήτητο αποτέλεσμα.

Μία άλλη έκφραση της ίδιας αρχής, δίνεται από την ***αρχή της βελτιότητας*** που διατύπωσε ο R. Bellman το 1951 [5]:

Αρχή βελτιότητας: μία βέλτιστη στρατηγική αποτελείται από μία σειρά βέλτιστων αποφάσεων, κάθε μία από τις οποίες δεν εξαρτάται από την πορεία που ακολουθήθηκε μέχρι τη λήψη της.

Η αρχή αυτή αποτέλεσε τη βάση για την ανάπτυξη της μεθοδολογίας του ***δυναμικού προγραμματισμού***.



***Σχήμα* 8**: τελικό δένδρο απόφασης

6.3.4 Παραδείγματα

Α. <u>Παράδειγμα 6.1: νέο προϊόν</u>

Μία εταιρεία νημάτων αντιμετώπιζε το 1963 το δίλημμα της ανάπτυξης ή όχι πολυεστέρα κατάλληλου για την ενίσχυση ελαστικών αυτοκινήτου.

Αν η εταιρεία αποφασίσει την ανάπτυξη του πολυεστέρα, η κρίσιμη παράμετρος είναι αν η ασφάλεια που θα προσφέρει το νέο προϊόν θα είναι μεγαλύτερη από αυτήν του ήδη χρησιμοποιουμένου νάυλον. Στη συνέχεια η εταιρεία θα πρέπει να αποφασίσει αν θα παράγει το προϊόν ή όχι, η δε επιτυχία του παραγομένου προϊόντος θα εξαρτηθεί από τον συναγωνισμό. Υπάρχουν λοιπόν οι παρακάτω πιθανές αποφάσεις:

d_1: ανάπτυξη και παραγωγή αν είναι <u>ανώτερο</u> του νάυλον.

d_2: ανάπτυξη και παραγωγή αν είναι <u>κατώτερο</u> του νάυλον.

d_3: ανάπτυξη και μη παραγωγή αν είναι ανώτερο του νάυλον.

d_4: ανάπτυξη και παραγωγή αν είναι κατώτερο του νάυλον.

d_5: μη ανάπτυξη

ενώ τα αβέβαια ενδεχόμενα είναι τα,

θ_1: ανώτερο του νάυλον

θ_2: κατώτερο του νάυλον

θ_3: ανταγωνιστικό προϊόν

θ_4: μη ανταγωνιστικό προϊόν

Παρατηρούμε ότι τα θ_i δεν είναι αλληλοαποκλειόμενα ενδεχόμενα, και έτσι δεν μπορεί να χρησιμοποιηθούν στον γνωστό μας πίνακα αποπληρωμής. Η δομή του προβλήματος προσφέρεται όμως για την απεικόνιση του σε δένδρο απόφασης. Χρειάζονται επίσης ορισμένες πιθανότητες για τα αβέβαια ενδεχόμενα, τις οποίες το Συμβούλιο της εταιρείας εκτίμησε ως,

$p(\theta_1)=0,2$
$p(\theta_2)=0,3$

Με τα δεδομένα αυτά κατασκευάζουμε το δένδρο του Σχήματος 9. Οι τελικές τιμές για κάθε δυνατή αλληλουχία αποφάσεων και αβέβαιων ενδεχομένων δίνονται σε εκατομμύρια ευρώ στη δεξιά στήλη.

Ας αρχίσουμε την ανάλυση, θεωρώντας μία γραμμική σχέση μεταξύ της χρησιμότητας και της χρηματικής τιμής. Ξεκινώντας από τον τυχαίο κόμβο 6, υπολογίζουμε την προσδοκώμενη χρησιμότητα,

Π.Χ. κόμβου 6: $0,3(-15)+0,7(-2)=-5,9$

Παρόμοια για τον 5,

Π.Χ. κόμβου 5: $0,3\times10+0,7\times30=24$

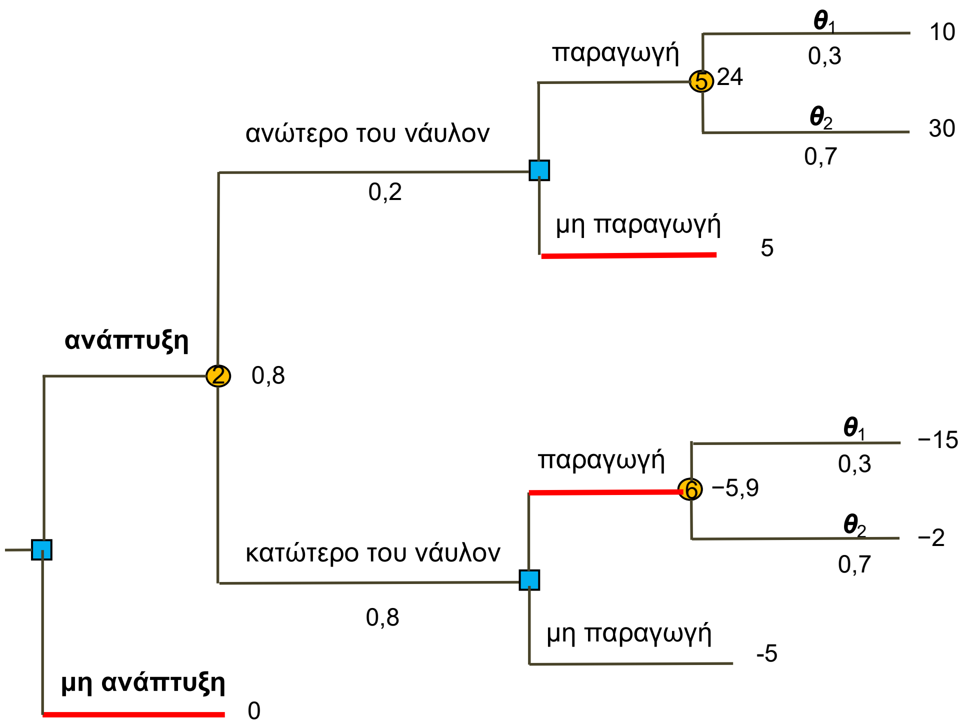
Έτσι στους κόμβους απόφασης 3 και 4 επιλέγονται οι αποφάσεις «παραγωγή» και «μη παραγωγή» αντίστοιχα, αφού,

Π.Χ. (παραγωγής): $24>-5$
Π.Χ. (μη παραγωγής): $-5,9<-5$

Στη συνέχεια, εξετάζουμε τον τυχαίο κόμβο 2 με χρησιμότητες 24, −5. Η προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι,

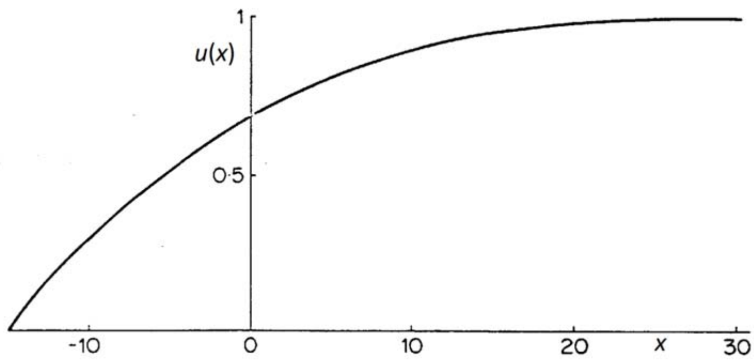
Π.Χ. κόμβου 2: $24\times0,2+(-5)\times0,8=0,8$

Τελικά, αφού $0,8 > 0$, επιλέγεται στον κόμβο απόφασης 1 η ανάπτυξη του πολυεστέρα, με το ενδεχόμενο να μην παραχθεί αν το προϊόν δεν είναι επιτυχές.



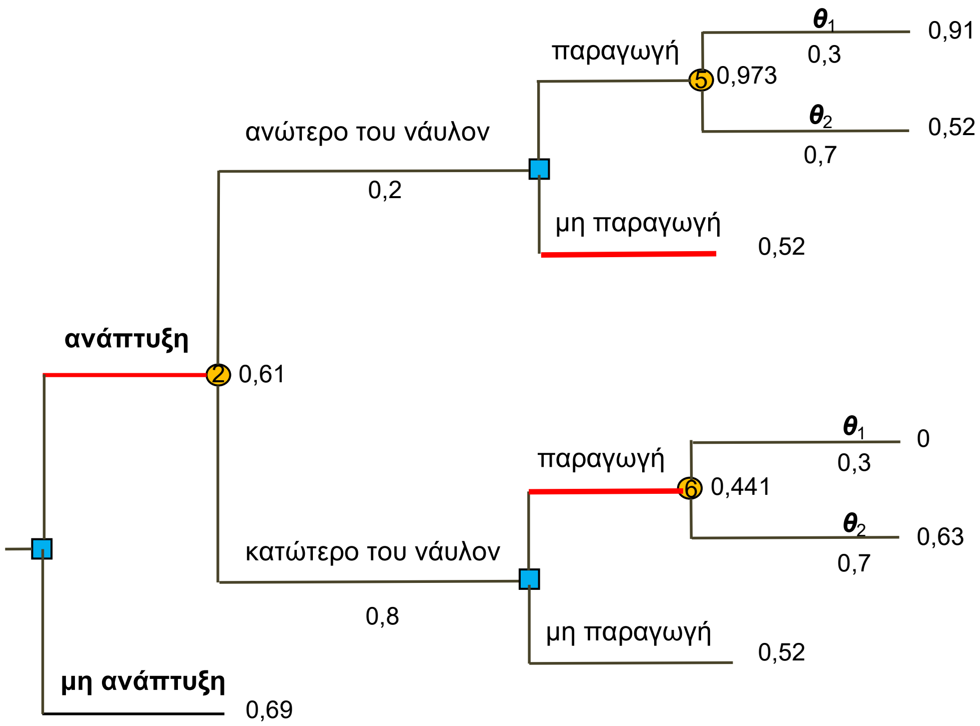
***Σχήμα* 9**: δένδρο απόφασης νέου προϊόντος

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το Συμβούλιο της εταιρείας είναι επιφυλακτικό στον κίνδυνο, πράγμα που εκφράζεται από την καμπύλη χρησιμότητας του Σχήματος 10.



***Σχήμα* 10**: συνάρτηση χρησιμότητας νέου προϊόντος

Η ανάλυση παραμένει παρόμοια με πριν, με τη διαφορά ότι τα χρηματικά ποσά αντικαθίστανται από τη χρησιμότητά τους. Το αποτέλεσμα φαίνεται στο Σχήμα 11.



***Σχήμα* 11**: δένδρο απόφασης νέου προϊόντος με χρησιμότητες

Η βέλτιστη απόφαση είναι τώρα να μην αναπτυχθεί το προϊόν, γιατί η επιφυλακτικότητα που εμπεριέχεται στη συνάρτηση χρησιμότητας, μειώνει την προσδοκώμενη χρησιμότητα της επιλογής της ανάπτυξης.

Β. Παράδειγμα 6.2: πρότυπο πρόβλημα

Ας είναι 1000 δοχεία, το καθένα από τα οποία μπορεί να είναι δύο ειδών:

θ_1: με 4 κόκκινες σφαίρες και 6 μαύρες

θ_2: με 9 κόκκινες σφαίρες και 1 μαύρη

Το περιεχόμενο των δοχείων δεν φαίνεται και το παιγνίδι συνίσταται στην εύρεση της ταυτότητας τυχαίων δοχείων. Πιο συγκεκριμένα, ο παίκτης μπορεί να πάρει τρεις αποφάσεις:

d_1: να πει ότι το δοχείο είναι τύπου θ_1

d_2 : να πει ότι το δοχείο είναι τύπου θ_2

d_3 : να μην παίξει

Επιπλέον είναι γνωστό ότι υπάρχουν 800 δοχεία $\{\theta_1\}$ και 200 $\{\theta_2\}$. Οι αποπληρωμές φαίνονται στον Πίνακα 22 (σε κάποια νομισματική μονάδα).

***Πίνακας* 22**: πίνακας αποπληρωμής πρότυπου προβλήματος

	θ_1	θ_2
d_1	40	−20
d_2	−5	100
d_3	0	0
$p(\theta_j)$	0,8	0,2

Είναι επίσης δυνατόν να αποκτηθεί επιπλέον πληροφορία, η οποία θα βοηθήσει στην επιλογή της απόφασης με τη διεξαγωγή ενός από τα παρακάτω πειράματα:

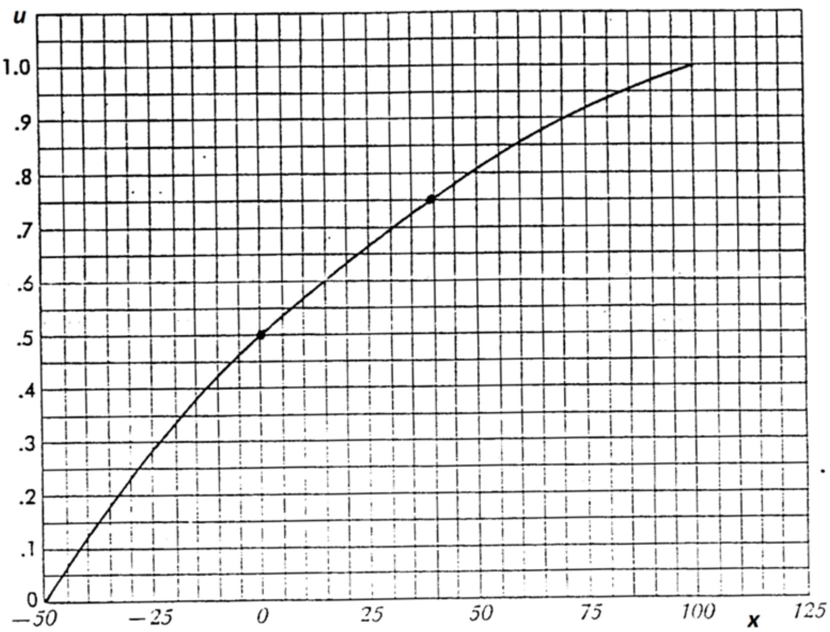
π_1: πληρώνοντας 8 μπορείς να δεις μία σφαίρα από το άγνωστο δοχείο.

π_2: πληρώνοντας 12 μπορείς να δεις δύο σφαίρες από το άγνωστο δοχείο.

π_ε: πληρώνοντας 9 μπορείς να δεις μία σφαίρα από το άγνωστο δοχείο και στη συνέχεια μπορείς να αποφασίσεις αν θα δεις και άλλη μία αντί 4,5. Έχεις επίσης το δικαίωμα να αποφασίσεις, χωρίς χρέωση, αν θα αντικαταστήσεις τη πρώτη σφαίρα πριν δεις τη δεύτερη.

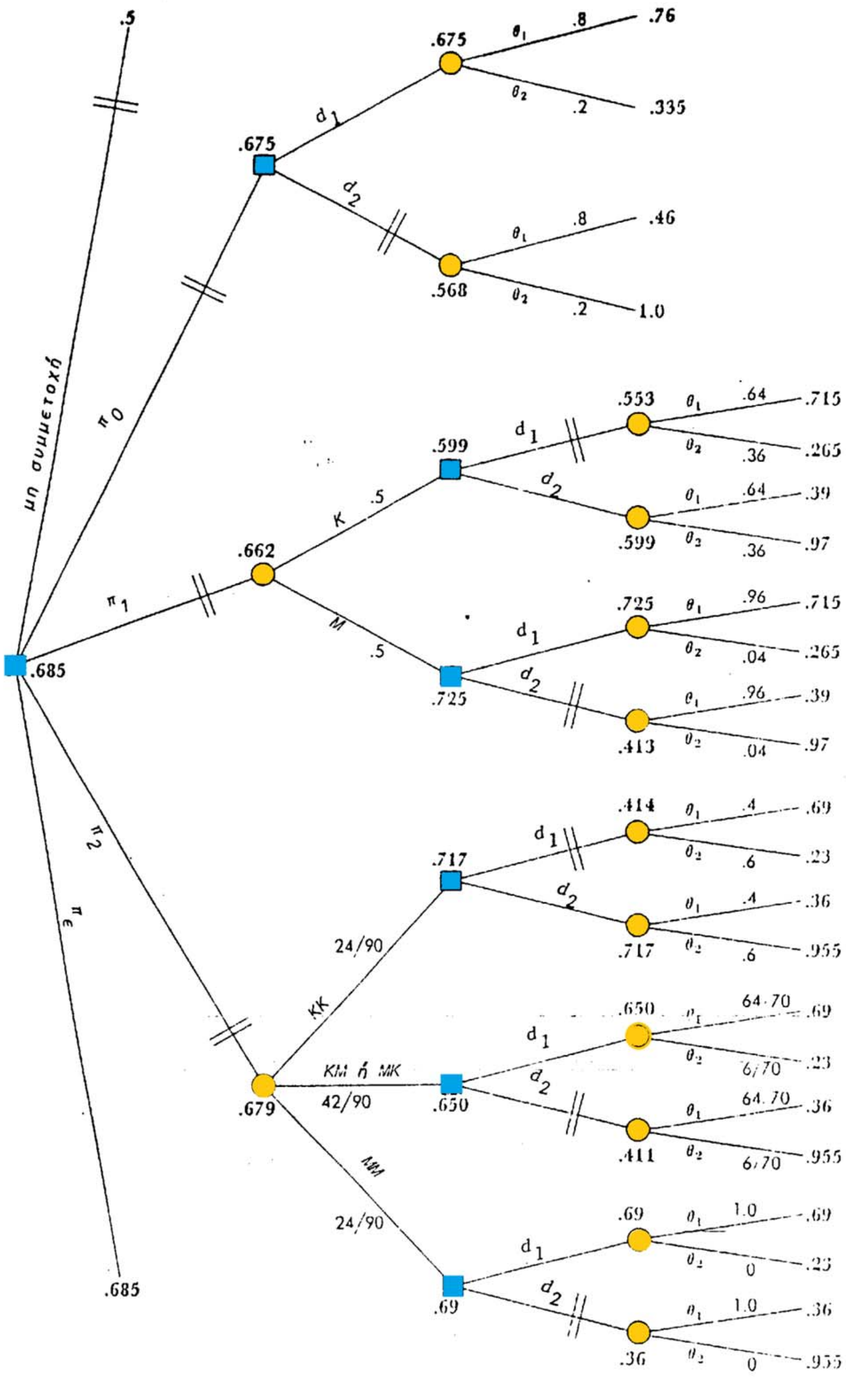
Ανάλυση του προβλήματος

Ας υποθέσουμε ότι ο λήπτης αποφασίζει με βάση την καμπύλη χρησιμότητας του Σχήματος 12.

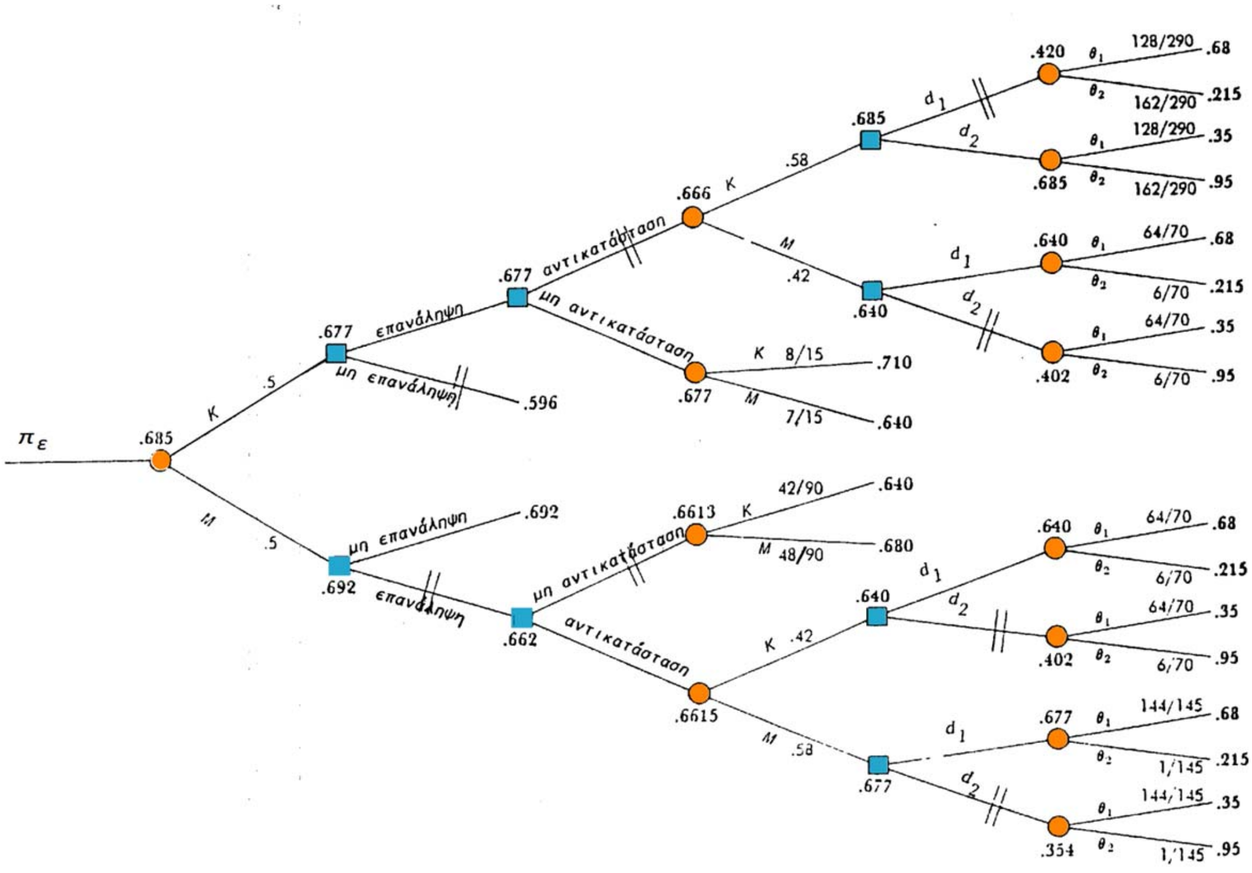


***Σχήμα* 12**: συνάρτηση χρησιμότητας πρότυπου προβλήματος

Το δένδρο απόφασης με τις αντίστοιχες πιθανότητες των τυχαίων κόμβων φαίνεται στα Σχήματα 13, 14.



***Σχήμα* 13**: δένδρο απόφασης πρότυπου προβλήματος



***Σχήμα* 14**: δένδρο απόφασης για το πρότυπο πρόβλημα-κλάδος π_ε

Ας εξετάσουμε κατ' αρχάς τον κλάδο π_1. Οι τελικές χρησιμότητες του κλάδου αυτού, όπως και όλων, των άλλων έχουν υπολογιστεί με βάση τη συνολική αποπληρωμή. Έτσι για παράδειγμα,

$$0{,}715 = u(40-8)$$
$$0{,}39 = u(-5-8)$$

Οι πιθανότητες των κλάδων εξάγονται ως εξής:

Έστω ότι έχει ακολουθηθεί η σειρά π_1, K(όκκινη), d_1. Ποια είναι η πιθανότητα του ενδεχομένου θ_1; Προφανώς πρέπει να υπολογίσουμε την τιμή $p(\theta_1 \mid K)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes,

$$p(\theta_i \mid K) = \frac{p(K \mid \theta_i)p(\theta_i)}{p(K)}$$

Ξέρουμε τις,

$$p(\theta_1)=0{,}8,\ p(K \mid \theta_1)=0{,}4$$

και,

$$p(K)=p(K \mid \theta_1)p(\theta_1)+p(K \mid \theta_2)p(\theta_2)=0{,}50$$

Επομένως,

$$p(\theta_1 \mid K)=0{,}64$$

Με παρόμοια μέθοδο βρίσκουμε και τις υπόλοιπες τιμές που βρίσκονται ομαδοποιημένες στον Πίνακα 23.

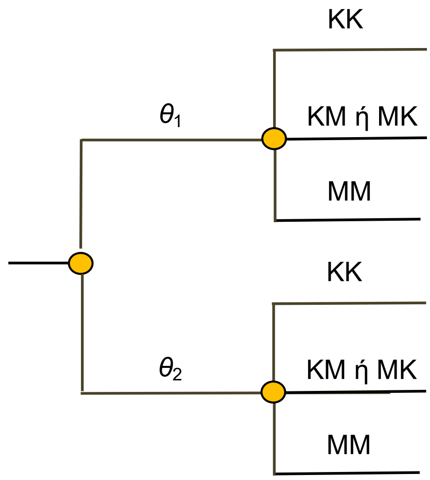
***Πίνακας* 23:** πίνακας αποπληρωμής πρότυπου προβλήματος

	θ_1	θ_2	p
K	0,8×0,4=0,32	0,2×0,9=0,18	0,50
M	0,8×0,6=0,48	0,2×0,1=0,02	0,50
p	0,80	0,20	
$p(\theta_j \mid K)$	0,64	0,96	

Έχοντας όλες τις πιθανότητες και τις χρησιμότητες στη διάθεσή μας, μπορούμε να υπολογίσουμε την προσδοκώμενη χρησιμότητα του κλάδου αυτού που είναι,

$$u(\pi_1)=0,662$$

Οι πιθανότητες του κλάδου π_2 μπορεί να υπολογισθούν με τη μέθοδο που ονομάζεται «αναποδογύρισμα του δένδρου». Εξετάζουμε το δένδρο του Σχήματος 15,



***Σχήμα* 15**

Για να βρούμε για παράδειγμα την $p(\theta_1 \mid KK)$, χρειαζόμαστε τις $p(KK \mid \theta_1)$, $p(KK)$, $p(\theta_1)$. Τώρα,

$$p(KK \mid \theta_1)=4/10\times 3/9=12/90$$

$$p(KK \mid \theta_2)=9/10\times 8/9=72/90$$

$$p(KK)=p(KK \mid \theta_1)p(\theta_1)+ p(KK \mid \theta_2)p(\theta_2)=12/90\times 0,8+72/90\times 0,2=24/90$$

$$p(\theta_1 \mid KK)=\frac{p(KK \mid \theta_1)p(\theta_1)}{p(KK)}=\frac{12\cdot 8\cdot 90}{90\cdot 10\cdot 24}=\frac{96}{240}$$

Παρόμοια για τις υπόλοιπες πιθανότητες. Βρίσκουμε έτσι,

$$u(\pi_1)=0,679$$

Όσον αφορά στον κλάδο π_ε οι υπολογισμοί είναι λίγο πιο πολύπλοκοι. Ας εξετάσουμε την διαδρομή,

$K, E, T, K, d_1, \theta_1$

Η διαδρομή αυτή συμβολίζει την αλληλουχία γεγονότων:

«Τραβάω μία κόκκινη σφαίρα, επαναλαμβάνω το πείραμα, τοποθετώ τη σφαίρα μέσα, ξανατραβάω κόκκινη, αποφασίζω ότι το δοχείο είναι τύπου θ_1 και είναι θ_1».

Εδώ χρειάζεται να υπολογισθεί η $p(\theta_1 \mid KK)$ από τον τύπο,

$$p(\theta_1 \mid KK) = \frac{p(KK \mid \theta_1)p(\theta_1)}{p(KK)}$$

Τώρα,

$$p(\theta_1 \mid KK) = (4/10)^2 = 16/100$$

$$p(KK) = p(KK \mid \theta_1)p(\theta_1) + p(KK \mid \theta_2)p(\theta_2) = (16/100)(8/10) + (81/100)(2/10) = \mathbf{29/100}$$

Άρα,

$$p(\theta_1 \mid KK) = \frac{16}{100}\frac{8}{10}\frac{100}{29} = \frac{128}{290}$$

Έτσι βρίσκουμε,

$$u(\pi_\varepsilon) = 0{,}685$$

Η τιμή αυτή, που είναι μεγαλύτερη από τις προηγούμενες και από τις $u(\pi_0)$, $u(\pi_1)$, $u(\pi_2)$, u(μη συμμετοχή), μας υποδηλώνει και τη βέλτιστη στρατηγική που πρέπει να ακολουθηθεί.

7 Αξία της πληροφορίας

7.1 Προσδοκώμενη τιμή πλήρους πληροφορίας

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εξετάσαμε το Παράδειγμα 5.1 με τη μέθοδο των δένδρων απόφασης και έμμεσα εισάγαμε την έννοια της πληροφορίας. Είδαμε ότι η αναζήτηση πληροφορίας είναι επιθυμητή αν αξίζει λιγότερο από 1.600 €. Στο κεφάλαιο αυτό θα μιλήσουμε διεξοδικά για την έννοια αυτή.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ένα γενικότερο πρόβλημα απόφασης σαν αυτό που απεικονίζεται στον Πίνακα 24.

***Πίνακας* 24:** πίνακας αποπληρωμής γενικού προβλήματος

	θ_1	θ_2	θ_3	θ_4
d_1	u_{11}	u_{12}	u_{13}	u_{14}
d_2	u_{21}	u_{22}	u_{23}	u_{24}
d_3	u_{31}	u_{32}	u_{33}	u_{34}
$p(\theta_j)$	p_1	p_2	p_3	p_4

Ας υποτεθεί τώρα ότι υπάρχει πλήρης πληροφορία και ας είναι το ενδεχόμενο θ_j αυτό που συμβαίνει. Στην περίπτωση αυτή επιλέγεται η απόφαση i, που δίνει τη μέγιστη χρησιμότητα στη στήλη j. Η προσδοκώμενη χρησιμότητα με πλήρη πληροφορία δίνεται τότε από τη σχέση,

$$\text{Π.Χ.Π.Π.}: \sum_{j=1}^{n} \max_i u_{ij} p_j \tag{7.1}$$

Η διαφορά,

$$\sum_{j=1}^{n} \max_i u_{ij} p_j - \max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p_j \tag{7.2}$$

καλείται ***προσδοκώμενη τιμή πλήρους πληροφορίας***. Η διαφορά αυτή είναι το προσδοκώμενο κέρδος της προσδοκώμενης χρησιμότητας, στην περίπτωση που θα είχαμε πλήρη πληροφορία. Είναι πάντα μη αρνητικό, δηλαδή ο λήπτης απόφασης πρέπει να θεωρεί ότι η πλήρης πληροφορία αξίζει να είναι διαθέσιμη. Αυτό είναι προφανές, αφού όποια απόφαση d_i και αν επιλεγεί, το αριστερό μέλος της (7.2) δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερο του δεξιού, επειδή,

$$\max_i u_{ij} \geq u_{ij}$$

Είναι επίσης απλό να δούμε πότε οι δύο προσδοκώμενες χρησιμότητες είναι ίσες. Ας είναι d_s η βέλτιστη απόφαση χωρίς πλήρη πληροφόρηση. Τότε η (7.2) γίνεται,

$$\sum_{j=1}^{n} \max_i u_{ij} p_j - \sum_{j=1}^{n} u_{sj} p_j$$

και αυτό μπορεί να είναι μηδέν μόνον αν,

$$\max_i u_{ij} = u_{sj}, \quad \forall j$$

Με άλλα λόγια η d_s πρέπει να είναι η βέλτιστη απόφαση για κάθε ενδεχόμενο θ_j. Μία απόφαση που είναι βέλτιστη για κάθε ενδεχόμενο προφανώς δεν χρειάζεται πληροφορία για το ποιο ενδεχόμενο θα συμβεί.

Παρ' όλ' αυτά είναι καλό να έχουμε υπόψη μας, ότι αν και το κέρδος είναι προσδοκώμενο, δεν είναι απαραίτητο και να πραγματοποιείται. Για να γίνει αυτό αντιληπτό, ας θεωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα, όπου η χρησιμότητα είναι ανάλογη του χρηματικού ποσού:

***Πίνακας* 25**

	θ_1	θ_2
d_1	4800	5200
d_2	5000	5100
$p(\theta_j)$	0,5	0,5

Χωρίς πληροφορία,

Π.Χ.(d_1)= 0,5(4800+5200)=5000
Π.Χ.(d_2)= 0,5(5000+5100)=5050

Επιλέγεται η d_2. Με πλήρη πληροφορία, η προσδοκία είναι,

Π.Χ.Π.Π.=0,5×5000+0,5×5200=5100

Έτσι, η προσδοκώμενη τιμή της πλήρους πληροφορίας είναι 50. Αν η πληροφορία όμως είναι ότι θα συμβεί το θ_1, επιλέγουμε την d_2 με αποτέλεσμα 5000, δηλαδή 50 λιγότερο από το ποσό των 5050, το προσδοκώμενο αποτέλεσμα χωρίς πληροφορία.

Επομένως η πληροφορία μπορεί να μειώσει τις προσδοκίες μας.

7.2 Γενική μέθοδος πλήρους πληροφορίας

Η γενική μέθοδος για την εύρεση την τιμή της πλήρους πληροφορίας στις περιπτώσεις όπου οι επιπτώσεις είναι χρηματικές, είναι η εξής :

Αν η πλήρης πληροφορία κοστίζει f τότε οι χρησιμότητες θα γίνουν $u(C_{ij} - f)$, ενώ η προσδοκώμενη χρησιμότητα,

$$\sum_{j=1}^{n} \max_i u(C_{ij} - f) p_j \tag{7.3}$$

Η χρηματική αξία της πλήρους πληροφορίας προκύπτει αν εξισώσουμε την (7.3) με τον τύπο της προσδοκώμενης χρησιμότητας,

$$\max_i \sum_{j=1}^{n} u(C_{ij}) p_j$$

Ας δούμε το παράδειγμα κάποιου που αντιμετωπίζει ένα στοίχημα 10.000 με κεφάλαιο 10.000. Ο πίνακας απόφασης είναι,

***Πίνακας* 26**

	θ_1	θ_2
d_1	$u(20.000-f)$	$u(0-f)$
d_2	$u(10.000-f)$	$u(10.000-f)$
$p(\theta_j)$	0,5	0,5

Η σχέση που δίνει το f είναι η,

$$\frac{u(20.000-f)}{2}+\frac{u(10.000-f)}{2}=u(10.000) \tag{7.4}$$

(παραβλέποντας το ότι η $u(0-f)$ δεν είναι νόμιμη).

Ένας τρόπος να λυθεί η εξίσωση αυτή, είναι προσεγγιστικά. Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση του λήπτη απόφασης με μειούμενη επιφύλαξη στο ριψοκίνδυνο (Σχήμα 3), βρίσκουμε ότι αν f=4.400 περίπου, τότε,

$$\frac{u(15.600)}{2}+\frac{u(5.600)}{2}=u(10.000)$$

Το σκεπτικό της προσέγγισης είναι το εξής :

$$(20.000-f)-10.000>10.000-(10.000-f)\Rightarrow 5.000>f$$

Ένας πλουσιότερος αποφασίζων με κεφάλαιο 500.000, μπορεί να δειχθεί ότι έχει τη δυνατότητα να δώσει περισσότερα, σχεδόν 5.000.

7.3 Προσδοκώμενη τιμή μερικής πληροφορίας

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στη περίπτωση της μερικής πληροφορίας, όπου οι πιθανότητες αλλάζουν σύμφωνα με το θεώρημα του Bayes. Ακολουθώντας παρόμοια τακτική με τη περίπτωση της πλήρους πληροφορίας, ας εξετάσουμε τη περίπτωση που ο λήπτης απόφασης έχει στη διάθεσή του επιπλέον πληροφορία x, η οποία μετατρέπει τις πρότερες πιθανότητες $p(\theta_j)$ σε $p(\theta_j \mid x)$. Το καλύτερο που έχει να κάνει ο λήπτης απόφασης είναι να μεγιστοποιήσει την προσδοκώμενη χρησιμότητα με βάση τις νέες πιθανότητες. Θα πάρει έτσι,

$$\Pi.\mathrm{X}. \mid x=\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, p(\theta_j \mid x) \tag{7.5}$$

αντί,

$$\Pi.\mathrm{X}.=\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij}\, p(\theta_j) \tag{7.6}$$

Όπως και στην περίπτωση της πλήρους πληροφορίας, έτσι και δω δεν ξέρουμε τι θα είναι η νέα πληροφορία x. Έχουμε όμως γνώση της πιθανότητας για την πληροφορία x, που μπορούμε να βρούμε από τον τύπο,

$$p(x)=\sum_{j=1}^{n} p(x \mid \theta_j)\, p(\theta_j) \tag{7.7}$$

Ο λήπτης απόφασης ξέρει τι πρέπει να κάνει αν μάθει την πληροφορία x: θα χρησιμοποιήσει την (7.5). Ξέροντας την πιθανότητα της x μπορεί να υπολογίσει την προσδοκώμενη χρησιμότητα, από τον τύπο,

$$\sum_x \left[\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(\theta_j \mid x) \right] p(x) \tag{7.8}$$

Αλλά από το θεώρημα του Bayes,

$$p(\theta_j \mid x)p(x)=p(x \mid \theta_j)p(\theta_j)$$

Έτσι, η προσδοκώμενη χρησιμότητα από τη μερική πληροφορία είναι:

$$\sum_x \left[\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(x \mid \theta_j) \right] p(\theta_j) \tag{7.9}$$

Η διαφορά της (7.9) από την (7.6) είναι η προσδοκώμενη τιμή της μερικής πληροφορίας.

$$\text{Π.Τ.Μ.Π.} = \sum_x \left[\max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(x \mid \theta_j) \right] p(\theta_j) - \max_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(\theta_j) \tag{7.10}$$

Ας ξαναδούμε το παράδειγμα κάποιου με κεφάλαιο 500.000 που αντιμετωπίζει ένα στοίχημα που θα του αποφέρει ή θα τον ζημιώσει 10.000. Οι πιθανότητες είναι ίσες και η χρησιμότητα ανάλογη με το χρηματικό ποσό. Είδαμε προηγουμένως ότι η τέλεια πληροφόρηση αξίζει 5.000. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ζητάει τη συμβουλή κάποιου, όχι αλάνθαστου, χρηματιστή, που η συμβουλή του δεν είναι πάντα σωστή αλλά πάντως είναι καλύτερα πληροφορημένος από τον επενδυτή. Πόσο αξίζει αυτή η πληροφορία; Προφανώς λιγότερο από 5.000, αλλά πόσο λιγότερο; Εξαρτάται από την αξιοπιστία του χρηματιστή, και πριν προχωρήσουμε πρέπει να συσχετίσουμε ποσοτικά τη γνώμη μας γι' αυτή την ιδιότητα. Πώς θα γίνει αυτό; Κοιτώντας την εξίσωση (7.9), βλέπουμε ότι η επιπλέον πληροφορία εμπεριέχεται στην πιθανοφάνεια $p(x \mid \theta_j)$, και συνειδητοποιούμε ότι η πιθανοφάνεια αυτή είναι ακριβώς μία ποσοτική έκφραση της αξιοπιστίας του σύμβουλου χρηματιστή. Και αυτό γιατί ο χρηματιστής μπορεί να συμβουλέψει δύο πράγματα: ή ν' ανέβουν οι μετοχές ή να πέσουν. Τα δύο αυτά ενδεχόμενα είναι και οι δύο πιθανές τιμές του x. Ας τις ονομάσουμε x_1, x_2 αντίστοιχα. Τότε οι $p(x_1 \mid \theta_1)$, $p(x_2 \mid \theta_2)$ αντιπροσωπεύουν τις πιθανότητες σωστής συμβουλής, ενώ οι $p(x_1 \mid \theta_2)$, $p(x_2 \mid \theta_1)$ τις πιθανότητες λάθος συμβουλής. Ας υποθέσουμε ότι,

$$p(x_1 \mid \theta_1),\ p(x_2 \mid \theta_2)=0{,}75$$
$$p(x_1 \mid \theta_2),\ p(x_2 \mid \theta_1)=0{,}25$$

Οι απαραίτητοι υπολογισμοί φαίνονται στον Πίνακα 27.

***Πίνακας* 27:** πίνακας αποπληρωμής προβλήματος επένδυσης

	θ_1	θ_2	x_1	x_2
d_1	510.000	490.000	252.500	247.500
d_2	500.000	500.000	250.000	250.000
$p(\theta_j)$	0,5	0,5		
$p(x_1 \mid \theta_j)$	0,75	0,25		
$p(x_2 \mid \theta_j)$	0,25	0,75		

Για κάθε απόφαση d_1, d_2 έχουν υπολογιστεί το τμήμα της (7.9) που αντιστοιχεί στο x_1 ή x_2, δηλαδή η παράσταση,

$$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} p(x \mid \theta_j) p(\theta_j)$$

Η αριθμητική τιμή της (7.9) για το πρόβλημα μας είναι 502.500. Χωρίς τη συμβουλή η προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι 500.000, επομένως η αξία της μερικής πληροφορίας είναι 2.500, το μισό της πλήρους.

7.4 Σύγκριση μεταξύ διαφορετικών πηγών πληροφορίας

Οι παραπάνω ιδέες είναι ικανές να αποδώσουν μία προσδοκώμενη χρηματική τιμή σε κάθε πληροφορία, τουλάχιστον στη περίπτωση όπου οι επιπτώσεις είναι εξ ολοκλήρου χρηματικές και η χρησιμότητά τους ανάλογη. Εάν η πληροφορία παρέχεται σε κάποια τιμή λιγότερο από αυτήν, τότε αξίζει να αγορασθεί, αλλιώς όχι. Μ' αυτόν τον τρόπο είναι δυνατόν για κάποιον μηχανικό να σχεδιάσει κάποια πειράματα, που στοιχίζουν πολλά σε εξοπλισμό και ανθρώπινο δυναμικό, τα οποία θα τον βοηθήσουν να σχεδιάσει κάποιο καινούργιο προϊόν. Μόνον αν η επένδυση για το πείραμα είναι μικρότερη από το προσδοκώμενο κέρδος, αξίζει να πραγματοποιηθεί. Παρομοίως μία επιχείρηση που πρόκειται να παράγει ένα νέο προϊόν, μπορεί να υπολογίσει αν τη συμφέρει να ξοδέψει κάποιο ποσό για να μάθει τη πιθανή ζήτηση του μελλοντικού προϊόντος.

Επεκτείνοντας το σκεπτικό αυτό, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να συγκρίνουμε δύο διαφορετικές πηγές πληροφορίας. Ας δούμε το παράδειγμα του υποψήφιου επενδυτή. Στα προηγούμενα υποθέσαμε ότι ο σύμβουλος χρηματιστής είχε πιθανότητα 0,75 για σωστή συμβουλή. Τώρα ας θεωρήσουμε ένα δεύτερο χρηματιστή που είναι πολύ καλός στο να επιλέγει καλές μετοχές, αλλά όχι και τόσο καλός στο να προβλέπει τις κακές. Ας είναι λοιπόν, $p(x_1 \mid \theta_1)=0{,}9$ και $p(x_2 \mid \theta_2)=0{,}6$. Οι αντίστοιχοι υπολογισμοί γίνονται παρόμοια (καλή άσκηση). Έτσι βρίσκουμε ότι η συμβουλή αξίζει πάλι 2.500. Παρ' όλη τη διαφορά τους στη συμπεριφορά, οι χρηματιστές έχουν την ίδια αξία.

7.5 Πληροφορία με οποιαδήποτε χρηματική χρησιμότητα

Αν η χρηματική χρησιμότητα δεν είναι γραμμική αλλά οι επιπτώσεις είναι πάντα χρηματικές, τότε είναι απαραίτητο να γίνει η ανάλυση όπως και πριν με τη διαφορά ότι η αμοιβή f πρέπει να αφαιρεθεί από κάθε επίπτωση πριν εκτιμήσουμε τη χρησιμότητα. Η (7.9) θα γίνει έτσι,

$$\sum_{x} \left[\max_{i} \sum_{j=1}^{n} u_{ij}(C_{ij} - f) p(x \mid \theta_j) \right] p(\theta_j) \tag{7.11}$$

με την προϋπόθεση ότι η αμοιβή είναι σταθερή. Το χρηματικό κέρδος που αναμένεται από την πληροφορία είναι η τιμή f που την καθιστά ίση προς την αρχική χρησιμότητα.

Η περίπτωση να έχουμε πλήρη πληροφορία είναι σπάνια, ενώ η μερική πληροφορία είναι συχνά διαθέσιμη. Παρ' όλ' αυτά η τιμή της πλήρους πληροφορίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως άνω όριο της τιμής που πρέπει να πληρωθεί για τη μερική πληροφορία. Οι υπολογισμοί για την πλήρη πληροφορία είναι απλοί, ενώ της μερικής πληροφορίας πιο μπλεγμένοι.

Παράδειγμα 7.1. Πρότυπο πρόβλημα

Η μέθοδος που ακολουθήθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο δεν είναι απολύτως σωστή. Ίσως να γλυτώναμε από κάποιο κόπο αν αποφασίζαμε στην αρχή, αν άξιζε η διεξαγωγή κάποιου πειράματος ή όχι. Ας εξετάσουμε την προσέγγιση αυτή, βάζοντας το ερώτημα: πόσο είμαστε διατεθειμένοι να πληρώσουμε για κάποιο πείραμα που θα μας αποκάλυπτε την αληθινή ταυτότητα του δοχείου ή με άλλα λόγια ποια είναι η τιμή της πλήρους πληροφορίας;

Απαντάμε στο ερώτημα αυτό με τη μέθοδο της Ενότητας 7.2. Τα δεδομένα φαίνονται στον Πίνακα

28.

***Πίνακας* 28:** πίνακας αποπληρωμής βασικού προβλήματος

	θ_1	θ_2
d_1	$u(40-f)$	$u(-20-f)$
d_2	$u(-5-f)$	$u(100-f)$
d_2	$u(0-f)$	$u(0-f)$
p	0,8	0,2

Η προσδοκώμενη χρησιμότητα με πλήρη πληροφορία δίνεται από τον τύπο,

$$\sum_{j=1}^{2} \max_i u_{ij}(C_{ij} - f)p(\theta_j) = 0{,}8u(40-f)+02u(100-f)$$

Η μέγιστη τιμή του f βρίσκεται αν εξισώσουμε την τιμή αυτή με την προσδοκώμενη χρησιμότητα χωρίς πληροφορία,

$$\text{Π.Χ. } (d_1)=0{,}8u(40)+0{,}2u(-20)=0{,}668$$

Πρέπει λοιπόν να λύσουμε την,

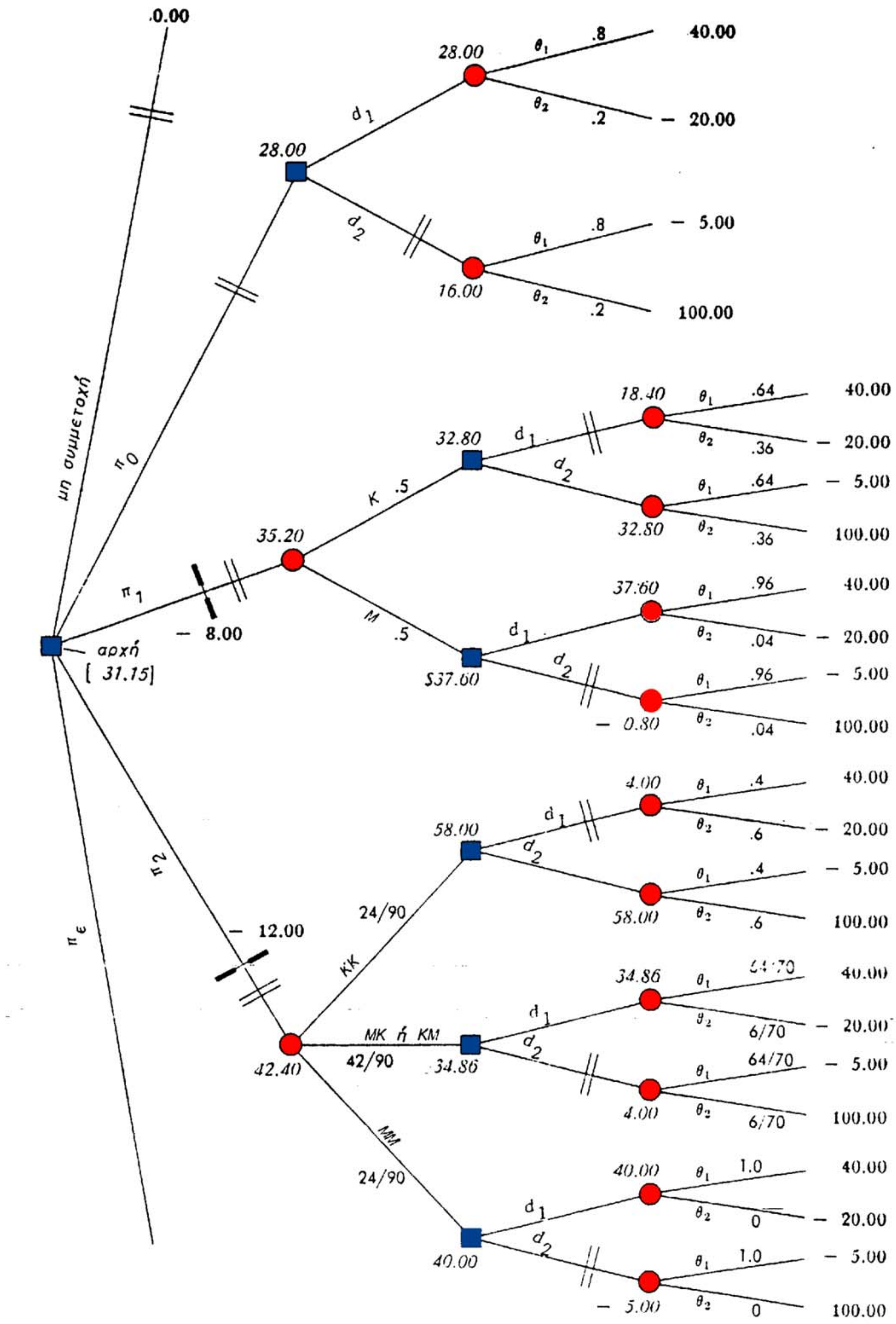
$$0{,}8u(40-f)+0{,}2u(100-f)=0{,}668$$

Με οδηγό τη συνάρτηση χρησιμότητας του Σχήματος 12 και μετά από μερικές δοκιμές βρίσκουμε ότι,

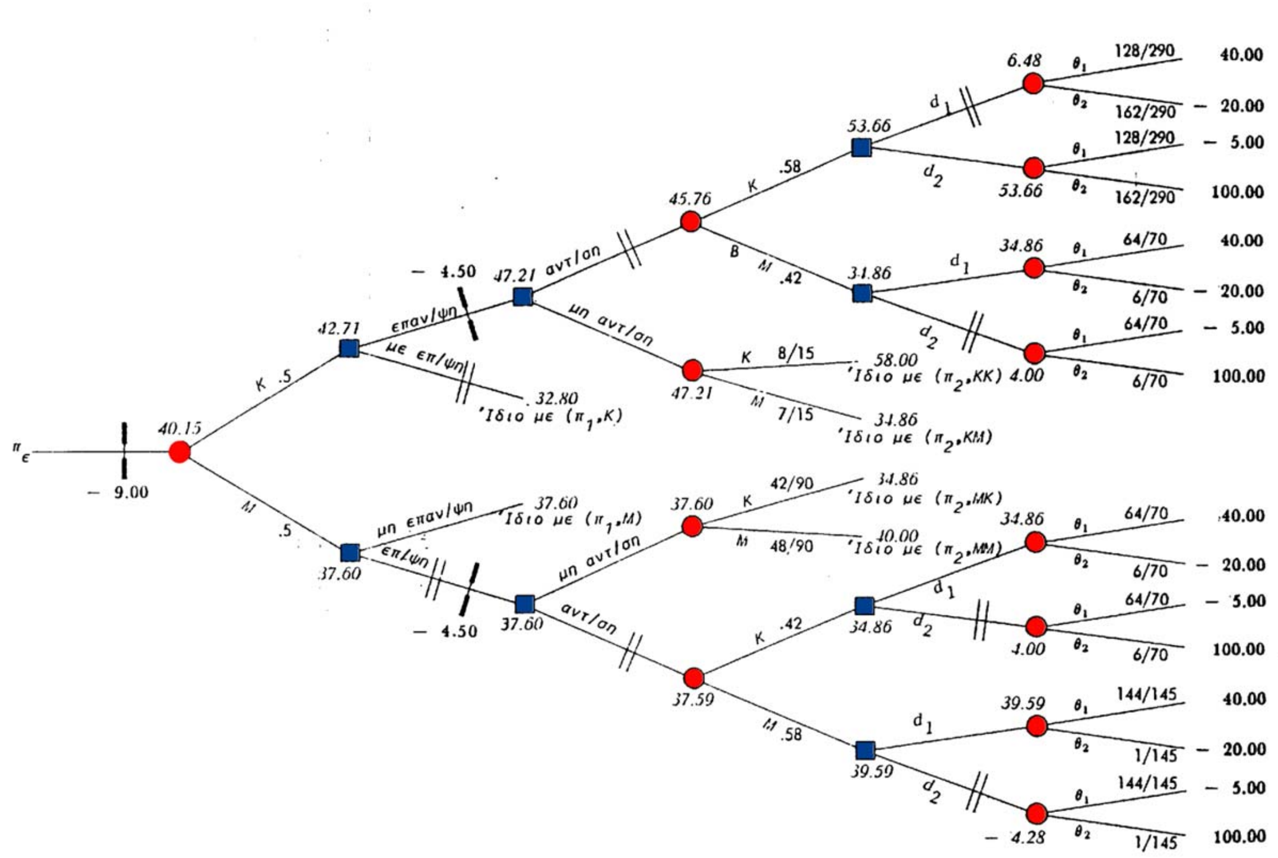
$$f_{max} \approx 23$$

Η τιμή αυτή είναι μεγαλύτερη από τις 8, 12, 13,5, που είναι οι τιμές των πειραμάτων π_1, π_2, π_ε αντίστοιχα και επομένως δεν μπορεί ν' απορριφθεί η επιλογή αυτή από την αρχή.

Ας δούμε μία παραλλαγή του προβλήματος αυτού τώρα, πάνω στο θέμα της μερικής πληροφόρησης. Για διευκόλυνση θα υποθέσουμε ότι οι χρησιμότητες είναι ανάλογες των χρηματικών ποσών. [Το δένδρο απόφασης για την περίπτωση αυτή φαίνεται στα Σχήματα 16, 17].



Σχήμα **16**: δένδρο απόφασης πρότυπου προβλήματος με μερική πληροφόρηση



***Σχήμα* 17**: δένδρο απόφασης πρότυπου προβλήματος με μερική πληροφόρηση-κλάδος π_ε

Ας υπολογίσουμε την τιμή της μερικής πληροφόρησης που συλλέγεται από το πείραμα π_1. Ο πίνακας απόφασης του προβλήματος όπως έχει τεθεί, φαίνεται στον Πίνακα 29.

***Πίνακας* 29:** πίνακας αποπληρωμής πρότυπου προβλήματος

	θ_1	θ_2
d_1	40	−20
d_2	−5	100
d_3	0	0
p	0,8	0,2

Η προσδοκώμενη χρησιμότητα κάθε απόφασης είναι:

Π.Χ. d_1: $40\times0{,}8-20\times0{,}2=28$

Π.Χ. d_2 : $-5\times0{,}8+100\times0{,}2=16$

Π.Χ. d_3 : 0

Έτσι, η βέλτιστη απόφαση είναι η d_1 με Π.Χ. 28.

Ο πίνακας αποπληρωμής με την επιβάρυνση του πειράματος, φαίνεται στον Πίνακα 30.

***Πίνακας* 30:** πίνακας αποπληρωμής πρότυπου προβλήματος με π_1

	θ_1	θ_2
d_1	$40-\alpha$	$-20-\alpha$
d_2	$-5-\alpha$	$100-\alpha$
d_3	0	0
p	0,8	0,2

Ενώ η προσδοκώμενη χρησιμότητα δίνεται από την (7.9),

$$\Pi.X. \mid \pi_1 = \sum_{\pi_1}\left[\max_i \sum_{j=1}^{2} u_{ij}\, p(\pi_1 \mid \theta_j)\right] p(\theta_j) \tag{7.12}$$

Ο δείκτης της πρόσθεσης νοείται στο πεδίο όλων των πιθανών αποτελεσμάτων του π_1. Στην περίπτωσή μας, κόκκινη ή μαύρη μπάλλα. Έτσι, η (7.12) γίνεται,

$$\Pi.X. \mid \pi_1 = \left[\max_i \sum_{j=1}^{2} u_{ij}\, p(K \mid \theta_j)\right] p(\theta_j) + \left[\max_i \sum_{j=1}^{2} u_{ij}\, p(M \mid \theta_j)\right] p(\theta_j)$$

Τώρα,

$$p(K \mid \theta_1)=0,4=1-p(M \mid \theta_1) \Rightarrow p(M \mid \theta_1)=0,6$$

$$p(K \mid \theta_2)=0,9=1-p(M \mid \theta_2) \Rightarrow p(M \mid \theta_2)=0,1$$

Επομένως, για την d_1 οι σχετικές ποσότητες είναι (i=1):

$$\begin{aligned} u_{11}p(K \mid \theta_1)p(\theta_1)+u_{12}p(K \mid \theta_2)p(\theta_2) &= 0,4\times0,8\times(40-\alpha) + 0,9\times0,2\times(-20-\alpha)= \\ &= 12,8-3.6-\alpha(0,32+0,18) = \mathbf{9,2-0,5\alpha} \end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned} u_{11}p(M \mid \theta_1)p(\theta_1)+u_{12}p(M \mid \theta_2)p(\theta_2) &= 0,6\times0,8\times(40-\alpha) + 0,1\times0,2\times(-20-\alpha)= \\ &= 19,2-0,4-\alpha(0,48+0,02) = \mathbf{18,8-0,5\alpha} \end{aligned}$$

Παρόμοια για την d_2, (i=2):

$$u_{21}p(K \mid \theta_1)p(\theta_1)+u_{22}p(K \mid \theta_2)p(\theta_2) = \mathbf{6,4-0,5\alpha}$$

$$u_{21}p(M \mid \theta_1)p(\theta_1)+u_{22}p(M \mid \theta_2)p(\theta_2) = \mathbf{0,4-0,5\alpha}$$

Έτσι, η (7.12) γίνεται,

$$\Pi.X. \mid \pi_1 = 16,4-0,5\alpha+18,8-0,5\alpha=\mathbf{35,2-\alpha}$$

Τελικά η προσδοκώμενη τιμή της μερικής πληροφορίας από το πείραμα π_1 είναι:

$$35,2-\alpha-28=\mathbf{7,2-\alpha}$$

και για να είναι θετική πρέπει α<7,2. Στον ορισμό του προβλήματος ήταν α=4, επομένως και με βάση την ανάλυση μας, η π_1 δεν απορρίπτεται εξ αρχής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αντί οι σφαίρες να επιλέγονται από τον λήπτη της απόφασης, επιλέγονται από κάποιον άλλον που έχει πρόβλημα με την όρασή του. Η αξιοπιστία του φαίνεται στον Πίνακα 31.

***Πίνακας* 31:** αξιοπιστία πληροφοριοδότη

	κόκκινο	**μαύρο**
κόκκινο	0,8	0,2
μαύρο	0,3	0,7

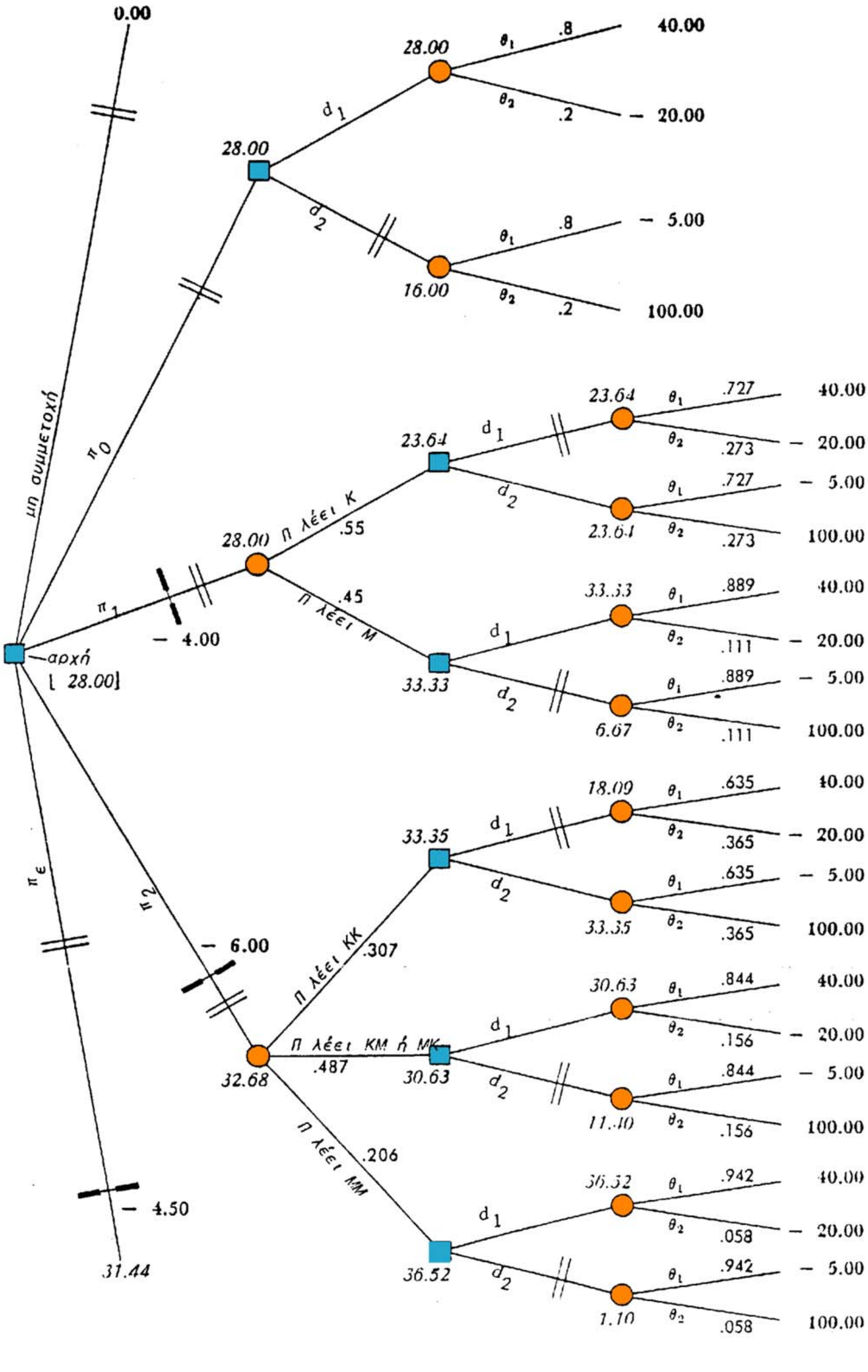
Δηλαδή, για παράδειγμα, ο πληροφοριοδότης μας έχει 80% πιθανότητα να δει σωστά μία κόκκινη σφαίρα. Οι ερωτήσεις που καλείται ν' απαντήσει ο λήπτης είναι:

- Θα πληρώσει για να δει κάποια μπάλλα σύμφωνα με τα παραπάνω;

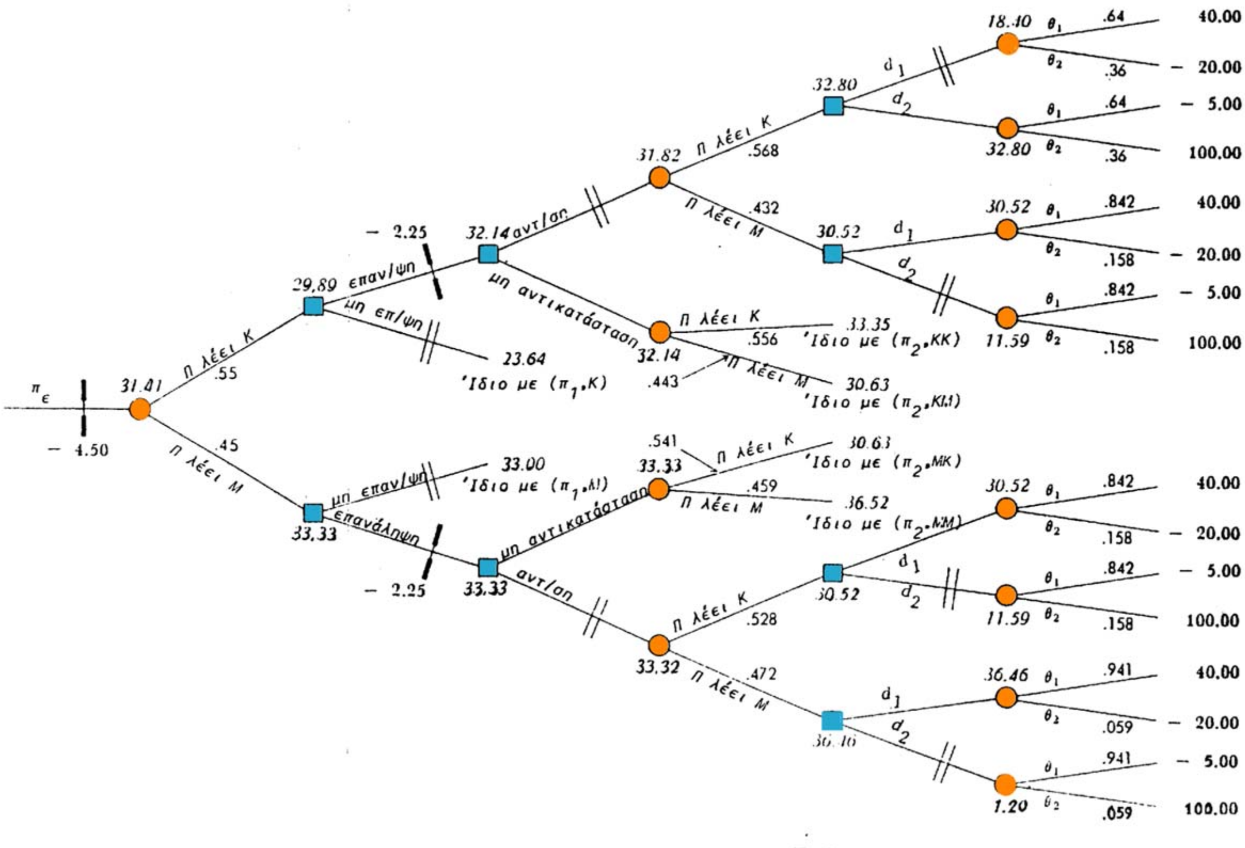
Αν ναι, ποιά μέθοδο θα προτιμήσει; Την π_1, π_2 ή π_ε ;

Να προτιμήσει να χρησιμοποιήσει τον πληροφοριοδότη με τα μισά έξοδα απ' ότι τα αρχικά;

Το δένδρο απόφασης του προβλήματος με τη συμμετοχή του πληροφοριοδότη (Π) φαίνεται στα Σχήματα 18, 19. Τα Σχήματα αυτά είναι όμοια με τα 16, 17 με την διαφορά ότι οι πιθανότητες των τυχαίων κόμβων είναι αλλαγμένες λόγω της ανακρίβειας του πληροφοριοδότη.

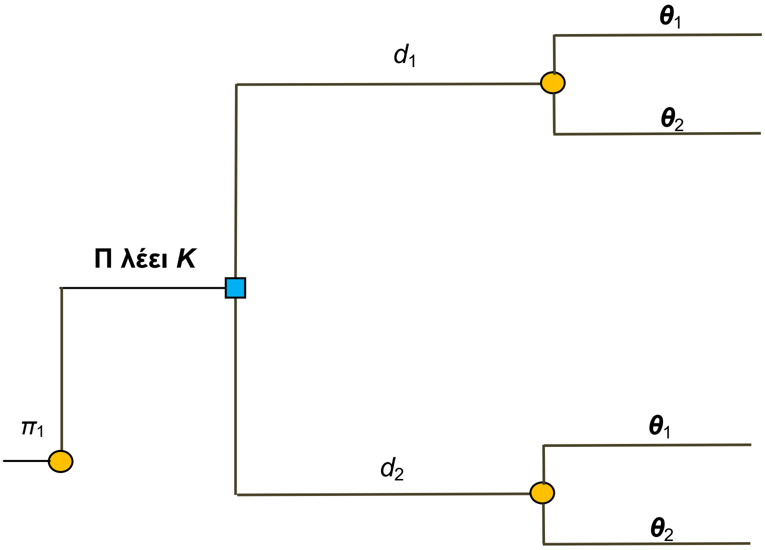


***Σχήμα* 18**: δένδρο απόφασης για το πρότυπο πρόβλημα με μερική πληροφόρηση



***Σχήμα* 19**: δένδρο απόφασης για το πρότυπο πρόβλημα με μερική πληροφόρηση, κλάδος π_ε

Για να κατανοηθεί ο υπολογισμός των νέων πιθανοτήτων, ας εξετάσουμε τον κλάδο π_1 (Σχήμα 20).



***Σχήμα* 20**: κλάδος π_1

Πρέπει να υπολογίσουμε τις πιθανότητες των τυχαίων ενδεχομένων.

A: $\{\Pi \text{ λέει } K\}$, Β: $\{\theta_1 \,|\, \Pi \text{ λέει } K\}$

Τώρα η,

$$p(A)=p\{\Pi \text{ λέει } K \text{ αν είναι } K\}+p\{\Pi \text{ λέει } K \text{ αν είναι } M\}$$
$$=0.8\ [(0{,}4\times0{,}8)+(0{,}9\times0{,}2)]+0{,}3[(0{,}6\times0{,}8)+(0{,}1\times0{,}20)]=0{,}4+0{,}15=\mathbf{0{,}55}$$

ενώ η,

$$p(B) = p(\theta_1 \mid A) = \frac{p(A \mid \theta_1)p(\theta_1)}{p(A)}$$

Αλλά,

$$p(A \mid \theta_1) = 0,8 \times 0,4 + 0,3 \times 0,6 = 0,5$$

Άρα,

$$p(B) = \frac{0,5 \times 0,8}{0,55} = 0,727$$

Οι υπόλοιπες πιθανότητες υπολογίζονται ανάλογα, και παρόλο που προσφέρουν εξαιρετική ευκαιρία για εξάσκηση, πρέπει να παραλειφθούν για λόγους συντομίας.

Τέλος, θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι, όπως φαίνεται και από τα Σχήματα 16, 17, η βέλτιστη απόφαση για έναν λήπτη με ουδετερότητα στο ριψοκίνδυνο, είναι η π_ε. Η απόφαση αυτή μπορεί ν' αλλάξει με την πληροφόρηση, αλλά αυτό θα εξαρτηθεί από την τιμή της.

Με τα παραδείγματα που παρέθεσα ήθελα να δείξω την σχέση της προσέγγισης με την βοήθεια των δένδρων απόφασης και της προσέγγισης με την βοήθεια των πινάκων απόφασης. Παρ' όλο που οι πίνακες απόφασης βοηθούν στην κατανόηση των εννοιών της πλήρους και μερικής πληροφορίας, όπως επίσης και της προσδοκώμενης αξίας τους, τα δένδρα απόφασης δίνουν μία καλύτερη εικόνα του συνολικού προβλήματος. Το συμπέρασμα αυτό είναι ιδιαίτερα αισθητό όταν αντιμετωπίζουμε προβλήματα με πολλές εναλλακτικές αποφάσεις, που εξελίσσονται χρονικά.

8 Ειδικά θέματα

8.1 Ανάλυση ευαισθησίας

Σύμφωνα με αυτά που έχουμε πει μέχρι τώρα, η ανάλυση του προβλήματος της λήψης απόφασης έχει τέσσερα βήματα:

- Βήμα 1: σχεδίαση του δένδρου απόφασης
- Βήμα 2: εκτίμηση χρησιμοτήτων στα άκρα των κλάδων
- Βήμα 3: εκτίμηση πιθανοτήτων των τυχαίων κόμβων
- Βήμα 4: προχωρώντας από τα αριστερά προς τα δεξιά υπολογίζουμε τις προσδοκώμενες χρησιμότητες των κόμβων απόφασης.

Η διαδικασία αυτή ονομάζεται και ***εκτεταμένη μορφή*** ανάλυσης. Αν για κάποιο λόγο η εκτίμηση των πιθανοτήτων του βήματος 3 δεν είναι εφικτή, το βήμα 4 δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί. Υπάρχει όμως μία άλλη μέθοδος ανάλυσης, που καλείται ***κανονική***, η οποία δεν απαιτεί, τουλάχιστον αρχικά, την εκτίμηση των πιθανοτήτων σε όλους τους τυχαίους κόμβους. Χρησιμοποιώντας την κανονική μορφή της ανάλυσης, θα δείξουμε πόσο μακριά μπορούμε να πάμε, χωρίς την χρήση των υποκειμενικών πιθανοτήτων.

Για τη μελέτη της μεθόδου αυτής θα αναφερθούμε στο βασικό πρόβλημα του Παραδείγματος 6.2, του οποίου το Δένδρο Απόφασης φαίνεται στα Σχήματα 16, 17.

Κοιτάζοντας τους κλάδους π_0, π_1, βλέπουμε ότι υπάρχουν 7 τυχαίοι κόμβοι, των οποίων οι πιθανότητες συνδέονται έμμεσα ή άμεσα με τις $p(\theta_1)$, $p(\theta_2)$. Για την παραπέρα ανάλυσή μας θα θεωρήσουμε ότι οι $p(K)$, $p(M)$ εμπίπτουν στην αντικειμενική κλίμακα, αλλά οι $p(\theta_1)$, $p(\theta_2)$ δεν θα χρησιμοποιηθούν παρά μόνο στο τέλος.

Η κανονική μέθοδος ανάλυσης, που μπορεί να θεωρηθεί και μία ανάλυση ευαισθησίας, απαιτεί την θεώρηση όλων των δυνατών στρατηγικών. Γενικά, ***στρατηγική*** είναι ένας κανόνας απόφασης που μπορείς να δώσεις σε κάποιον εκτελεστή και ο οποίος του λέει, χωρίς διφορούμενα, τί να κάνει σε κάθε στιγμή, δοθέντος όλου του προηγούμενου ιστορικού. Για κάθε τέτοια στρατηγική, μπορούμε να ρωτήσουμε:

- Πόσο καλή είναι η στρατηγική αν το θ_1 είναι αληθές;
- Πόσο καλή είναι η στρατηγική αν το θ_2 είναι αληθές;

Αν δούμε ότι η στρατηγική A είναι καλύτερη της B, και όταν το θ_1 είναι αληθές και όταν το θ_2 είναι αληθές, τότε μπορούμε να πούμε ότι η A είναι καλύτερη της B συνολικά. Αν η A είναι καλύτερη της B όταν το θ_1 είναι αληθές, αλλά όχι όταν το θ_2 είναι αληθές, καταλήγουμε σε διελκυστίνδα. Τότε, πρέπει να διερωτηθούμε κατά πόσο η μία στρατηγική είναι καλύτερη της άλλης όταν είναι αληθές το θ_1, και κατά πόσο όταν είναι αληθές το θ_2. Για να αποφασίσουμε όμως τελικά ποιά είναι η καλύτερη στρατηγική συνολικά θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε τις πιθανότητες $p(\theta_1)$, $p(\theta_2)$. Θα υπάρξει όμως μία διαφορά: αντί να είμαστε υποχρεωμένοι να εκτιμήσουμε συγκεκριμένες τιμές για τις πιθανότητες, θα μπορέσουμε να εκτιμήσουμε διαστήματα.

8.2 Στρατηγικές

Ας θεωρήσουμε λοιπόν το βασικό πρόβλημα όπως παρουσιάζεται στο δένδρο Ανάλυσης των Σχημάτων 16, 17, όπου έχουμε υποθέσει ότι οι χρησιμότητες είναι γραμμική συνάρτηση των χρηματικών αποπληρωμών. Η επέκταση σε μη γραμμικές συναρτήσεις είναι απλή και δεν χρειάζεται να δυσκολέψουμε τα πράγματα.

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα υπάρχουν 115 στρατηγικές. Ας τις βαφτίσουμε σ_1, σ_2, ..., σ_{115}. Υπάρχουν δύο στρατηγικές για τον κλάδο π_0, 4 για τον π_1, 8 για τον π_2 και 100 για τον π_ε. Για παράδειγμα η σ_5 ορίζεται ως:

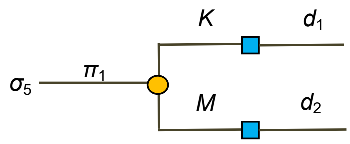
σ_5: πλήρωσε 8 για το π_1 και αν είναι κόκκινη σφαίρα, πες d_2, αν είναι μαύρη πες d_1

Παρόμοια,

σ_{11}: πλήρωσε 12 για το π_2 και πες d_2 αν είναι *ΚΚ* και d_1 αν είναι *ΚΜ*, *ΜΚ* ή *ΜΜ*.

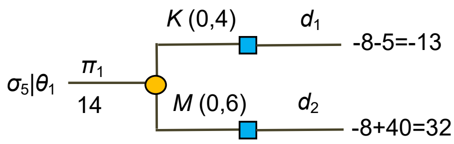
σ_{17}: πλήρωσε 9 για το π_ε. Αν K_1, σταμάτα και πες d_1. Αν M_1 πλήρωσε 4,5 και συνέχισε με αντικατάσταση. Αν K_2 πες d_1, αν M_2 πες d_2.

Το επόμενο βήμα είναι να υπολογίσουμε την αξία κάθε στρατηγικής δεσμευμένη στο θ_1 και δεσμευμένη στο θ_2. Πιο συγκεκριμένα ας υπολογίσουμε τη στρατηγική σ_5 όταν ισχύει το θ_1 (Σχήμα 21).

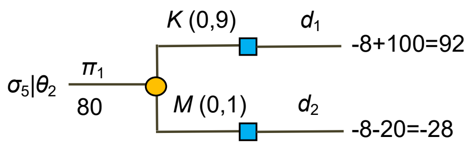


***Σχήμα* 21** στρατηγική σ_5

Τότε,



Ενώ,



Ας χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $V(\sigma_i \mid \theta_j)$ για την προσδοκώμενη χρησιμότητα της κάθε στρατηγικής σ_i δεσμευμένης από το θ_j. Έτσι,

$$V(\sigma_5 \mid \theta_1)=14, \; V(\sigma_5 \mid \theta_2)=80$$

Οι αριθμοί αυτοί έχουν εξαχθεί χωρίς καμία εκτίμηση, ακόμη, των πιθανοτήτων $p(\theta_j)$. Ορίζουμε σαν ***κοινή δεσμευμένη εκτίμηση*** της σ_5 το ζευγάρι {14, 80}.

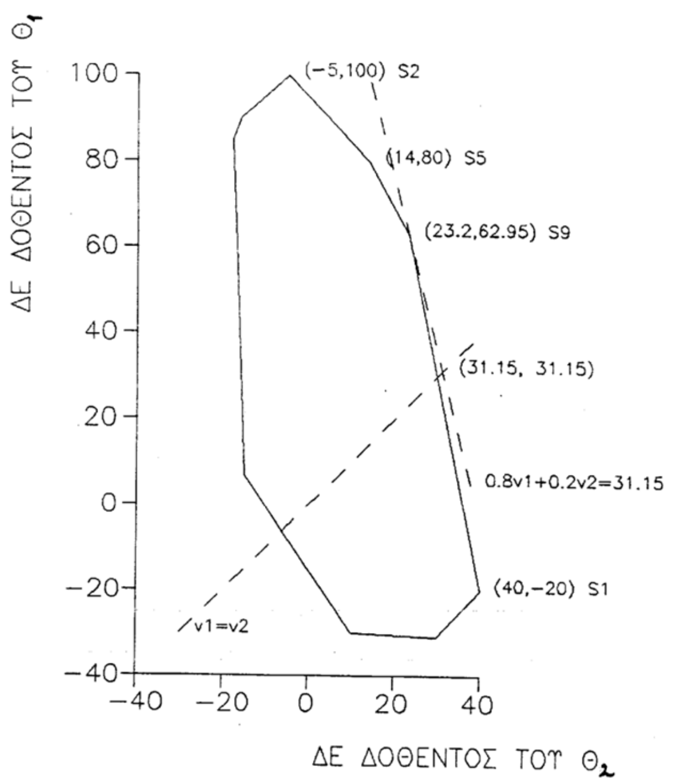
Μπορούμε λοιπόν τώρα, τουλάχιστον θεωρητικά, να καταστρώσουμε έναν πίνακα με τις 115 στρατηγικές και τις αντίστοιχες κοινές δεσμευμένες εκτιμήσεις (Πίνακας 32).

***Πίνακας* 32:** κοινές δεσμευμένες εκτιμήσεις $\{\sigma_i, \theta_j\}$

	θ_1	θ_2
...	...	...
...	...	...
σ_5	14	80
...	...	...

Για οικονομία χώρου, παρουσιάζουμε τα ζευγάρια αυτά στο Σχήμα 22. Για παράδειγμα, για την σ_5

υπάρχει το σημείο (14, 80).



***Σχήμα* 22** στρατηγικές πρότυπου προβλήματος

Υπάρχουν λιγότερα από 115 σημεία, γιατί παραπάνω από μία στρατηγικές μπορεί να έχουν την ίδια κοινή εκτίμηση. Οι στρατηγικές που θα εξετάσουμε από δω και πέρα είναι οι 1, 2, 5 και 95, που φαίνονται και στο Σχήμα 22.

8.3 Τυχαιοποιημένες στρατηγικές

Χρησιμοποιώντας μία απλή μέθοδο, μπορούμε να επινοήσουμε επιπλέον στρατηγικές από αυτές που ήδη έχουμε.

Ας θεωρήσουμε τις στρατηγικές σ_5, σ_2 με κοινή εκτίμηση $\{14, 80\}$ και $\{-5, 100\}$ αντίστοιχα. Ας υποθέσουμε στην συνέχεια ότι στρίβουμε ένα νόμισμα: αν είναι κεφάλι διαλέγουμε την σ_5, αλλιώς την σ_2. Η τυχαιοποιημένη αυτή στρατηγική μπορεί να συμβολισθεί με $\{0{,}5\sigma_5,\ 0{,}5\sigma_2\}$. Ποια είναι η εκτίμηση αυτής της στρατηγικής αν είναι αληθές το θ_1;

Προφανώς,

$$\{0{,}5\times 14+0{,}5\times(-5),\ 0{,}5\times 80+0{,}5\times 100\}=\{4{,}5,\ 90\}$$

Μεταβάλλοντας την πιθανότητα επιλογής της σ_5, μπορούμε να επιτύχουμε οποιαδήποτε σημείο της ευθείας γραμμής που ενώνει τα σημεία (−5, 100), (14, 80), θεωρώντάς το κοινή δεσμευμένη εκτίμηση της τυχαιοποιημένης στρατηγικής $\{k\sigma_5, (1-k)\sigma_2\}$.

Αν χρησιμοποιήσουμε λοιπόν τυχαιοποιημένες στρατηγικές, μπορούμε να πλουτίσουμε το σύνολο των κοινών δεσμευμένων εκτιμήσεων που μπορούμε να επιτύχουμε, δηλαδή το πραγματοποιήσιμο σύνολο. Το σύνολο αυτό, ας είναι $\mathcal{A}$, αποτελείται από τα όρια και το εσωτερικό της κλειστής περιοχής του Σχήματος 22.

Το σύνολο αυτό είναι ένα κυρτό πολύεδρο, του οποίου οι κορυφές είναι εφικτές από μη τυχαιοποιημένες στρατηγικές.

Τώρα, η ερώτηση είναι: τί μπορούμε να πούμε για την βέλτιστη στρατηγική, έχοντας το σύνολο $\mathcal{A}$, στην διάθεση μας; Μπορούμε να δείξουμε ότι θα πρέπει να περιορίσουμε τον προβληματισμό μας στο σκούρο ΒΑ σύνορο του συνόλου, που καλείται ***δεκτό*** ή ***αποτελεσματικό*** σύνολο. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι πρέπει να αποκλείσουμε όλα τα ζευγάρια (a, b) του $\mathcal{A}$ για τα οποία υπάρχει κάποιο ζευγάρι (a_1, b_1) τέτοιο ώστε $a_1 > a$ και $b_1 > b$.

8.4 Επιλογή στρατηγικής από το αποτελεσματικό σύνολο όταν δίνεται η $p(\theta_1)$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $p(\theta_1)$ υπολογίζεται και είναι ίση με 0,8. Η αδέσμευτη εκτίμηση της σ_5 γίνεται τότε,

$$0{,}8\times 14+0{,}2\times 80=27{,}20$$

που είναι η προσδοκώμενη χρησιμότητα της σ_5. Γενικά λοιπόν, ο λήπτης θα επιλέξει την στρατηγική σ^* που μεγιστοποιεί την,

$$0{,}8\,V(\sigma_i \mid \theta_1)+0{,}2\,V(\sigma_i \mid \theta_2)$$

Γραφικά,

1. Βρίσκεται το σημείο U_1^*, U_2^* του αποτελεσματικού συνόλου $\mathcal{A}$ που μεγιστοποιεί την $0{,}8\,V_1+0{,}2\,V_2$.
2. Επιλέγεται η σ^* με κοινή δεσμευμένη εκτίμηση $\{U_1^*, U_2^*\}$.

Το βήμα 1, επιτυγχάνεται θεωρώντας την οικογένεια των ευθειών,

$$0{,}8\,V_1+0{,}2\,V_2=k$$

και βρίσκοντας το μέγιστο k για το οποίο η αντίστοιχη ευθεία τέμνει το $\mathcal{A}$. Από το Σχήμα 22 πάλι, αυτό είναι το k =31,15, όπου η γραμμή μόλις αγγίζει το $\mathcal{A}$ στο σημείο (23,20, 62,95).

Αυτή είναι φυσικά η κοινή δεσμευμένη εκτίμηση της σ_{95}. Το συμπέρασμα είναι ότι η σ_{95} είναι η βέλτιστη στρατηγική με προσδοκώμενη χρησιμότητα 31,15.

Τί θα συμβεί, αν ελαττώσουμε την $p(\theta_1)$ λίγο, ας πούμε κατά 0,01; Η οικογένεια των ευθειών είναι τώρα η,

$$0{,}79\,V_1+0{,}21\,V_2=k$$

ενώ βρίσκουμε ξανά ότι το σημείο επαφής για το μέγιστο είναι ακόμη το (23,20, 62,95). Η προσδοκώμενη χρησιμότητα είναι λίγο μεγαλύτερη αυτή τη φορά όμως: 31,55. Μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι η σ_{95} είναι βέλτιστη για το διάστημα 0,6495 έως 0,8316, ενώ για τις υπόλοιπες τιμές της $p(\theta_1)$ η κατάσταση φαίνεται από τον Πίνακα 33. Ο ισχυρισμός αυτός μπορεί να αποδειχθεί με την χρήση του Σχήμα 22.

***Πίνακας* 33:** βέλτιστες στρατηγικές

διάστημα $p(\theta_1)$	$\boldsymbol{\sigma^*}$	$\boldsymbol{V(p)}$
0 έως 0,5128	σ_2	$-5p+100(1-p)$
0,5128 έως 0,6495	σ_5	$14p+80(1-p)$
0,6495 έως 0,8316	σ_{95}	$23{,}2p+62{,}96(1-p)$

8.5 Ανάλυση ευαισθησίας για το πρόβλημα επένδυσης σε μετοχές

Από το Σχήμα 8, βρίσκουμε τις παρακάτω στρατηγικές:

σ_1: συμβουλή, (x_1, d_1) ή (x_2, d_1)

σ_2: συμβουλή, (x_1, d_2) ή (x_2, d_1)

σ_3: συμβουλή, (x_1, d_1) ή (x_2, d_2)

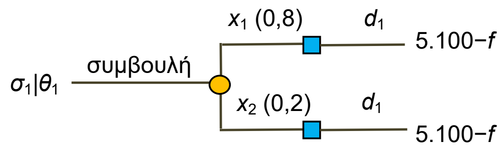
σ_4: συμβουλή, (x_1, d_2) ή (x_2, d_2)

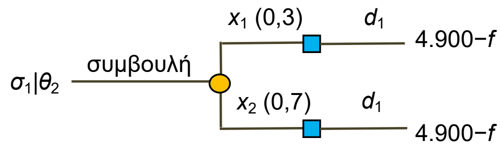
σ_5: d_1

σ_6: d_2

Οι κοινές δεσμευμένες στρατηγικές βρίσκονται ως εξής:

Για την σ_1,

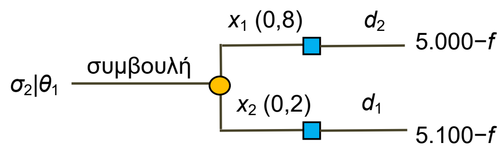


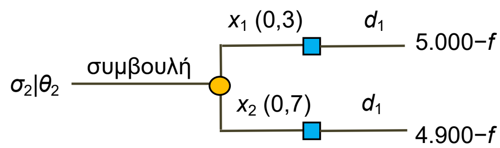


Επομένως η κοινή δεσμευμένη εκτίμηση (Κ.Δ.Ε.) της σ_1 είναι,

$$\{0{,}8(5.100-f)+0{,}2(5.100-f),\ 0{,}3(4.900-f)+0{,}7(4.900-f)\}=\{5.100-f,\ 4.900-f\}$$

Για την σ_2,

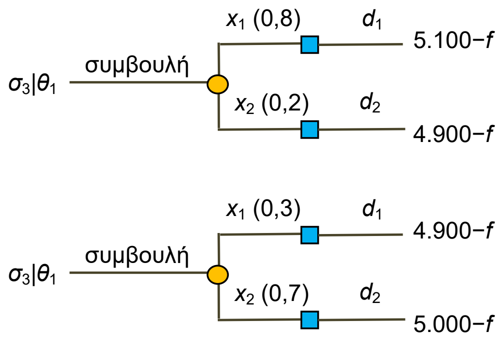




Επομένως η κοινή δεσμευμένη εκτίμηση της σ_2 είναι,

$\{0{,}8(5.000-f)+0{,}2(5.100-f),\ 0{,}3(5.000-f)+0{,}7(4.900-f)\} = \{5.020-f,\ 4.930-f\}$

Για την σ_3,



Επομένως η κοινή δεσμευμένη εκτίμηση της σ_3 είναι,

$\{0{,}8(5.100-f)+0{,}2(5.000-f),\ 0{,}3(4.980-f)+0{,}7(5.000-f)\}=\{5.080-f,\ 4.970-f\}$

Συνεχίζοντας με παρόμοιο τρόπο, βρίσκουμε τα αποτελέσματα του Πίνακα 34.

***Πίνακας* 34:** ΚΔΕ για το πρόβλημα των μετοχών

σ	ΚΔΕ	**ΚΔΕ f=10**
σ_1	{5.100−f, 4.900−f}	{5.090, 4.890}
σ_2	{5.020−f, 4.930−f}	{5.010, 4.920}
σ_3	{5.080−f, 4.970−f}	{5.070, 4.960}
σ_4	{5.100, 4.900}	{5.100, 4.900}
σ_5	{5.000, 5.000}	{5.000, 5.000}

Η εξίσωση που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε είναι η,

$$p(\theta_1)V(\sigma\,|\,\theta_1)+p(\theta_2)V(\sigma\,|\,\theta_2)=p(\theta_1)V(\sigma\,|\,\theta_1)+[1-p(\theta_1)]V(\sigma\,|\,\theta_2) \quad (8.1)$$

Οι μέγιστες τιμές συμβαίνουν στις κορυφές του πολυέδρου. Για να βρεθούν οι τιμές αλλαγής των στρατηγικών, λύνουμε:

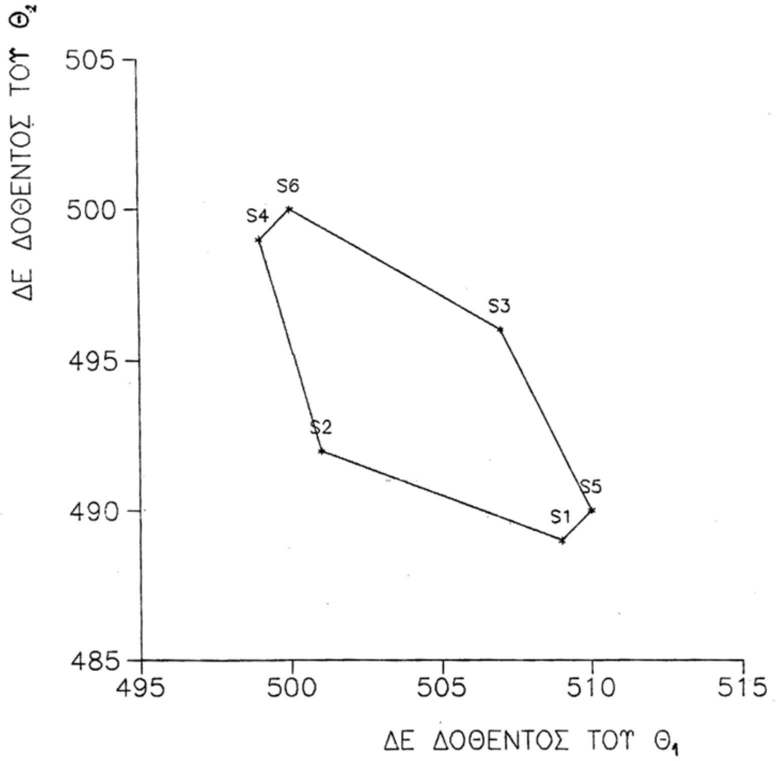
Στα σημεία σ_5, σ_3:

$5.100\lambda+(1-\lambda)4.900=5.070\lambda+(1-\lambda)4.960\Rightarrow\boldsymbol{\lambda=2/3}$

Στα σημεία σ_6, σ_3:

$5.000=5.070\lambda+(1-\lambda)4.960\Rightarrow\boldsymbol{\lambda=2/5}$ $(=0{,}36)$

Για να βρούμε τα διαστήματα εξετάζουμε το αποτελεσματικό σύνολο που φαίνεται στο Σχήμα 23.



***Σχήμα* 23** στρατηγικές προβλήματος επένδυσης σε μετοχές

Μετά από λίγη (;) γεωμετρία βρίσκουμε τον Πίνακα 35.

***Πίνακας* 35:** βέλτιστες στρατηγικές

διάστημα $p(\theta_1)$	$\boldsymbol{\sigma}^*$
0 έως 0,36	σ_6
0,37 έως 0,66	σ_3
0,67 έως 1	σ_5

9 Κλασσικά παραδείγματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιασθούν κάποια κλασσικά παραδείγματα από τη Θεωρία Αποφάσεων αλλά και τη Θεωρία Παιγνίων. Ελπίζω ότι τα παραδείγματα αυτά θα καταδείξουν τη χρησιμότητα των εργαλείων που αναπτύχθηκαν στα προηγούμενα κεφάλαια.

9.1 Η καταστροφή του τζογαδόρου (Gambler's ruin)

Στο παράδειγμα αυτό θ' παρουσιασθεί ένα αποτέλεσμα που δεν συμφωνεί με τη διαίσθηση μας..

Διατύπωση του προβλήματος

Ο τζογαδόρος:

- Ξεκινάει με περιουσία j €.
- Σε κάθε παιγνίδι στοιχηματίζει 1 €.
- Παίζει έως να χάσει όλη του τη περιουσία ή να τη φτάσει N €.

Ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει;

Λύση

Έστω,

A_j το ενδεχόμενο να φτάσει N € ξεκινώντας με j €.

$$x(j)=p(A_j)=\text{πιθανότητα να φτάσει } N \text{ πριν να φτάσει } 0, \text{ ξεκινώντας με } j \tag{9.1}$$

$$x(j)=p(A_j|K)p(K)+p(A_j|Z)p(Z)+p(A_j|I)p(I)$$

$$=x(j+1)\times p+x(j)\times q+x(j-1)\times r \tag{9.2}$$

Η (9.2) προκύπτει συνειδητοποιώντας ότι, αν κερδίσουμε το πρώτο παιγνίδι τότε η περιουσία μας είναι j+1, οπότε $p(A_j|K)=p(A_{j+1})=x(j+1)$ και παρόμοια για τους άλλους δύο όρους.

Επίσης ισχύει $x(0)=p(A_0)=0$ αφού δεν υπάρχουν άλλα χρήματα για να συνεχισθεί το παιγνίδι και $x(N)=p(A_N)=1$ αφού ο στόχος επιτεύχθηκε και το παιγνίδι τελειώνει. Δεδομένου ότι,

$$p+q+r=1$$

η (9.2) γράφεται,

$$x(j+1)\times p-x(j)\times(p+q)+x(j-1)\times q=0,\ x(0)=0,\ x(N)=1 \tag{9.3}$$

Η (9.3) είναι μία γραμμική εξίσωση διαφορών 2ας τάξεως με σταθερούς συντελεστές. Η λύση της είναι της μορφής $x(j)=\alpha^j$. Αντικαθιστώντας στην (9.3), προκύπτει,

$$p\alpha^{j+1}-(p+q)\alpha^j+q\alpha^{j-1}=\alpha^{j-1}(p\alpha^2-(p+q)\alpha+q)=0\Rightarrow p\alpha^2-(p+q)\alpha+q=0 \tag{9.4}$$

Οι ρίζες της δευτεροβάθμιας (9.4) είναι,

$$\alpha = \frac{p+q \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4pq}}{2p} = \begin{cases} 1 \\ q/p \end{cases}$$

Αν $p \neq q$, υπάρχουν δύο ρίζες και η γενική λύση της (9.3) είναι,

$$x(j) = c_1 1^j + c_2 \left(\tfrac{q}{p}\right)^j$$

Οι σταθερές βρίσκονται από συνοριακές συνθήκες,

$$\left.\begin{aligned} x(0) &= c_1 + c_2 = 0 \\ x(N) &= c_1 + c_2 \left(\tfrac{q}{p}\right)^N = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{1-\left(\tfrac{q}{p}\right)^N}$$

Έτσι η λύση της (9.3) είναι,

$$x(j) = \frac{1-\left(\tfrac{q}{p}\right)^j}{1-\left(\tfrac{q}{p}\right)^N}, \quad p \neq q \tag{9.5}$$

Τώρα αν $p=q$, δηλαδή το παιγνίδι είναι «χρηματικά τίμιο», η δευτεροβάθμια (9.4) έχει μία διπλή ρίζα, την $\alpha=1$. Στις περιπτώσεις αυτές ο δεύτερος όρος της λύσης είναι της μορφής jD, για κάποιο D. Αντικαθιστώντας στην (9.3),

$$x(j) = c_1 1^j + c_2 j, \quad x(0) = 0, \quad , x(N) = 1$$

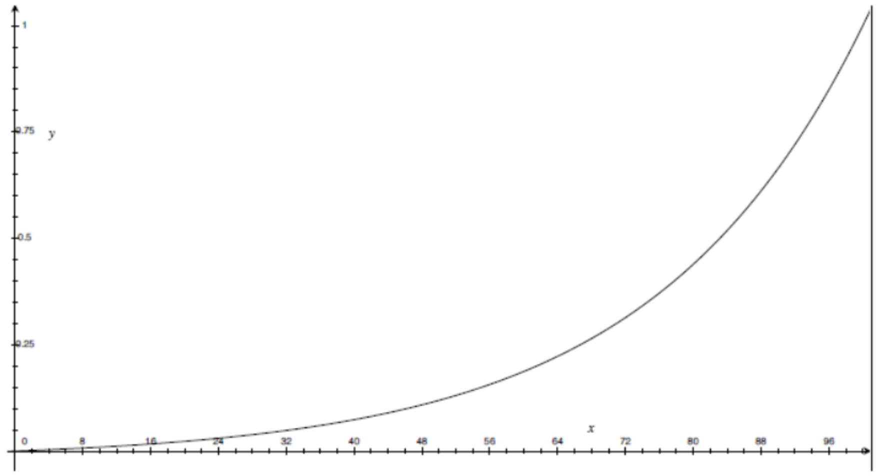
απ' όπου βρίσκουμε $c_1=0$, $c_2=(1/N)$. Επομένως η λύση στη περίπτωση αυτή είναι,

$$x(j) = \frac{j}{N}, \quad p = q \tag{9.6}$$

Τι σημαίνουν τα ευρήματα μας; Για να πάρουμε μια ιδέα, έστω,

1. $q=0{,}51 \cdot \; p=0{,}49 \cdot \;\; r=0$

δηλαδή οι πιθανότητες είναι εναντίον μας («υποδίκαιο» παιγνίδι). Στο Σχήμα 24 φαίνεται το γράφημα του $x(j)$ για $N=100$.



Σχήμα 24 πιθανότητες για *N*=100

Από το Σχήμα διαβάζουμε,

x_{10}=0,0091· x_{50}=0,1191· x_{75}=0,3560· x_{83}=0,4973

Δηλαδή ξεκινώντας με 10€, η πιθανότητα να κερδίσεις 100€ είναι περίπου 1 στις 100. Αν ξεκινήσεις με 50€, η πιθανότητα ανεβαίνει λίγο, αλλά όχι σημαντικά. Με 83 € πλησιάζεις το 0,5. Αν,

2. q=0,49· p=0,51· r=0

οι πιθανότητες είναι με το μέρος μας («υπερδίκαιο» παιγνίδι). Τώρα η (9.5) δίνει:

x_{10}=0,3358· x_{50}=0,8808· x_{75}=0,9679

Προφανώς οι τιμές αυτές είναι καλύτερες από τις προηγούμενες.

Ως εδώ τα πράγματα είναι αναμενόμενα. Ας αναρωτηθούμε όμως: θα υπάρξει διαφοροποίηση στα ευρήματα αν αλλάξει το ποσό που παίζεται; Η (9.5) μπορεί ν' απαντήσει και σ' αυτό το ερώτημα.

Έστω λοιπόν ότι το εν λόγω στοίχημα είναι 10 €, q=0,51· p=0,49. Η πιθανότητα να κερδηθούν 100 €, ξεκινώντας με 10 € και στοιχηματίζοντας 10 € τη φορά, είναι,

$$x(j)=\frac{1-\left(\frac{51}{49}\right)}{1-\left(\frac{51}{49}\right)^{10}}=0,0829$$

η οποία είναι μεγαλύτερη από <u>0,0091</u>. Επομένως η στρατηγική αυτή είναι προτιμητέα. Δεδομένου ότι στο παράδειγμα αυτό, το στοίχημα είναι όσο και το αρχικό κεφάλαιο, συμπεραίνεται ότι,

- Όταν το στοίχημα είναι άδικο, το καλύτερο είναι να στοιχηματίζεις <u>όλα τα λεφτά σε ένα στοίχημα</u> (εννοείται <u>αν</u> αποφασίσεις να παίξεις, κάτι το οποίο δεν συνιστάται με βάση το κριτήριο της προσδοκώμενης χρησιμότητας).

Τώρα αν q=0,49, p=0,51, ανάλογοι υπολογισμοί δίνουν,

$$x(j)=\frac{1-\left(\frac{49}{51}\right)}{1-\left(\frac{49}{51}\right)^{10}}=0,1189$$

η οποία είναι μικρότερη από <u>0,3358</u>. Επομένως, συμπεραίνεται ότι,

- Όταν το στοίχημα είναι δίκαιο, το καλύτερο είναι να στοιχηματίζεις την ελάχιστη τιμή/στοίχημα.

Τα δύο αυτά αποτελέσματα δεν είναι προφανή. Αυτό όμως που είναι ακόμη λιγότερο προφανές, είναι το ότι ακόμη και στη περίπτωση $p=q$, δεν συνιστάται το παιγνίδι. Αυτό προκύπτει από την (9.6) η οποία δίνει την πιθανότητα να κερδίσεις N € ξεκινώντας από j. Για να είναι μεγαλύτερη από 0,5 πρέπει $2j>N$. Άρα αν διπλασιάσεις τα χρήματα σταμάτα, αλλιώς καταστρέφεσαι. Αυτό είναι το «ηθικό δίδαγμα» αυτού του αποτελέσματος.

Ένα άλλο συμπέρασμα που μπορεί να εξαχθεί είναι: «μην εμπιστεύεσαι τη διαίσθηση σου».

Το παράδειγμα αυτό έχει μακράν ιστορία μελέτης που πάει πίσω στον $17^{ο}$ αιώνα.

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές και επεκτάσεις των παραπάνω αποτελεσμάτων που όμως δεν αλλάζουν, προφανώς, τον «νόμο» της καταστροφής του τζογαδόρου:

- Αν η πιθανότητα να κερδίσεις (την κάθε φορά) δεν είναι αυστηρά μεγαλύτερη από 0,5, τότε μακροπρόθεσμα θα χρεοκοπήσεις.

Επεκτάσεις αφορούν σε διαφορικά στοιχήματα, στην εκτίμηση του πλήθους επαναλήψεων μέχρι το τέλος του παιγνιδιού, σε περισσότερους από έναν παίκτες κ.λπ. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει σχετική πληροφορία στο διαδίκτυο.

9.2 Το δίλημμα του φυλακισμένου (Prisoner's dilemma)

Το κλασσικό αυτό παράδειγμα προέρχεται από τη Θεωρία Παιγνίων. Αν και δεν συνδέεται ευθέως με τις τεχνικές που παρουσιάσθηκαν σ' αυτές τις σημειώσεις, εν τούτοις είναι παράδειγμα μίας γενικότερης θεωρίας όπου οι αποφασίζοντες είναι παραπάνω από ένας, και οι αποπληρωμές είναι συνάρτηση των αποφάσεων όλων των αποφασιζόντων. Τα πλέον συνήθη παίγνια είναι μεταξύ δύο παικτών. Υπ' αυτό το πρίσμα, η προεκτεθείσα Θεωρία Αποφάσεων μπορεί να ιδωθεί ως ένα παίγνιο ανάμεσα στον αποφασίζοντα και τη «φύση». Να σημειωθεί όμως ότι ο παίκτης-φύση δεν αποφασίζει με βάση κάποιο κριτήριο, αλλά τυχαία.

Ας ξεκινήσουμε ορίζοντας τι είναι «παίγνιο»: όλες οι περιστάσεις όπου τουλάχιστον ένας παίκτης μπορεί μόνο να μεγιστοποιήσει τη χρησιμότητά του, προβλέποντας την αντίδραση στις πράξεις του, ενός ή περισσοτέρων παικτών, καλείται ***παίγνιο***.

Η Θεωρία Παιγνίων λοιπόν εξετάζει τα παίγνια και αναζητά «βέλτιστες» στρατηγικές, όπου το «βέλτιστο» ορίζεται με διαφορετικούς τρόπους. Αντί όμως να ορίσουμε αυτές τις έννοιες με αυστηρούς μαθηματικούς όρους, ας ξεκινήσουμε το παράδειγμα.

Στην πιο απλή μορφή του το δίλημμα ορίζεται μέσω του (γνωστού μας) Πίνακα αποπληρωμής 36.

***Πίνακας* 36:** το δίλημμα του φυλακισμένου

	C	***D***
C	*R, R*	*S, T*
D	*T, S*	*P. P*

Τα στοιχεία του πίνακα ορίζουν την αποπληρωμή του (i, j) συνδυασμού, δηλαδή (S, T) σημαίνει ότι ο συνδυασμός (C, D) αποφέρει S στον παίκτη 1 και T στον παίκτη 2. Εδώ,

$$T>R>P>S$$

(Για να βγάλει νόημα ο τίτλος του παραδείγματος, ας φαντασθούμε τους δύο παίκτες ως φυλακισμένους και τις επιλογές ως C: σιωπή, D: ομολογία.

10 Βιβλιογραφία-αναφορές

[1] Tersine R. J. (1985). Production/Operations Management: Concepts, Structure and Analysis, N. Holland.

[2] Lindley D. V. (1985). Making Decisions, Wiley.

[3] Rescher N. The Coherence Theory of Truth, Oxford University Press.

[4] Fishburn P. Decision and Value Theory, Wiley, N.Y.

[5] Bellman R. E. (1957). Dynamic Programming, Princeton University Press.

[6] Brown R. V., Kahr A. S. and C. Peterson (1974). Decision Analysis for the Manager, Holt, Rinehart and Winston, N.Y.

[7] Bunn D. W. and M. Thomas (1978). Formal methods in policy formulation, Birkhauser, Basel.

[8] Bunn D. W. Analysis for optimal decisions, John Wiley.

[9] De Groot M. H. (1970). Optimal statistical decisions, McGraw Hill, N.Y.

[10 Holloway C. A. (1979). Decision Making under Uncertainty, Prentice Hall, N.J.

[11] Keeny R. L. and H. Raiffa (1993). Decisions with multiple objectives, Cambridge University Press.

[12] La Valle I. M. (1978). Fundamentals of Decision Analysis, Holt, Rinehart, Winston, Il.

[13] Moore P. G., Thomas H., Bunn D. W. and J. M. Hampton (1976). Case studies in Decision Analysis, Penguin, Marmondsworth.

[14] Raiffa H. (1968). Decision Analysis: introductory lectures on choices under uncertainty, Addison-Wesley, Mass.

[15] Raiffa H. and R. Schlaifer (1961). Applied Statistical Decision Theory, Harvard University Press, Harvard.

[16] Schlaifer R. (1969). Analysis of decisions under uncertainty, McGraw Hill, N.Y.

[17] Chernoff H. and L.E. Moses (1959). Elementary Decision Theory, Wiley N.Y.

[18] Hadley G. (1967). Introduction to Probability and Statistical Decision Theory, Holden Day, San Francisco.

[19] Hogarth R. (1980). Judgement and Choice, Wiley.