

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΥΤΟΜΑΤΟΥ ΕΛΕΓΧΟΥ ΙΙ

Συστήματα πολλών εισόδων πολλών εξόδων

ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ

Α. ΠΟΥΛΙΕΖΟΣ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

ΕΚΔΟΧΗ 2.8, Μάρτιος 2018

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	3
1 Αναπαράσταση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου	5
1.1 Μαθηματική αναπαράσταση	5
1.1.1 Αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου	5
1.1.1.1 Αναπαράσταση με δομικά διαγράμματα.....	9
1.1.2 Αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας	11
1.1.2.1 Πόλοι και μηδενικά.....	14
1.1.3 Μετάβαση από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου	16
2 Δυναμικά συστήματα	18
2.1 Μετασχηματισμοί κατάστασης	18
2.1.1 Διαγώνιος μετασχηματισμός.....	19
2.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων	21
2.2.1 Γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα	22
2.2.2 Γραμμικά εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα	27
2.3 Ιδιότητες συστημάτων	28
2.3.1 Ελεγχιμότητα	28
2.3.2 Παρατηρησιμότητα	29
2.3.3 Ελάχιστες πραγματώσεις.....	30
2.3.4 Ευστάθεια.....	30
2.3.5 Σταθεροποιησιμότητα	34
2.3.6 Εντοπισιμότητα	35
2.4 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων	36
3 Σχεδίαση ελεγκτών	39
3.1 Ρύθμιση	39
3.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού K	40
3.2 Τοποθέτηση πόλων μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου	41
3.3 Παρακολούθηση	43
3.4 Παρατηρητές κατάστασης	45
3.4.1 Παρατηρητής μειωμένης τάξης.....	49
3.5 Απόρριψη διαταραχών	53
3.5.1 Μετρήσιμη διαταραχή.....	54
3.5.2 Διαταραχή με γνωστό πρότυπο	56
3.5.3 Άγνωστη διαταραχή	56

Βιβλιογραφία	57
Βιογραφίες	58
Παράρτημα	59
Π1 Έλεγχος αναδεδόμενης δεξαμενής	59
Π2 Συνάρτηση διακρίβωσης ελεγκσιμότητας/ σταθεροποιησιμότητας	62
Π3 Συνάρτηση διακρίβωσης παρατηρησιμότητας/εντοπισιμότητας	62
Εκδογογραφία	64

1 Αναπαράσταση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

1.1 Μαθηματική αναπαράσταση

1.1.1 Αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου

Στο σύγγραμμα αυτό θα μελετήσουμε δυναμικά συστήματα που αναπαρίστανται από συνήθεις, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Τα συστήματα αυτά καλούνται *γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα*¹.

Από μαθηματικής άποψης τα δυναμικά συστήματα ανήκουν στη κατηγορία των διανυσματικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή συστημάτων διαφορικών εξισώσεων που περιγράφονται σε κανονική λυμένη μορφή ως,

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(x)}{dx} &= f_1(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \frac{dy_2(x)}{dx} &= f_2(x, y_1(x), \dots, y_n(x)) \\ \frac{dy_n(x)}{dx} &= f_n(x, y_1(x), \dots, y_n(x))\end{aligned}\tag{1.1}$$

Αν στην (1.1) προστεθούν αρχικές συνθήκες,

$$y_1(x_0) = y_{10}, y_2(x_0) = y_{20}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}\tag{1.2}$$

τότε ορίζεται ένα πρόβλημα αρχικών τιμών.

Ο χώρος \mathbb{R}^{n+1} που ορίζεται από τις συνιστώσες ποσότητες $x, y_1(x), \dots, y_n(x)$ καλείται εκτεταμένος χώρος των φάσεων.

Αν στις συναρτήσεις f_i του συστήματος (1.1) δεν εμφανίζεται η ανεξάρτητη μεταβλητή x , δηλαδή $\partial f_i / \partial x = 0, \forall i$, τότε το σύστημα καλείται *αυτόνομο*. Σ' ένα αυτόνομο σύστημα ο χώρος \mathbb{R}^n που ορίζεται από τις συνιστώσες ποσότητες $y_1(x), \dots, y_n(x)$ καλείται *χώρος των φάσεων*.

Αν τώρα στη θέση της ανεξάρτητης μεταβλητής x τεθεί ο χρόνος t , τότε το σύστημα

¹ Συστήματα LTI: linear time invariant.

(1.1) καλείται δυναμικό, ενώ ως αυτόνομο νοείται το χρονικά αμετάβλητο σύστημα.

Έτσι, και λόγω του ότι αναφερόμαστε σε γραμμικά συστήματα, το κατάλληλο μαθηματικό υπόδειγμα, ανάλογο του (1.1), είναι της μορφής,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

όπου λόγω του χρονικά αμετάβλητου έχει θεωρηθεί χωρίς βλάβη γενικότητας ότι $t_0 = 0$. Στη μορφή αυτή η διανυσματική συνάρτηση,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

καλείται **κατάσταση**² του συστήματος, ενώ η

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

είναι η (διανυσματική) **είσοδος** στο σύστημα.

Στα συστήματα ελέγχου η (1.3) συμπληρώνεται από την αλγεβρική εξίσωση,

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.4)$$

όπου,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

² Η έννοια της δομής του χώρου καταστάσεων ή φάσεων μπορεί να αποδοθεί στον Poincaré (1899, Περί της ουράνιας δυναμικής, [4]). Η πρωτοποριακή αυτή έρευνα συνεχίστηκε από Ρώσους μαθηματικούς των αρχών του 20ου αι. (Lyapunov, Andronov, Pontryagin και άλλοι), παραμένοντας εν πολλοίς άγνωστη στους «δυτικούς», μέχρι τη μετάφραση της το 1947 [1].

η (διανυσματική) **έξοδος**.

Οι πίνακες $A (n \times n)$, $B (n \times r)$, $C (m \times n)$, $D (m \times r)$ καλούνται **πίνακες του χώρου κατάστασης**, ενώ η διάσταση n καλείται (δυναμική) **τάξη** του συστήματος.

Το σύστημα (1.3)-(1.4) είναι ειδική μορφή του γενικότερου συστήματος,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.5)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1.6)$$

το οποίο είναι ένα **γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου**. Πολλά από τα θεωρήματα που θα παρουσιασθούν στη συνέχεια, επεκτείνονται ευθέως και στα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, όμως στη πράξη αυτά απαντώνται σπανιότατα. Για το λόγο αυτό, και για αποφυγή αχρειαστής πολυπλοκότητας, θα ασχοληθούμε μόνο με τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα.

Το σύστημα (1.3)-(1.4) περιγράφεται επίσης σε μορφή **συσκευασμένου πίνακα** ως,

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (1.7)$$

Δεδομένου ότι τα φυσικά συστήματα περιγράφονται φυσιολογικά από διαφορικές εξισώσεις διαφόρων τάξεων, ο συνηθέστερος τρόπος κατάστρωσης της (1.3) είναι μέσω κατάλληλου μετασχηματισμού της αρχικής διαφορικής εξίσωσης. Έτσι, έστω ότι το σύστημα περιγράφεται φυσιολογικά από την,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_0 r(t) \quad (1.1)$$

με τις αντίστοιχες n αρχικές συνθήκες της y και των παραγώγων της,

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}$$

και ας θέσουμε,

$$x_1(t) = y(t), \quad x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}, \quad x_n(t) = \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}}$$

Τότε εύκολα προκύπτει,

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= -a_{n-1}x_n(t) - \dots - a_0x_1(t) + b_0r(t)\end{aligned}$$

ή τελικά,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_0 & -a_1 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ b_0 \end{bmatrix} r(t)$$

Η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης είναι σημαντική για την σωστή αναπαράσταση του συστήματος, καθώς θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε το σύστημα να προσδιορίζεται εντελώς κάθε χρονική στιγμή t όταν ξέρουμε την ιστορία των εισόδων $\{u(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$ και την τωρινή και αρχική τιμή των μεταβλητών καταστάσεων $x(0)$ και $x(t)$. Η ενδιαμέση μετεξέλιξη του συστήματος την περίοδο $0 < \tau < t$ έχει καταγραφεί στις μεταβλητές κατάστασης. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 1.1 Οι μεταβλητές κατάστασης $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ενός συστήματος ορίζονται ως ένας (ελάχιστος) αριθμός μεταβλητών τέτοιων ώστε αν γνωρίζουμε τις τιμές τους για οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0 , την συνάρτηση εισόδου που εφαρμόζεται στο σύστημα για $t > t_0$, και τον μαθηματικό νόμο που συνδέει την είσοδο, τις μεταβλητές κατάστασης και το σύστημα, τότε καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t > t_0$.

Η κατάστρωση των εξισώσεων (1.3)-(1.4) απαιτεί γνώση των φυσικών νόμων που διέπουν τις διαδικασίες του συστήματος, γνώση που δεν είναι πάντα διαθέσιμη στον μηχανικό Αυτομάτου Ελέγχου. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη η διεπιστημονική προσέγγιση στο στάδιο της κατάστρωσης του μαθηματικού υποδείγματος. Μια μικρή ιδέα της διαδικασίας αυτής μπορούμε να πάρουμε με τα παραδείγματα που παρατίθενται στο ειδικό σημείο της ιστοσελίδας των σημειώσεων.

Για ποιο λόγο όμως χρειαζόμαστε έναν άλλο τύπο μαθηματικού υποδείγματος και δεν αρκούμαστε στη γνωστή μας αναπαράσταση των συναρτήσεων μεταφοράς; Υπάρχουν δύο βασικοί λόγοι και άλλοι δευτερεύοντες:

1. Η δομή του χώρου κατάστασης μπορεί να χειρισθεί χρονικά μεταβαλλόμενα

συστήματα (Εξ. (1.5), (1.6)).

2. Περαιτέρω η δομή του χώρου κατάστασης μπορεί να χειρισθεί μη γραμμικά (χρονικά μεταβαλλόμενα) συστήματα, δηλαδή συστήματα που αναπαρίστανται από εξισώσεις της μορφής,

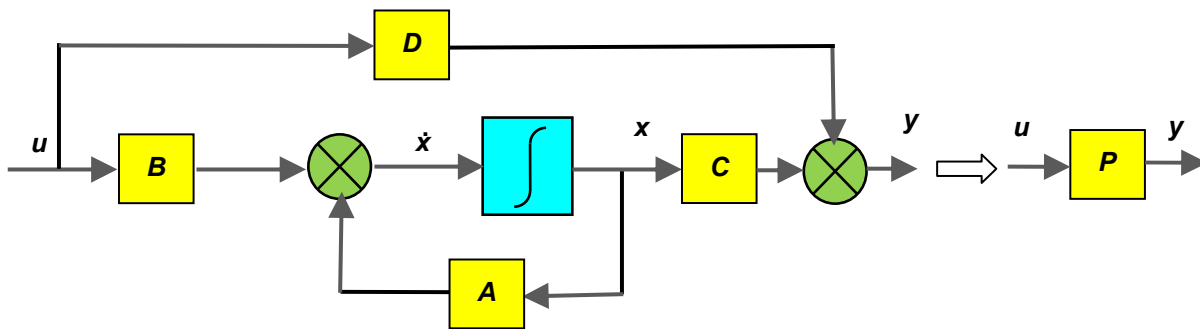
$$P: \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t) \tag{1.2}$$

3. Η ύπαρξη μη μηδενικών αρχικών συνθηκών δεν δημιουργεί ιδιαίτερο πρόβλημα, αφού όπως θα δούμε είναι μέρος της λύσης.
4. Η λύση εκφράζεται απευθείας στο πεδίο του χρόνου, απαλλάσσοντάς μας από τη διαδικασία αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace.

Παρ’ όλα τα προαναφερθέντα, σε γραμμικά, χρονικά μη μεταβαλλόμενα συστήματα, η παράλληλη θεώρηση των συστημάτων στο πεδίο του χρόνου και στο πεδίο της συχνότητας, δίνει πολύτιμη πληροφορία για την συμπεριφορά και απόδοση του συστήματος.

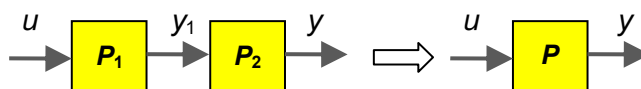
1.1.1.1 Αναπαράσταση με δομικά διαγράμματα

Οι (1.3)-(1.4) αναπαρίστανται σχηματικά μέσω του δομικού διαγράμματος του Σχ. 1.1, όπου το μπλε τετράγωνο συμβολίζει τη πράξη της ολοκλήρωσης και οι πολλαπλασιασμοί των πινάκων νοούνται από τα δεξιά (π.χ. Du)



Σχήμα 1.1 Δομικό διάγραμμα χώρου κατάστασης

Πώς όμως συνθέτουμε δύο συστήματα που αναπαρίστανται στο χώρο καταστάσεων; Δηλαδή, πως επιτελείται για παράδειγμα η απλοποίηση του Σχ. 1.2, που αναπαριστά δύο συστήματα εν σειρά;



Σχήμα 1.2 Δομικό διάγραμμα χώρου κατάστασης

(όπου τα P_1, P_2 όχι απαραίτητα ίδιων διαστάσεων). Έστω,

$$P_1 = \left[\begin{array}{c|c} A_1 & B_1 \\ \hline C_1 & D_1 \end{array} \right], P_2 = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & B_2 \\ \hline C_2 & D_2 \end{array} \right] \quad (1.3)$$

δηλαδή,

δεδομένο $P_1: \dot{x}_1(t) = A_1 x_1(t) + B_1 u(t), y_1(t) = C_1 x_1(t) + D_1 u(t) \quad (1.4)$

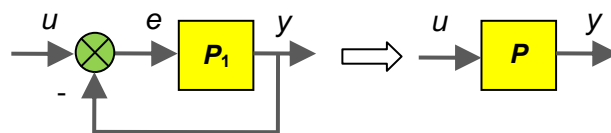
δεδομένο $P_2: \dot{x}_2(t) = A_2 x_2(t) + B_2 y_1(t), y(t) = C_2 x_2(t) + D_2 y_1(t) \quad (1.5)$

ζητούμενο $P_3: \dot{x}_3(t) = A_3 x_3(t) + B_3 u(t), y(t) = C_3 x_3(t) + D_3 u(t) \quad (1.6)$

Ο μόνος τρόπος να είναι η (1.6) ισοδύναμη με τις (1.4)-(1.5) και να διατηρεί την απαίτηση να είναι πρώτης τάξεως, είναι να σχηματίσουμε το επαυξημένο σύστημα,

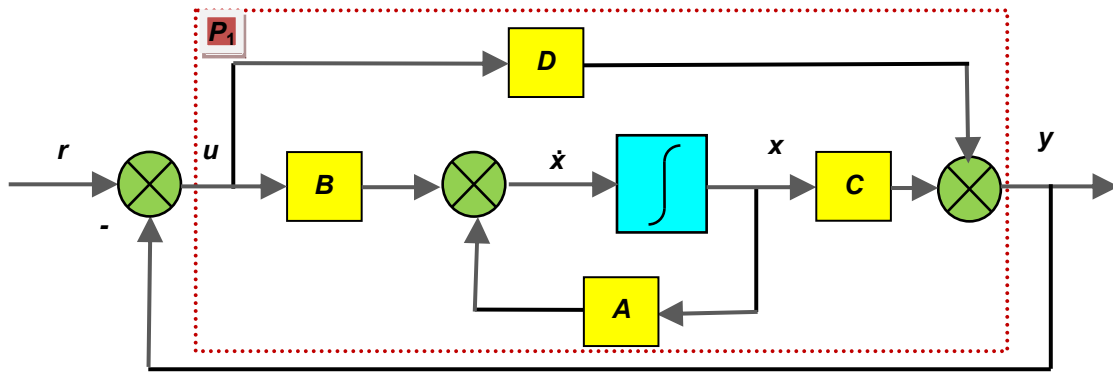
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_2 C_1 & A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 D_1 \end{bmatrix} u, \quad y = [D_2 C_1 \quad C_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + D_2 D_1 u \quad (1.7)$$

που προκύπτει απλά αν αντικαταστήσουμε το y_1 της (1.4) στην (1.5). Η μέθοδος αυτή ισχύει για αυθαίρετες διασυνδέσεις, όπως για παράδειγμα η σύνδεση αρνητικής ανατροφοδότησης του Σχ. 1.3.



Σχήμα 1.3 Δομικά διαγράμματα ανατροφοδότησης

Δεδομένου ότι το αριστερό διάγραμμα του Σχ. 1.3 είναι ισοδύναμο με το Σχ. 1.4,



Σχήμα 1.4

$$P_1: \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.8)$$

Επίσης,

$$y(t) = Cx(t) + D(r(t) - y(t)) \Rightarrow y(t) = (I + D)^{-1} Cx(t) + (I + D)^{-1} Dr(t) \quad (1.9)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(r(t) - y(t)) \Rightarrow \\ \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(r(t) - (I + D)^{-1} Cx(t) + (I + D)^{-1} Dr(t)) \Rightarrow \\ \dot{x}(t) &= (A - B(I + D)^{-1} C)x(t) + B(I - (I + D)^{-1} D)r(t) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Οι (1.9), (1.10) αποτελούν τις ζητούμενες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} P: \dot{x}(t) &= (A - B(I + D)^{-1} C)x(t) + B(I - (I + D)^{-1} D)r(t) \\ y(t) &= (I + D)^{-1} Cx(t) + (I + D)^{-1} Dr(t) \end{aligned} \quad (1.11)$$

Η (1.11) ίσως να μη φαίνεται οικεία στους επαίοντες, βασικά λόγω της ύπαρξης του D . Αν $D=0$, που είναι το σύνηθες, η (1.11) γίνεται,

$$\begin{aligned} P: \dot{x}(t) &= (A - BC)x(t) + Br(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (1.12)$$

1.1.2 Αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας

Οι εξισώσεις (1.1) και (1.3)-(1.4) εκφράζουν το μαθηματικό υπόδειγμα των συστημάτων στο πεδίο του χρόνου. Στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου είναι εξίσου ση-

μαντική και η αναπαράσταση τους στο πεδίο της συχνότητας καθώς τα σήματα που τα διατρέχουν εμφανίζονται σε διαφορετικές συχνότητες. Η μετάβαση από την μία μορφή στην άλλη είναι σχετικά απλή μέσω του γνωστού μετασχηματισμού Laplace.

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της (1.1) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} y(s) &= \frac{b(s)}{a(s)}r(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \\ &= G(s)r(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \end{aligned} \quad (1.13)$$

όπου η,

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1.14)$$

καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος. Αν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, ο όρος $c(s)$ είναι μηδενικός, οπότε η (1.13) καταλήγει στην,

$$y(s) = G(s)r(s) \quad (1.15)$$

Το πολυμεταβλητό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

μπορεί να μετασχηματιστεί κατά Laplace παρόμοια. Η μόνη διαφορά είναι ότι στη θέση της βαθμωτής συνάρτησης μεταφοράς προκύπτει ένας πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς.

Θεωρώντας λοιπόν μηδενικές αρχικές συνθήκες, ο μετασχηματισμός Laplace των (1.3)-(1.4) δίνει,

$$\begin{aligned} (sI - A)X(s) &= BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

υποθέτοντας ότι ο $(sI - A)$ είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, αντικαθιστώντας την $X(s)$ παίρνουμε,

$$Y(s) = [C(sI - A)^{-1}B + D]U(s) \quad (1.16)$$

όπου ο **πίνακας μεταφοράς (transfer matrix)** είναι,

$$G(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D] \quad (1.17)$$

Η διάσταση του $G(s)$ είναι $m \times r$.

Η μορφή του $G(s)$ είναι,

$$G(s)=\begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

όπου τα $g_{ij}(s)$ είναι βαθμωτές συναρτήσεις της μορφής,

$$g_{ij}(s)=\frac{b_{m_{ij}}s^{m_{ij}-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^{n_{ij}}+a_{n_{ij}-1}s^{n_{ij}-1}+\cdots+a_0}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

Ορισμός 1.2 Η βαθμωτή συνάρτηση μεταφοράς $g_{ij}(s)$ καλείται **ρητή πραγματική συνάρτηση**. Περαιτέρω αν $n_{ij} \geq m_{ij}$ η συνάρτηση καλείται **πρέπουσα (proper)** ενώ αν $n_{ij} > m_{ij}$ καλείται **αυστηρά πρέπουσα**. Παρόμοια ο πίνακας μεταφοράς $G(s)$ καλείται ρητός πραγματικός αν όλες οι $g_{ij}(s)$ είναι ρητές πραγματικές, και πρέπων ή αυστηρά πρέπων αν όλες οι $g_{ij}(s)$ είναι πρέπουσες ή αυστηρά πρέπουσες.

Από τον ορισμό προκύπτει ευθέως ότι αν μία βαθμωτή συνάρτηση είναι πρέπουσα, τότε το,

$$\text{ορ } g(s) \underset{s \rightarrow \infty}{\text{υπάρχει στο } \mathbb{C}}$$

ενώ αν είναι αυστηρά πρέπουσα,

$$\text{ορ } g(s) \underset{s \rightarrow \infty}{=} 0$$

Λόγω της (1.17) κάθε πίνακας συνάρτησης μεταφοράς είναι ρητός πραγματικός και πρέπων, αφού,

$$(sI-A)^{-1}=\frac{1}{\det(sI-A)}\text{adj}(sI-A)$$

και ο πίνακας $\text{adj}(sI-A)$ αποτελείται από πραγματικές συναρτήσεις βαθμού $< n$, ενώ βαθμός $[\det(sI-A)]=n$.

1.1.2.1 Πόλοι και μηδενικά

Πόλοι και μηδενικά καλούνται στην ορολογία των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου οι ρίζες του αριθμητή και του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Στην περίπτωση συστημάτων μίας εισόδου-μίας εξόδου ο ορισμός αυτός είναι προφανής, αλλά για τα πολυμεταβλητά συστήματα όπου έχουμε να κάνουμε με πίνακες μεταφοράς χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μηχανισμό, την μορφή **Smith-McMillan**.

Έστω λοιπόν ο πίνακας μεταφοράς $G(s)_{m \times r}$ και έστω $d(s)$ το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο μονικό πολυώνυμο των παρανομαστών της $G(s)$. Δηλαδή,

$$G(s) = N(s)/d(s) \quad (1.18)$$

όπου ο πολυωνυμικός πίνακας $N(s)$ μπορεί να γραφτεί σαν,

$$N(s) = \begin{bmatrix} A(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

με,

$$A(s) = \text{διαγ}(\lambda_1(s), \dots, \lambda_n(s))$$

$$n = \text{βαθμός}(N(s))$$

= ο μέγιστος δυνατός βαθμός του $N(s)$ για τουλάχιστον έναν μιγαδικό s

Τα πολυώνυμα $\lambda_i(s)$ είναι μοναδικά μονικά πολυώνυμα, τέτοια ώστε,

$$(i) \quad \lambda_i(s) \mid \lambda_{i+1}(s) \text{ για } i=1, \dots, n-1.$$

$$(ii) \quad \lambda_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \text{ για } i=1, \dots, n-1, \text{ όπου } D_i(s) \text{ είναι ο μονικός μέγιστος κοινός}$$

διαιρέτης όλων των μη μηδενικών υποριζουσών τάξης i του $N(s)$ με $D_0(s)=1$.

Αντικαθιστώντας την (1.18) στην (1.19) παίρνουμε,

$$G(s) = \frac{S_N(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} A_d(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου $A_d(s) = \text{διαγ}\left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}\right)$, έχοντας κάνει τις σχετικές απαλοιφές των κοινών όρων.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

Ορισμός 1.3 Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο** $\chi(s)$ του πίνακα συνάρτησης μεταφο-

ράς $G(s)$ ορίζεται ως,

$$\chi(s) = \psi_1(s) \psi_2(s) \dots \psi_n(s)$$

όπου τα $\psi_i(s)$ είναι τα πολυώνυμα των παρανομαστών της μορφής Smith-McMillan.

Ορισμός 1.4 Ο αριθμός \sum_i βαθμός($\psi_i(s)$) καλείται **βαθμός McMillan** του $G(s)$.

Ορισμός 1.5 Οι **πόλοι** του πίνακα συνάρτησης μεταφοράς $G(s)$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου.

Ορισμός 1.6 Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πολυώνυμο των $\varepsilon_i(s)$, $p_z(s)$, καλείται **μηδενικό πολυώνυμο** του $G(s)$.

Ορισμός 1.7 Οι ρίζες του μηδενικού πολυώνυμου καλούνται **μηδενικά μετάδοσης** (transmission zeros) του $G(s)$.

Ορισμός 1.8 Ένας μιγαδικός αριθμός z_0 καλείται **μηδενικό φραγής** (blocking zero) αν $G(z_0)u_0=0$.

Από τους παραπάνω ορισμούς βλέπουμε ότι υπάρχει μία διαφορά σε ότι αφορά στα μηδενικά ανάμεσα στα βαθμωτά και πολυμεταβλητά συστήματα. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι ένας μιγαδικός αριθμός z_0 είναι μηδενικό μετάδοσης αν και μόνον αν υπάρχει $u_0 \neq 0$ τέτοιο ώστε $G(z_0)u_0=0$.

Παράδειγμα 1.1 Έστω,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{2s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \frac{S_N(s)}{d(s)}$$

Ας θέσουμε τον $S_N(s)$ σε μορφή Smith,

$$D_0(s) = 1$$

$$D_1(s) = \mu.κ.δ. \{s, s(s+1)^2, 2s(s+1)^2, -s(s+1)^2\} = s$$

$$D_2(s) = \mu.κ.δ. \left(\begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix} \right) = s^2(s+1)^2$$

Επομένως τα $\lambda_i(s)$ είναι,

$$\lambda_1(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = s$$

$$\lambda_2(s) = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = \frac{s^2(s+1)^2}{s} = s(s+1)^2$$

και τέλος η μορφή Smith-McMillan υπολογίζεται ως,

$$G_M(s) = \text{διαγ} \left[\frac{\lambda_i(s)}{d(s)} \right] =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{(s+2)^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \text{διαγ} \left[\begin{array}{c} \varepsilon_i(s) \\ \psi_i(s) \end{array} \right]$$

Οι πόλοι της $G(s)$ είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$\chi(s) = \psi_1(s)\psi_2(s) = (s+1)^2(s+2)^4$$

δηλαδή δύο πόλοι στο -1 και τέσσερις πόλοι στο -2 , ενώ υπάρχει και ένα μηδενικό μεταφοράς στο 0 (μηδενικό πολυώνυμο $p_z(s) = \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s) = s$).

1.1.3 Μετάβαση από το πεδίο συχνότητας στο πεδίο του χρόνου

Δοθείσης της αναπαράστασης του χώρου κατάστασης στο πεδίο του χρόνου, (1.3)-(1.4), είναι θεωρητικά απλό να μεταβούμε στην αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας (1.16) (αν και η αντιστροφή του $(sI-A)$ δεν είναι υπολογιστικά εύκολη – ας όψεται το MATLAB). Η αντίστροφη διαδικασία δεν είναι όμως προφανής, ιδιαίτερα όταν επιθυμούμε οι προκύπτοντες πίνακες να έχουν συγκεκριμένη δομή, για παραδειγμα να είναι ελάχιστης πραγμάτωσης. Προς το παρόν θα περιγραφεί μία μέθοδος που υπολογίζει μία «ικανοποιητική» δομή.

Ας γράψουμε την $G(s)$ σε μορφή στηλών ως,

$$G(s) = [g_1(s), g_2(s), \dots, g_r(s)]$$

όπου κάθε στήλη εκφράζεται ως,

$$g_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} + \delta_i$$

όπου $d_i(s)$ είναι το κοινό (μονικό) πολυώνυμο των παρανομαστών του $g_i(s)$,

$$d_i(s) = s^{k_i} + d_i^1 s^{k_i-1} + \dots + d_i^{k_i}$$

$n_i(s)$ είναι ένα διάνυσμα πολωνύμων, με βαθμούς μικρότερους των k_i , και δ_i ένα διάνυσμα σταθερών. Έστω το j -στό στοιχείο του $n_i(s)$,

$$v_{ji}(s) = v_{ji} s^{k_i-1} + v_{ji}^2 s^{k_i-2} + \dots + v_{ji}^{k_i}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_i^{k_i} & -d_i^{k_i-1} & -d_i^{k_i-2} & \dots & -d_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} v_{1i}^{k_i} & v_{1i}^{k_i-1} & \dots & v_{1i} \\ v_{2i}^{k_i} & v_{2i}^{k_i-1} & \dots & v_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{mi}^{k_i} & v_{mi}^{k_i-1} & \dots & v_{mi} \end{bmatrix}$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η τετράδα $(A_i, B_i, C_i, \delta_i)$ είναι μία πραγμάτωση της $g_i(s)$. Συνεπάγεται ότι μία πραγμάτωση του $G(s)$ δίνεται από την τετράδα (A, B, C, D) όπου,

$$A = \text{διαγ}\{A_1, A_2, \dots, A_r\}, \quad B = \text{διαγ}\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$$

$$C = \text{διαγ}\{C_1, C_2, \dots, C_r\}, \quad D = \text{διαγ}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r\}$$

2 Δυναμικά συστήματα

2.1 Μετασχηματισμοί κατάστασης

Έστω πάλι το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.4)$$

και ένας ομαλός $n \times n$ πίνακας M . Το διάνυσμα,

$$z = Mx$$

καλείται **μετασχηματισμένο διάνυσμα κατάστασης**.

Μπορούμε εύκολα να μετασχηματίσουμε το σύστημα (1.3)-(1.4) έτσι ώστε να έχουμε τις εξισώσεις κατάστασης ως προς z . Στην πραγματικότητα το z δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός των αρχικών καταστάσεων. Έχουμε:

$$\dot{z} = M\dot{x} = M(Ax + Bu) = MAx + MBu$$

Όμως,

$$x = M^{-1}z$$

και αντικαθιστώντας,

$$\begin{aligned} \dot{z} &= MAM^{-1}z + MBu \\ y &= CM^{-1}z \end{aligned}$$

Ορίζοντας τους μετασχηματισμένους πίνακες,

$$\begin{aligned} \hat{A} &= MAM^{-1} \\ \hat{B} &= MB \\ \hat{C} &= CM^{-1} \end{aligned}$$

λαμβάνουμε τις μετασχηματισμένες εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \hat{A}z + \hat{B}u \\ y &= \hat{C}z \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι οι πίνακες A και \hat{A} έχουν πάντα τις ίδιες ιδιοτιμές και συνεπώς ο μετα-

σχηματισμός M δεν αλλάζει τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος.

2.1.1 Διαγώνιος μετασχηματισμός

Ένας ιδιαίτερα χρήσιμος μετασχηματισμός είναι αυτός που θέτει έναν τετραγωνικό πίνακα σε διαγώνιο μορφή. Ας θεωρήσουμε λοιπόν έναν πίνακα $A(n \times n)$, τον πίνακα των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων του W , και τον πίνακα των ιδιοτιμών $\Lambda = \text{διαγ}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$. Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν $\lambda_i \neq \lambda_j$. Τότε ο πίνακας W είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A = W \Lambda W^{-1}$$

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε τον μετασχηματισμό $M = W^{-1}$. Ο μετασχηματισμένος πίνακας του συστήματος είναι,

$$\hat{A} = W^{-1} A W = W^{-1} (W \Lambda W^{-1}) W = \Lambda$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Οι μετασχηματισμένοι πίνακες εισόδων και εξόδων είναι,

$$\hat{B} = W^{-1} B \quad \text{και} \quad \hat{C} = C W$$

Αν τις μετασχηματισμένες καταστάσεις τις καλέσουμε ξ θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \Lambda \xi + \hat{B} u \\ y &= \hat{C} \xi \end{aligned}$$

Οι καταστάσεις ξ καλούνται **αποσυζευγμένες καταστάσεις** (decoupled states) και έχουν την βασική ιδιότητα ότι η συμπεριφορά τους είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες: σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή λ_k αντιστοιχεί και μία διαγώνια κατάσταση.

Αν τώρα οι ιδιοτιμές δεν είναι διακεκριμένες και δεν μπορούν να βρεθούν n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 2.1 Έστω ο $(n \times n)$ πίνακας A με k διακεκριμένες ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, κάθε μία από τις οποίες έχει πολλαπλότητα m_i . Τότε μπορούμε πάντα να βρούμε έναν ομαλό πίνακα W , διαμερισμένο ως,

$$W = [W_1 \quad W_2 \quad \dots \quad W_k]$$

τέτοιον ώστε,

$$A = W J W^{-1} \tag{2.1}$$

όπου,

$$J = \text{διαγ}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_k]$$

Οι πίνακες W_i, J_i είναι διαστάσεων $(m_i \times m_i)$. Οι στήλες των W_i αποτελούν μία ειδικά επιλεγμένη βάση του μηδενοχώρου $\mathcal{N}_i, i=1, \dots, k$. Οι πίνακες J_i μπορούν περαιτέρω να υποδιαμεριστούν ως,

$$J_i = \begin{bmatrix} J_{i1} & J_{i2} & \dots & J_{i l_i} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

όπου κάθε υποπίνακας J_{ij} είναι της μορφής,

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας J καλείται **κανονική μορφή Jordan** του πίνακα A .

Ο υπολογισμός του πίνακα W επιτυγχάνεται ως εξής:

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι από την (2.1) προκύπτει ότι,

$$A W = W J \quad (2.3)$$

Ας παραστήσουμε τις στήλες του W ως q_1, q_2, \dots, q_n . Τότε από τη μορφή του J και την (2.3) προκύπτει ότι,

$$A q_i = \lambda q_i + \gamma_i q_{i-1} \quad (2.4)$$

όπου το γ_i είναι 0 ή 1, ανάλογα με τον J . Ας υποδιαμερίσουμε τον W_i παρόμοια με τον υποδιαμερισμό (2.2), ως,

$$W_i = \begin{bmatrix} W_{i1} & W_{i2} & \dots & W_{i l_i} \end{bmatrix}$$

Τότε ο αριθμός γ_i είναι 0 όταν η αντίστοιχη στήλη q_i του W είναι η πρώτη στήλη ενός υποδιαμερίσματος. Από την (2.4) προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή το q_i είναι ιδιοδιάνυσμα του A , άρα οι πρώτες στήλες κάθε υποδιαμερίσματος είναι τα ιδιοδιανύσματα του A . Οι υπόλοιπες στήλες ακολουθούν από την (2.4) με $\gamma_i=1$. Αυτές οι επόμενες στήλες καλούνται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα** του A . Η διαδικασία σταματά όταν η (2.4) δεν έχει λύση.

2.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω το γραμμικό, μη ομογενές, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση πίνακα e^A που ορίζεται αντίστοιχα με την βαθμωτή εκθετική συνάρτηση e^a ,

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots \quad (2.5)$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε τετραγωνικό πίνακα A .

Συλλέγοντας τους όρους που περιέχουν το $x(t)$ αριστερά και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με e^{-At} , βρίσκουμε:

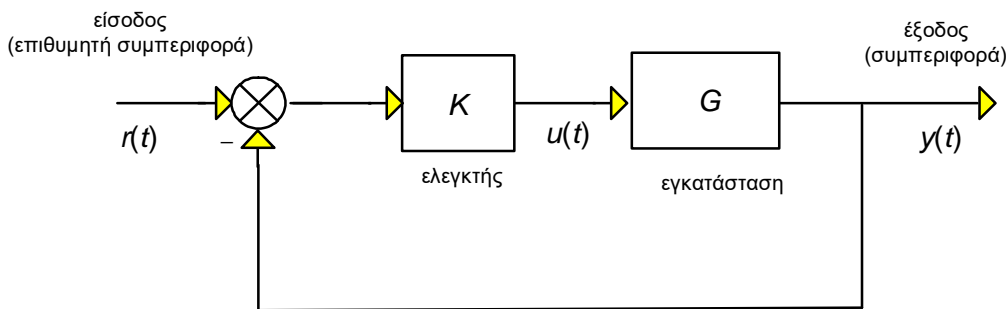
$$\begin{aligned} e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + c \\ &\Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.6)$$

Ο πίνακας,

$$\Phi(t) = e^{At}$$

καλείται **πίνακας μετάβασης** από την αρχική στιγμή $t_0=0$ στην χρονική στιγμή t . Υπολογίζεται (σχετικά) εύκολα με την χρήση του διαγώνιου μετασχηματισμού της προηγούμενης ενότητας.

Πως όμως το κλασσικό διάγραμμα ελέγχου,



Σχήμα 2.1 Κλασικό δομικό διάγραμμα ελέγχου

αναπαρίσταται μέσω της (1.3);

Από το Σχ. 2.1, ο έλεγχος δίνεται από την,

$$u(t) = K[r(t) - y(t)] \tag{2.7}$$

Αντικαθιστώντας τις (2.7) και (1.4) στην (1.3), παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + BK[r(t) - Cx(t)], \quad x(0) = x_0 \\ \Rightarrow \dot{x}(t) &= (A - BKC)x(t) + BKr(t), \quad x(0) = x_0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2.1 Γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Αν οι ιδιοτιμές του A είναι διακεκριμένες ή δεν είναι αλλά μπορεί να βρεθεί ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανυσμάτων,

$$e^{At} = e^{(W\Lambda W^{-1})t} = W e^{\Lambda t} W^{-1} = \Phi(t) \tag{2.9}$$

όπου,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

και W ο πίνακας των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων.

Σημείωση: Η (2.9) δεν είναι προφανής. Χρειάζεται να δείξουμε ότι,

$$e^{W\Lambda W^{-1}t} = W e^{\Lambda t} W^{-1}$$

Η βασική ιδιότητα που θα χρησιμοποιήσουμε είναι ότι αν,

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow B^n = (P^{-1}AP)^n = P^{-1}A^nP$$

Πράγματι αν,

$$B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = AP \Rightarrow PB^2 = APB = APP^{-1}AP = A^2P \Rightarrow B^2 = P^{-1}A^2P$$

Προχωρώντας επαγωγικά αποδεικνύεται η εν λόγω ιδιότητα. Στη συνέχεια ας γράψουμε την (2.5) ως,

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \Rightarrow e^{P^{-1}AP} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(P^{-1}AP)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^{-1}A^kP}{k!} = P^{-1} \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \right\} P = P^{-1}e^A P$$

Συνεπώς κάθε φορά θα πρέπει να υπολογίζουμε τον διαγώνιο μετασχηματισμό W , τον αντίστροφο W^{-1} , τον πίνακα ιδιοτιμών A και μετά να υπολογίζουμε την εκθετική παράσταση, e^{At} (εναλλακτικά χρησιμοποιούμε την εντολή **expm** του Matlab).

Αν το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή περιγράφεται από την,

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

η λύση απλουστεύεται καθώς η (2.6) γίνεται,

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (2.10)$$

και μετασχηματίζοντάς την σε μορφή Jordan μέσω της $x = W\xi$, λαμβάνουμε,

$$W\xi(t) = e^{At} W\xi_0$$

ή

$$\xi(t) = W^{-1} e^{At} W\xi_0 = e^{At} \xi_0$$

Η αρχική συνθήκη ξ_0 βρίσκεται εύκολα αφού,

$$\xi_0 = W^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} x_0 = v_i^T x_0$$

(όπου το v_i^T είναι η i -οστή γραμμή του W^{-1}).

Έτσι, η (2.10) γίνεται,

$$\begin{aligned} x(t) &= W\xi(t) = [w_1 \quad \cdots \quad w_n] \xi(t) = w_1 \xi_1(t) + \cdots + w_n \xi_n(t) \\ &= (v_1^T x_0) e^{\lambda_1 t} w_1 + \cdots + (v_n^T x_0) e^{\lambda_n t} w_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

Η ανάπτυξη αυτή καλείται **αποσύνθεση modal**. Καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο η συνολική χρονική απόκριση συντίθεται από ένα άθροισμα επιμέρους αποκρίσεων που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος.

Παράδειγμα 2.1 Ας δούμε το παράδειγμα της αναδεδυόμενης δεξαμενής (δες Παράρτημα),

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.12)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα A είναι:

$$\lambda_1 = -0,01, \quad \lambda_2 = -0,02$$

ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

$$w_1 = [1 \quad 0]^T, \quad w_2 = [0 \quad 1]^T$$

Έτσι, η (2.9) δίνει,

$$e^{At} = W e^{At} W^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-0,01t} & 0 \\ 0 & e^{-0,02t} \end{bmatrix}$$

ενώ η λύση (2.6) είναι,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-0,01t} & 0 \\ 0 & e^{-0,02t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-0,01(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-0,02(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-0,01t} x_1(0) + e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} u_1(\tau) + e^{0,01\tau} u_2(\tau)] d\tau \\ e^{-0,02t} x_2(0) + e^{-0,02t} \int_0^t [-0,25 e^{0,02\tau} u_1(\tau) + 0,75 e^{0,02\tau} u_2(\tau)] d\tau \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.13)$$

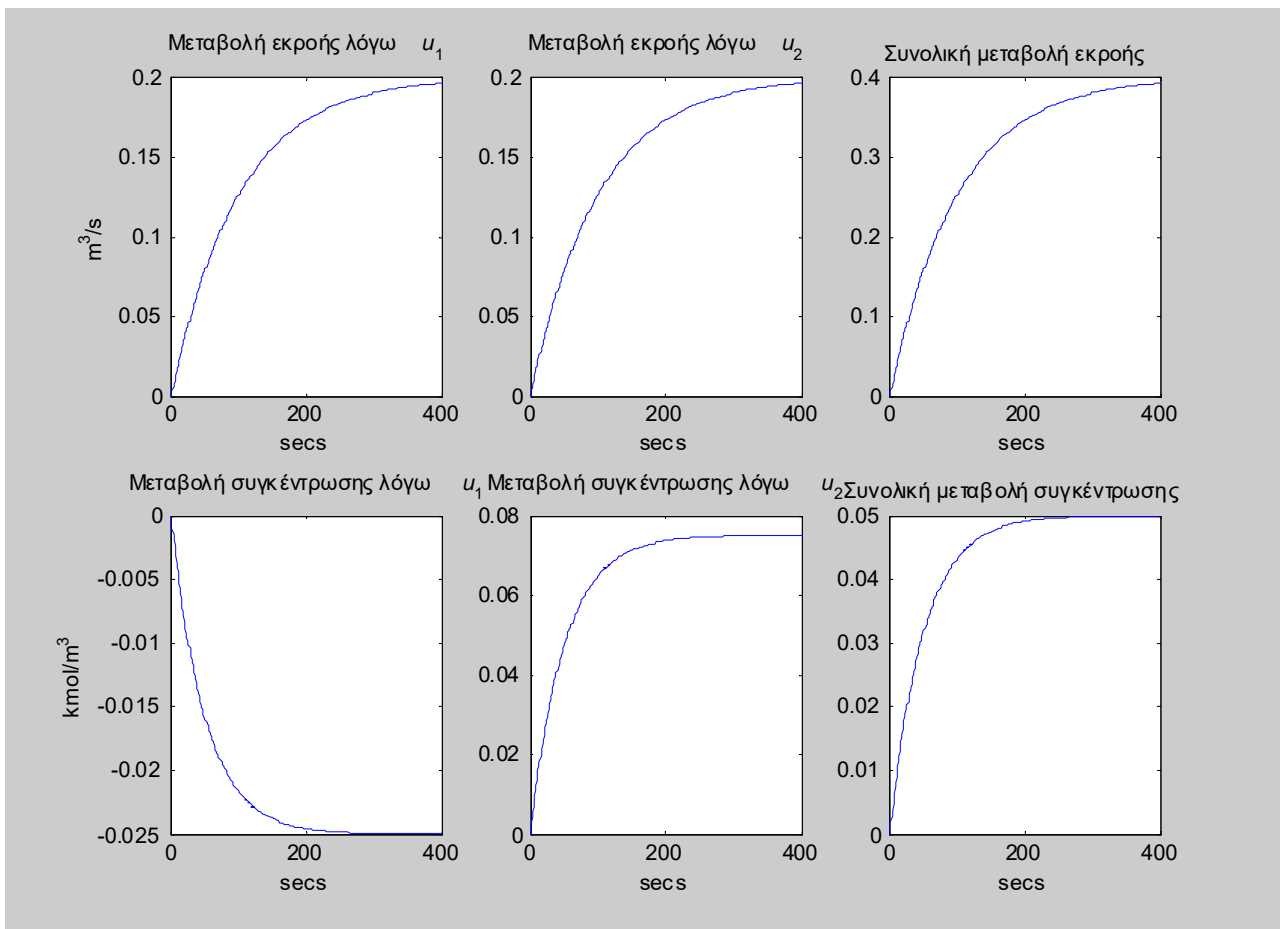
Ας δούμε κάποιες αποκρίσεις για μηδενικές αρχικές συνθήκες και διάφορες τιμές της εισόδου $u(t)$.

A. Βηματική συνάρτηση $u(t) = [0,002 \quad 0,002]^T \text{ m}^3/\text{s}$. Η (2.13) γίνεται,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0,004e^{-0,01t} \int_0^t e^{0,01\tau} d\tau \\ 0 \\ 0,001e^{-0,02t} \int_0^t e^{0,02\tau} d\tau \\ 0 \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= 0,004e^{-0,01t} \left[\frac{1}{0,01} e^{0,01\tau} \right]_0^t = 0,4e^{-0,01t} [e^{0,01t} - 1] = 0,4 - 0,4e^{-0,01t} \\ x_2(t) &= 0,001e^{-0,02t} \left[\frac{1}{0,02} e^{0,02\tau} \right]_0^t = 0,05e^{-0,02t} [e^{0,02t} - 1] = 0,05 - 0,05e^{-0,02t} \end{aligned} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Όπως φαίνεται από την (2.14) οι αποκρίσεις τείνουν σε μια σταθερή τιμή ενώ οι εκθέτες των εκθετικών όρων είναι οι ιδιοτιμές του A . Το γεγονός ότι είναι αρνητικές είναι ο λόγος που οι αποκρίσεις είναι πεπερασμένες. Η παρατήρηση αυτή θα γενικευθεί στην ενότητα περί σταθερότητας.

Η γραφική αναπαράσταση των αποκρίσεων φαίνονται στο Σχ. 2.2, όπου παρατίθενται οι αποκρίσεις για κάθε είσοδο ξεχωριστά (βλέπε Εξ. (2.13)) και οι συνολικές.



Σχήμα 2.2 Χρονικές αποκρίσεις σε βηματική είσοδο

B. Αρμονική είσοδος $u(t)=0,002 \times [\eta\mu(20\pi t) \quad \eta\mu(20\pi t)]$.

Στην περίπτωση αυτή η (2.13) γίνεται,

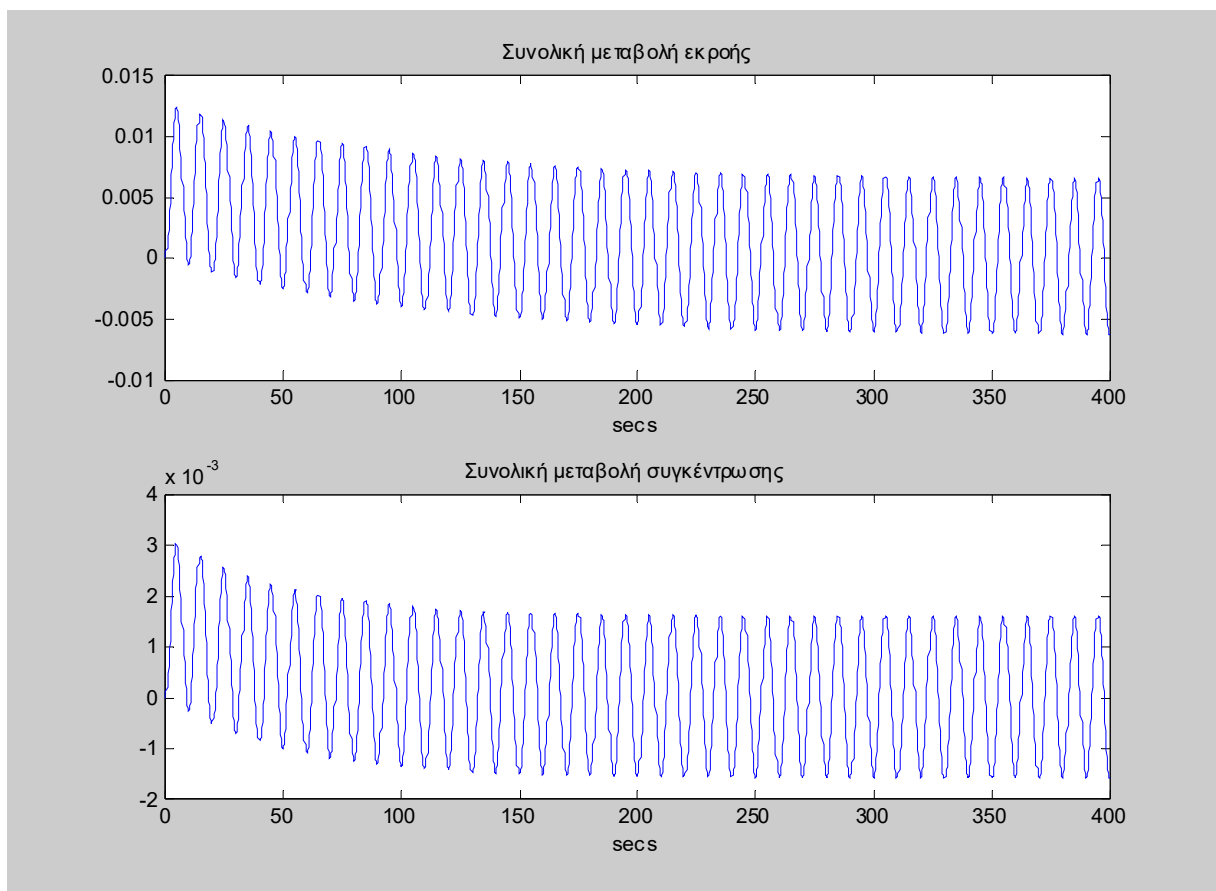
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 \times e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau) + e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \\ 0,002 \times e^{-0,02t} \int_0^t [-0,25e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau) + 0,75e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 0,004 \times e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \\ \Rightarrow x_2(t) &= 0,001 \times e^{-0,02t} \int_0^t [e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t) &= 0,004 \times e^{-0,01t} \left\{ \frac{e^{0,01\tau}}{0,01^2 + (20\pi)^2} [0,01\eta\mu(20\pi\tau) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi\tau)] \right\}_0^t \\ x_2(t) &= 0,001 \times e^{-0,02t} \left\{ \frac{e^{0,02\tau}}{0,02^2 + (20\pi)^2} [0,02\eta\mu(20\pi\tau) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi\tau)] \right\}_0^t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x_1(t) &= \frac{0,004}{0,01^2 + (20\pi)^2} [0,01\eta\mu(20\pi t) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t)] - \frac{0,004 \cdot 20\pi}{0,01^2 + (20\pi)^2} e^{-0,01t} \\ x_2(t) &= \frac{0,001}{0,02^2 + (20\pi)^2} [0,02\eta\mu(20\pi t) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t)] - \frac{0,001 \cdot 20\pi}{0,02^2 + (20\pi)^2} e^{-0,02t} \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι οι αποκρίσεις «καταλήγουν» σε μία αρμονική απόκριση αφού η επίδραση των εκθετικών όρων έχει εξασθενήσει. Τα ευρήματα μας επιβεβαιώνονται από τα γραφήματα του Σχ. 2.3.



Σχήμα 2.3 Χρονικές αποκρίσεις σε αρμονική είσοδο

2.2.2 Γραμμικά εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα

Αν οι ιδιοτιμές του A δεν είναι διακεκριμένες τότε το σύστημα μπορεί να τεθεί σε μορφή Jordan μέσω του μετασχηματισμού 2.1,

$$A = WJW^{-1}$$

όπου,

$$J = \text{διαγ}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_k]$$

Έστω ότι ο A έχει k διακεκριμένες ιδιοτιμές, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ με πολλαπλότητες m_i . Τότε,

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \text{διαγ} \begin{bmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{J_k t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_i t} = \text{διαγ} \begin{bmatrix} e^{J_{i1} t} & & & \\ & e^{J_{i2} t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{J_{i m_i} t} \end{bmatrix}$$

$$e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_{ij}t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου n_{ij} είναι η διάσταση του J_{ij} .

2.3 Ιδιότητες συστημάτων

2.3.1 Ελεγχιμότητα

Θεωρούμε το προαναφερθέν σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

Ορισμός 2.1 Ένα σύστημα καλείται **πλήρως ελέγξιμο (completely controllable)** αν δεδομένων των αρχικών συνθηκών κατάστασης x_0 και μιας επιθυμητής τιμής καταστάσεων $x^*(t)$, μπορούμε πάντα να βρούμε κατάλληλες και πεπερασμένες τιμές ελέγχου $u(t)$ ώστε το σύστημα να φθάσει στην επιθυμητή τιμή σε πεπερασμένο χρόνο $t < \infty$.

Ορισμός 2.2 Ο **Γραμιανός³ ελεγχιμότητας** ορίζεται ως,

$$W_c(0, t) = W_c(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (2.15)$$

Θεώρημα 2.2 Το σύστημα (1.3) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνον αν ο $n \times nr$ **πίνακας ελεγχιμότητας**,

$$\Gamma = [B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή $\text{βαθμός}(\Gamma) = n$.

³ Gramian: από τον μαθηματικό Gram

2.3.2 Παρατηρησιμότητα

Ορισμός 2.3 Ένα σύστημα καλείται *πλήρως παρατηρήσιμο* (*completely observable*) αν γνωρίζοντας τις τιμές των εξόδων $y(t)$ και εισόδων $u(t)$ για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα t , $0 < t < \infty$ τότε μπορούμε να ανακτήσουμε τις τιμές των μεταβλητών κατάστασης $x(t)$ για οποιαδήποτε χρονική στιγμή του διαστήματος $[0, t]$.

Αυτό σημαίνει ότι παρατηρώντας τις σχέσεις του συστήματος με το περιβάλλον (είσοδοι-εξοδοί) μπορούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος.

Θεώρημα 2.3 Ένα σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνον αν ο $nm \times n$ πίνακας παρατηρησιμότητας,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή βαθμός $[\Theta] = n$.

Η ελεγχιμότητα και η παρατηρησιμότητα είναι έννοιες *δυϊκές*. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε τα συστήματα (Σ1), (Σ2):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\Sigma 1)$$

και,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A^T x(t) + C^T u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= B^T x(t) \end{aligned} \quad (\Sigma 2)$$

τότε οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν ταυτόχρονα:

Σ1	Σ2
ελεγχιμότητα	παρατηρησιμότητα
παρατηρησιμότητα	ελεγχιμότητα

2.3.3 Ελάχιστες πραγματώσεις

Ας εξετάσουμε το τυπικό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.4)$$

που εκκινεί από ακινησία δηλαδή $x(0)=0$. Η σχέση εισόδου-εξόδου για το σύστημα αυτό δίνεται από την σχέση,

$$y(t) = \int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) \quad (2.16)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η σχέση (2.16), δηλαδή η απεικόνιση εισόδου-εξόδου, είναι το ουσιαστικό αντικείμενο της μελέτης μας, τότε το σύστημα χώρου κατάστασης είναι απλά μία πραγμάτωση αυτής της απεικόνισης, δηλαδή ένας τρόπος να ορισθεί αυτή η απεικόνιση με όρους μίας διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

Ορισμός 2.4 Δύο πραγματώσεις είναι ισοδύναμες αν,

$$\int_0^t Ce^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau + Du(t) = \int_0^t C_1 e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau + D_1 u(t)$$

για όλες τις συναρτήσεις εισόδου $u(t)$, $t \geq 0$.

Θεώρημα 2.4 Δύο πραγματώσεις (A, B, C, D) , (A_1, B_1, C_1, D_1) είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν $D=D_1$ και,

$$Ce^{At}B = C_1 e^{A_1 t} B_1, \quad \forall t \geq 0.$$

Ορισμός 2.5 Η πραγμάτωση (A, B, C, D) καλείται ελάχιστη αν δεν υπάρχει ισοδύναμη πραγμάτωση μικρότερης τάξης.

Θεώρημα 2.5 Αν το ζεύγος (C, A) είναι παρατηρήσιμο και το (A, B) ελέγξιμο, τότε η (A, B, C, D) είναι ελάχιστη πραγμάτωση.

2.3.4 Ευστάθεια

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την ευστάθεια, αυτό όμως που ενδιαφέρει πρακτικά είναι η κατάσταση $x(t)$ του συστήματος να μην «εκρήγνυται». Αυτό πρέπει να ισχύει τόσο για αυτόνομη κίνηση ($u(t)=0$) όσο και για βεβιασμένη ($u(t) \neq 0$). Η πρώτη απαίτηση καλείται **ασυμπτωτική ευστάθεια** (*asymptotic stability*) ενώ η δεύτερη **ευσ-**

στάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου (BIBO stability).

Ορισμός 2.6 Το σημείο x_0 είναι **σημείο ισορροπίας** της διαφορικής εξίσωσης,

$$\dot{x}(t)=f(x(t))$$

αν και μόνον αν,

$$0=f(x_0)$$

Για το γραμμικό σύστημα $\dot{x}(t)=Ax(t)$ ένα προφανές σημείο ισορροπίας είναι το $x^*(t)=0$, αφού απαιτείται $Ax(t)=0$. Αν όμως ο A έχει μηδενικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχουν άπειρα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν την εξίσωση ισορροπίας. Στη συνέχεια, η περίπτωση αυτή δεν θα αντιμετωπισθεί.

Ορισμός 2.7 Το σύστημα $\{\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\}$ καλείται **ευσταθές κατά Lyapunov** γύρω από το σημείο ισορροπίας $x^*=0$, αν για μικρές μετατοπίσεις γύρω από το $x^*=0$, δηλαδή για αρχικές συνθήκες x_0 τέτοιες ώστε,

$$\|x_0\| < \delta$$

η τροχιά του συστήματος $x(t)$ παραμένει πάντα μέσα σε μια φραγμένη περιοχή του x^* , δηλαδή,

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

όπου $\varepsilon = \varepsilon(\delta) < \infty$.

Ορισμός 2.8 Το σύστημα $\{\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\}$ καλείται **ασυμπτωτικά ευσταθές** γύρω από το σημείο ισορροπίας $x^*=0$ αν υπάρχει μια περιοχή δ έτσι ώστε για αρχικές συνθήκες εντός αυτής της περιοχής το σύστημα να τείνει πάντα να επιστρέψει στο $x^*=0$, δηλαδή,

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές κατά Lyapunov. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γιατί ένα σύστημα μπορεί να παραμένει διαρκώς σε μια πεπερασμένη απόσταση γύρω από το σημείο ισορροπίας χωρίς ποτέ να το προσεγγίζει ικανοποιητικά (ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το είδος της αδιάφορης ισορροπίας στην μηχανική).

Θεώρημα 2.6 Το σύστημα $\{\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\}$ είναι,

(α) Ευσταθές κατά Lyapunov αν και μόνον αν $\text{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$ και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές είναι διακεκριμένα.

(β) Ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνον αν $\text{Re}\{\lambda_i\} < 0$.

Απόδειξη: Η λύση του συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Το σημείο ισορροπίας είναι το $x^* = 0$ (εκτός αν μία $\lambda = 0$) και χρησιμοποιώντας τον διαγώνιο μετασχηματισμό $A = W^{-1} \Lambda W$ έχουμε:

$$x(t) = W^{-1} e^{\Lambda t} W x_0$$

Η λύση $x(t)$ είναι δηλαδή γραμμικός συνδυασμός των χρονικών εκθετικών $e^{\lambda_i t}$. Είναι γνωστό όμως ότι, $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$ αν και μόνο αν $\text{Re}(\lambda_i) < 0$.

Αν τώρα κάθε $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$, οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός θα τείνει επίσης στο μηδέν. Αντίστροφα αν ο γραμμικός συνδυασμός δεν τείνει στο μηδέν, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος $e^{\lambda_i t}$ που δεν τείνει στο μηδέν, πράγμα εφικτό μόνο αν $\text{Re}(\lambda_i) > 0$, όπερ άτοπο.

Επειδή η ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του A , ο πίνακας αυτός καλείται **πίνακας ευστάθειας** του συστήματος (*stability matrix*). Ειδικότερα αν όλες οι ιδιοτιμές του ικανοποιούν $\text{Re}(\lambda_i) < 0$ (δηλαδή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής) τότε ο πίνακας A καλείται και **Hurwitz**.

Ορισμός 2.9 Έστω ότι το σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.4)$$

βρίσκεται σε μηδενικές αρχικές συνθήκες $x(0) = 0$ και διεγείρεται από πεπερασμένες τιμές εισόδου, $\|u(t)\| < M < \infty$ για $0 < t < \infty$. Καλείται **ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου** αν κάθε απόκριση $y(t)$ είναι επίσης πεπερασμένη, δηλαδή,

$$\|y(t)\| < P < \infty \quad \text{για } 0 < t < \infty$$

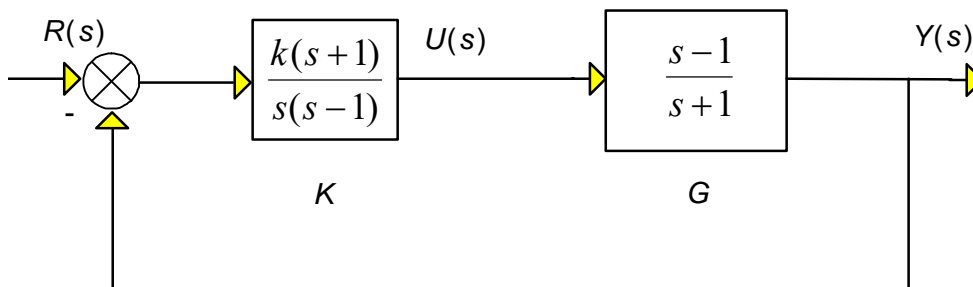
Θεώρημα 2.7 Η ευστάθεια φραγμένης-εισόδου φραγμένης εξόδου είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ευστάθεια ή ισοδύναμα, όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου. Το αντίθετο ισχύει μόνον αν το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο και παρατηρήσιμο.

Ορισμός 2.10 Ένα σύστημα είναι **εσωτερικά ευσταθές** αν κανένα από τα τμήματα

που το απαρτίζουν δεν περιέχει κρυμμένα **modes**, και η εφαρμογή φραγμένων εξωτερικών εισόδων σε οποιοδήποτε σημείο του έχει σαν αποτέλεσμα φραγμένα σήματα σε οποιοδήποτε σημείο του.

Ο τελευταίος αυτός ορισμός είναι ο σπουδαιότερος από άποψη σχεδίασης και αυτός που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, αφού εξασφαλίζει την ομαλή (ευσταθή) λειτουργία όλων των μερών ενός διασυνδεδεμένου συστήματος.

Παράδειγμα 2.2 Έστω το σύστημα του Σχ. 2.4.

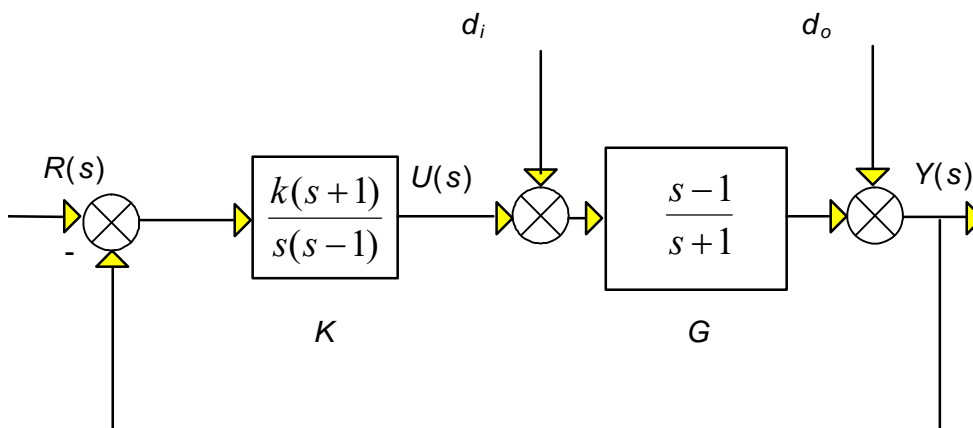


Σχήμα 2.4

Η συνάρτηση εισόδου αναφοράς-εξόδου ($Y(s)/R(s)$) είναι,

$$H(s) = \frac{GK}{1 + GK} = \frac{k(s+1)(s-1)}{1 + \frac{k(s+1)(s-1)}{s(s-1)(s+1)}} = \frac{k}{s+k}$$

Όπως φαίνεται το σύστημα είναι ευσταθές για $k > 0$. Όμως αν θεωρήσουμε διαταραχές d_i και d_o ,



η συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής εξόδου-σήματος ελέγχου ($U(s)/d_o(s)$) είναι,

$$H(s) = -\frac{k(s+1)}{(s-1)(s+k)}$$

που είναι ασταθής (πόλος στο $s=-1$). Έτσι ενώ το σύστημα είναι ευσταθές δεν είναι εσωτερικά ευσταθές. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να εξετάσουμε την απόκριση των εσωτερικών σημάτων u, y σε σχέση με τα εξωτερικά σήματα d_i, d_o . Εύκολα βρίσκουμε,

$$\begin{aligned} U(s) &= (I+KG)^{-1}d_i - K(I+GK)^{-1}d_o \\ Y(s) &= G(I+KG)^{-1}d_i + (I+GK)^{-1}d_o \end{aligned} \quad (2.17)$$

Επομένως για να είναι το σύστημα αυτό εσωτερικά ευσταθές πρέπει και οι τέσσερις πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς που εμφανίζονται στην (2.17) να είναι ευσταθείς.

2.3.5 Σταθεροποιησιμότητα

Σε πρακτικές εφαρμογές είναι αρκετή μια πιο ασθενής ιδιότητα από την ελεγχιμότητα, η **σταθεροποιησιμότητα** (stabilizability). Η ιδιότητα αυτή σχετίζεται με την ελεγχιμότητα των ασταθών πόλων.

Ορισμός 2.11 Το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)-$$

είναι σταθεροποιήσιμο αν ο ασταθής υποχώρος του περιέχεται στον ελέγξιμο υποχώρο του.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την πρόταση: το ζεύγος (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο.

Αυτό που στην ουσία περιγράφει η ιδιότητα αυτή είναι η δυνατότητα του ελέγχου των ασταθών καταστάσεων, αφού έτσι κι αλλιώς οι σταθερές καταστάσεις δεν δημιουργούν προβλήματα καθώς τείνουν στο μηδέν.

Η ιδιότητα αυτή εξακριβώνεται μετασχηματίζοντας το σύστημα στην **ελέγξιμη κλιμακωτή μορφή**:

$$\bar{A} = \left[\begin{array}{c|c} A_{uc} & 0 \\ \hline A_{21} & A_c \end{array} \right], \quad \bar{B} = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline B_c \end{array} \right]$$

μέσω ενός κατάλληλου μοναδικού πίνακα μετασχηματισμού ομοιότητας T , δηλαδή $\bar{A} = TAT^T$, $\bar{B} = TB$. Στη μορφή αυτή, ο A_c είναι το ελέγξιμο κομμάτι του A , ενώ ο A_{uc} το μη ελέγξιμο. Επομένως το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο αν ο A_{uc} είναι ασυ-

μπτωτικά ευσταθής, δηλαδή το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του είναι αυστηρά (<0) αρνητικό.

Η εντολή **ctrbf** του MATLAB χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο που αναφέρεται στον Rosenbrock για να υπολογίσει τη μορφή αυτή. Η συνάρτηση **con_stb** που παρατίθεται στο Παράρτημα κάνει τα υπόλοιπα.

(Σημείωση: η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιεί την ιδιότητα του δυϊσμού που αναφέρεται παρακάτω).

Παράδειγμα 2.3 Έστω δύο συστήματα της μορφής (3.19) με πίνακες,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `con_stb` βρίσκουμε ότι το ζεύγος (A_1, B_1) δεν είναι ελέγξιμο αλλά είναι σταθεροποιήσιμο, ενώ το (A_2, B_2) δεν είναι ούτε ελέγξιμο ούτε σταθεροποιήσιμο.

2.3.6 Εντοπισιμότητα

Μία πιο ασθενής ιδιότητα από την παρατηρησιμότητα είναι η **εντοπισιμότητα** (detectability). Η ιδιότητα αυτή ορίζεται ως εξής:

Ορισμός 2.12 Το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.3)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.4)$$

είναι εντοπίσιμο αν ο μη παρατηρήσιμος υποχώρος του περιέχεται στον σταθερό υποχώρο του. Εναλλακτικά αυτό σημαίνει ότι οι μη παρατηρήσιμες **modes** είναι σταθερές.

Η ιδιότητα αυτή εξακριβώνεται με αντίστοιχο τρόπο της περίπτωσης της σταθεροποιησιμότητας, αφού πρώτα μετασχηματίσουμε το σύστημα στην κλιμακωτή παρατηρήσιμη μορφή,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{uo} & \vdots & A_{12} \\ \hline 0 & \vdots & A_o \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad C_o]$$

μέσω ενός μοναδικού πίνακα μετασχηματισμού T ($\bar{A} = TAT^T$, $\bar{C} = CT^T$). Στη μορφή αυτή, ο υποπίνακας A_{uo} είναι το ασταθές τμήμα, επομένως για να είναι το σύστημα εντοπίσιμο πρέπει $\text{Re}\{\lambda_i(A_{uo})\} < 0$. Η συνθήκη αυτή χρησιμοποιείται στη συνάρτηση

obs det που παρατίθεται στο παράρτημα.

Η σταθεροποιησιμότητα και η εντοπισιμότητα είναι επίσης έννοιες δυϊκές. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε τα συστήματα (Σ1), (Σ2):

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (\Sigma 1)$$

και,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A^T x(t) + C^T u(t), \quad x(0) = x_0 \\ y(t) &= B^T x(t) \end{aligned} \quad (\Sigma 2)$$

τότε οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν ταυτόχρονα:

Σ1	Σ2
σταθεροποιησιμότητα	εντοπισιμότητα
εντοπισιμότητα	σταθεροποιησιμότητα

2.4 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

Η θεωρία των γραμμικών συστημάτων δεν είναι απαραίτητα περιοριστική. Μη γραμμικά συστήματα μπορούν να γραμμικοποιηθούν γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας, και το προκύπτον σύστημα να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και σύνθεση του συστήματος. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Έστω ότι έχουμε το εξής μη γραμμικό σύστημα n μεταβλητών κατάστασης x_i , m εξόδων y_j και r εισόδων u_k ,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x) \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι οι εισόδοι σταθεροποιούνται σε ένα ορισμένο επίπεδο,

$$u = u^* = \text{σταθερό}$$

Καλούμε **καταστάσεις (σημεία) ισορροπίας** του συστήματος τα διανύσματα x^* που είναι λύσεις των εξισώσεων,

$$\dot{x} = 0, \text{ δηλαδή } f(x^*, u^*) = 0$$

Έστω ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν. Τα σημεία ισορροπίας των εξόδων θα δίνονται από την σχέση,

$$y^* = g(x^*)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μικρές μετατοπίσεις γύρω από την κατάσταση ισορροπίας:

$$\begin{aligned} x &= x^* + \delta x \\ u &= u^* + \delta u \\ y &= y^* + \delta y \end{aligned}$$

και ας εφαρμόσουμε την ανάπτυξη Taylor των συναρτήσεων $f(x, u)$ και $g(x)$ γύρω από το σημείο ισορροπίας. Γνωρίζουμε ότι γενικά ισχύει:

$$f(x, u) = f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} (u - u^*) + \quad (2.18)$$

(όροι μεγαλύτερου βαθμού)

Θέτουμε:

$$A = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^*, u^*}$$

$$B = \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x^*, u^*}$$

Παραβλέποντας τους όρους μεγαλύτερου βαθμού ή (2.18) γράφεται:

$$\delta x = A \delta x + B \delta u \quad (2.19)$$

Με παρόμοιο τρόπο αναπτύσσουμε την $g(x)$ γύρω από το y^* ,

$$g(x) = y^* + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} (x - x^*) + (\text{όροι μεγαλύτερου βαθμού})$$

Επειδή $\delta y = y - y^*$ οι μετατοπίσεις των εξόδων μπορούν να προσεγγιστούν από την γραμμική σχέση,

$$\delta y = C\delta x \quad (2.20)$$

Συνδυάζοντας τις (2.19) και (2.20) παίρνουμε την γραμμική προσέγγιση του μη γραμμικού συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας:

$$\begin{aligned} \delta x &= A\delta x + B\delta u \\ \delta y &= C\delta x \end{aligned}$$

© Α. Πουλιέζος

3 Σχεδίαση ελεγκτών

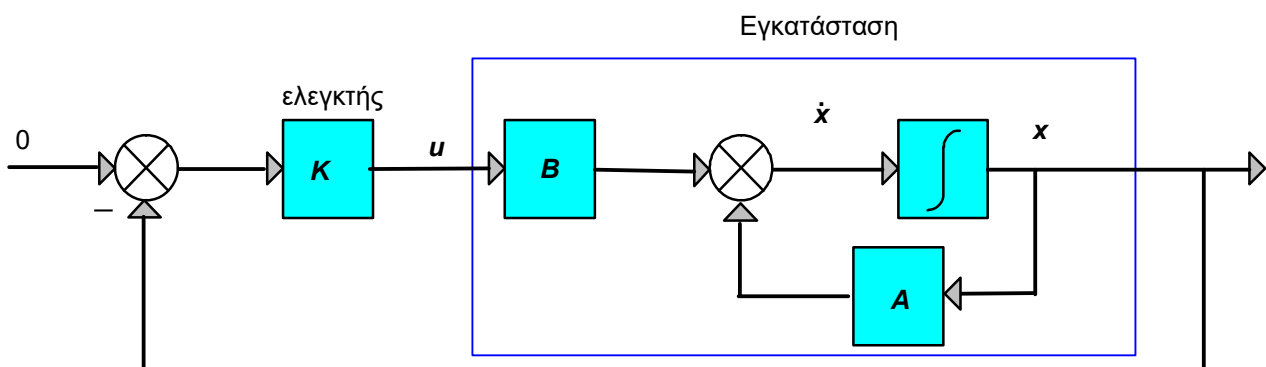
Τα συστήματα ελέγχου μπορούν να διακριθούν σε δύο ευρείες κατηγορίες: **ρύθμισης** και **παρακολούθησης**. Τα συστήματα αυτόματης ρύθμισης ή ρυθμιστές προσπαθούν να διατηρήσουν σταθερή την έξοδο του συστήματος υπό την επήρεια διαταραχών, μεταβολών στις παραμέτρους της εγκατάστασης κλπ. Παραδείγματα περιλαμβάνουν τα συστήματα ρύθμισης θερμοκρασίας, διατήρησης σταθερού υψομέτρου δορυφόρων, ρύθμισης τάσης κλπ. Κατά τη σχεδίαση των συστημάτων αυτών πρωταρχικό ρόλο παίζει η μεταβατική απόκριση.

Στα συστήματα παρακολούθησης η έξοδος πρέπει να ακολουθεί, με ελάχιστο σφάλμα, μία προδιαγεγραμμένη πορεία που αναπαρίσταται από μία χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Παραδείγματα αυτού του τύπου περιλαμβάνουν αυτόματους πιλότους αεροσκαφών ή πλοίων.

Σε όλες τις περιπτώσεις ο έλεγχος είναι μία γραμμική συνάρτηση των καταστάσεων, δηλαδή,

$$u(t) = -Kx(t) \quad (3.1)$$

3.1 Ρύθμιση © Α. Πουλιέζος



Σχήμα 3.1 Γραμμικός ρυθμιστής

Ας αρχίσουμε με την πιο απλή μορφή συστήματος που απεικονίζεται στο Σχ. 3.1. Στη διάταξη αυτή γίνεται η όχι και τόσο ρεαλιστική υπόθεση ότι όλες οι καταστάσεις είναι μετρήσιμες. Η εξίσωση του είναι,

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ u(t) &= -Kx(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (3.2)$$

Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει το εργαλείο για την εύρεση του (σταθερού) πίνακα K .

Θεώρημα 3.1 Αν το ζευγάρι (A, B) είναι ελέγξιμο μπορεί να βρεθεί πίνακας K , τέτοιος ώστε οι ιδιοτιμές του συστήματος $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$ να τοποθετηθούν σε οποιαδήποτε θέση.

Το θεώρημα αυτό μας εξασφαλίζει τη τοποθέτηση των ιδιοτιμών σε οποιαδήποτε θέση αλλά δεν απαντά στο ερώτημα *ποιά* είναι η βέλτιστη θέση. Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί με διάφορους τρόπους: μέσω των προδιαγραφών της μεταβατικής απόκρισης οι οποίες ορίζουν περιοχές για τους πόλους του συστήματος ή μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου που θα δούμε στη συνέχεια. Η αριθμητική επίλυση είναι εύκολη μέσω του *MATLAB* αφού η,

`K=PLACE(A, B, p)` υπολογίζει έναν πίνακα ανάδρασης κατάστασης K τέτοιοι ώστε οι ιδιοτιμές του $A - BK$ να είναι αυτές που ορίζονται στο διάνυσμα p .

Για τον αναγνώστη που ενδιαφέρεται ο τρόπος που υπολογίζεται ο K ακολουθεί. Οι υπόλοιποι μπορούν να προσπεράσουν.

3.1.1 Αλγόριθμος υπολογισμού K

Για τον υπολογισμό του πίνακα K χρειαζόμαστε την έννοια των κανονικών μορφών και συγκεκριμένα τη **γενικευμένη κανονική μορφή ελέγχου**. Οι κανονικές μορφές είναι μετασχηματισμοί του αρχικού συστήματος που αναδεικνύουν συγκεκριμένες ιδιότητες του (π.χ. η μορφή Jordan αναδεικνύει τις ιδιοτιμές του συστήματος).

Η γενικευμένη κανονική μορφή ελέγχου είναι μία αναπαράσταση του αρχικού συστήματος,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

στη μορφή,

$$\dot{z}(t) = A_G z(t) + B_G v(t) \quad (3.3)$$

όπου,

$$A_G = \begin{bmatrix} A_{\gamma_1} & & & \\ & A_{\gamma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_{\gamma_m} \end{bmatrix}, \quad B_G = \begin{bmatrix} b_{\gamma_1} & & & \\ & b_{\gamma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & b_{\gamma_m} \end{bmatrix}$$

και,

$$A_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \right\} \text{διάσταση } \gamma_1, \quad b_{\gamma_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \left. \vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}} \right\} \text{διάσταση } \gamma_1$$

Τα γ_i καλούνται **αναλλοίωτες ελέγχου** και αποτελούν ένα ταξινομημένο σύνολο, δηλαδή,

$$\gamma_1 \geq \gamma_2 \geq \dots \geq \gamma_m \geq 0$$

Επίσης,

$$\sum_{i=1}^m \gamma_i = n$$

3.2 Τοποθέτηση πόλων μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου

Η θεωρία του βέλτιστου ελέγχου αποσκοπεί στην εύρεση στρατηγικών ελέγχου μέσω της ελαχιστοποίησης κριτηρίων απόδοσης. Η εφαρμογή της στη συγκεκριμένη κατηγορία συστημάτων που εξετάζουμε (γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα) καταλήγει σε κομψούς, υλοποιήσιμους ελεγκτές.

Το πρόβλημα τίθεται ως εξής:

Να βρεθεί η συνάρτηση εισόδου $\mathbf{u}(t)$ που να ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό (δηλαδή συνάρτησης συναρτήσεως),

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (\mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q} \mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R} \mathbf{u}(t)) dt$$

υπό τον περιορισμό των εξισώσεων κατάστασης,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

Η φυσική σημασία της ελαχιστοποίησης είναι να περιορίσει την κατάσταση κοντά στο μηδέν με ελάχιστη κατανάλωση ενέργειας. Οι πίνακες \mathbf{Q} , \mathbf{R} χρησιμοποιούνται

για να εξισορροπούν τις δύο αυτές ιδιότητες. Εφαρμογή της αρχής του ελαχίστου του Pontryagin δίνει την ακόλουθη λύση στο πρόβλημα αυτό,

$$u(t) = -K(t)x(t) \quad (3.4)$$

$$K(t) = R^{-1}B^T P(t) \quad (3.5)$$

$$\frac{dP}{dt} = -A^T P(t) - P(t)A - Q + P(t)BR^{-1}B^T P(t), \quad P(T) = \mathbf{0} \quad (3.6)$$

Η εξίσωση (3.6) είναι η **μητρική διαφορική εξίσωση Riccati**. Είναι μία μη γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης με τερματικές οριακές συνθήκες. Ο έλεγχος που προκύπτει είναι χρονικά μεταβαλλόμενος και για να υλοποιηθεί πρέπει να λυθεί η (3.6) προς τα πίσω αρχίζοντας από το τελικό χρόνο $t = T$. Η λύση πρέπει να αποθηκευθεί ψηφιακά για να χρησιμοποιηθεί συνέχεια από τον μηχανισμό του ελεγκτή. Μία πιο απλή λύση προκύπτει αν τεθεί $t = \infty$. Στη περίπτωση αυτή $dP/dt = \mathbf{0}$ και η (3.6) καταλήγει στην **μητρική αλγεβρική εξίσωση Riccati**,

$$\mathbf{0} = -A^T P - P A - Q + P B R^{-1} B^T P$$

Η λύση της εξίσωσης αυτής καταλήγει σε σταθερό πίνακα ανατροφοδότησης K ο οποίος συν τους άλλους οδηγεί σε ένα συνολικά ευσταθές σύστημα αν: το ζεύγος (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο, $R > 0$ (θετικά ορισμένος) και ο Q μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $Q = C_q^T C_q$ όπου C_q είναι οποιοσδήποτε πίνακας τέτοιος ώστε το ζεύγος (C_q, A) να είναι εντοπίσιμο.

[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R, N) υπολογίζει τον βέλτιστο πίνακα ανατροφοδότησης K έτσι ώστε ο έλεγχος ανάδρασης καταστάσεων $u(t) = -Kx(t)$ να ελαχιστοποιεί τη συνάρτηση κόστους,

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2x^T(t) N u(t)) dt$$

υπό τον περιορισμό της εξίσωσης κατάστασης,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x_0$$

Ο ελεγκτής που προκύπτει από αυτή τη διαδικασία καλείται **γραμμικός τετραγωνικός ρυθμιστής (Linear Quadratic Regulator-LQR)**.

3.3 Παρακολούθηση

Έστω ξανά το γνωστό σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (3.7)$$

Στο πρόβλημα της παρακολούθησης η επιθυμητή τελική θέση είναι $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d \neq \mathbf{0}$.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να ιδωθεί σαν μία υποπερίπτωση του γενικότερου προβλήματος $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{J}\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_d \neq \mathbf{0}$ (αν $\mathbf{J} = \mathbf{I}$). Ο πίνακας \mathbf{J} , διάστασης $m_j \times n$, επιλέγει τις μεταβλητές που επιθυμούμε να παρακολουθήσουμε.

Ο λόγος που εισάγεται ένας νέος πίνακας είναι ότι είναι δυνατό να παρακολουθούνται λιγότερες μεταβλητές από αυτές που παρατηρούνται, δηλαδή $m_j < m$.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί παρόμοια με αυτό του ρυθμιστή, αν εισάγουμε μία νέα μεταβλητή,

$$\mathbf{p}(t) = \int (\mathbf{J}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d) dt \quad (3.8)$$

οπότε επαυξάνοντας την αρχική εξίσωση παίρνουμε,

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) &= \mathbf{J}\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{p}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{p}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_d \quad (3.9)$$

Στη σταθερή κατάσταση, $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ οπότε,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_s \\ \mathbf{p}_s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{u}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{x}_d$$

και ορίζοντας νέες μεταβλητές,

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s \\ \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_s \end{bmatrix}, \mathbf{v}(t) = \mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_s$$

καταλήγουμε στο σύστημα,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}\mathbf{z}(t) + \hat{\mathbf{B}}\mathbf{v}(t) \quad \text{με } \hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{J} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

Καταφέραμε να τροποποιήσουμε το πρόβλημα έτσι ώστε να τεθεί στη μορφή που ξέρουμε να λύσουμε: σαν ένα πρόβλημα ρύθμισης. Έτσι βρίσκοντας έναν πίνακα ανάδρασης \hat{K} για το σύστημα (3.10), καταλήγουμε στις εξής εξισώσεις:

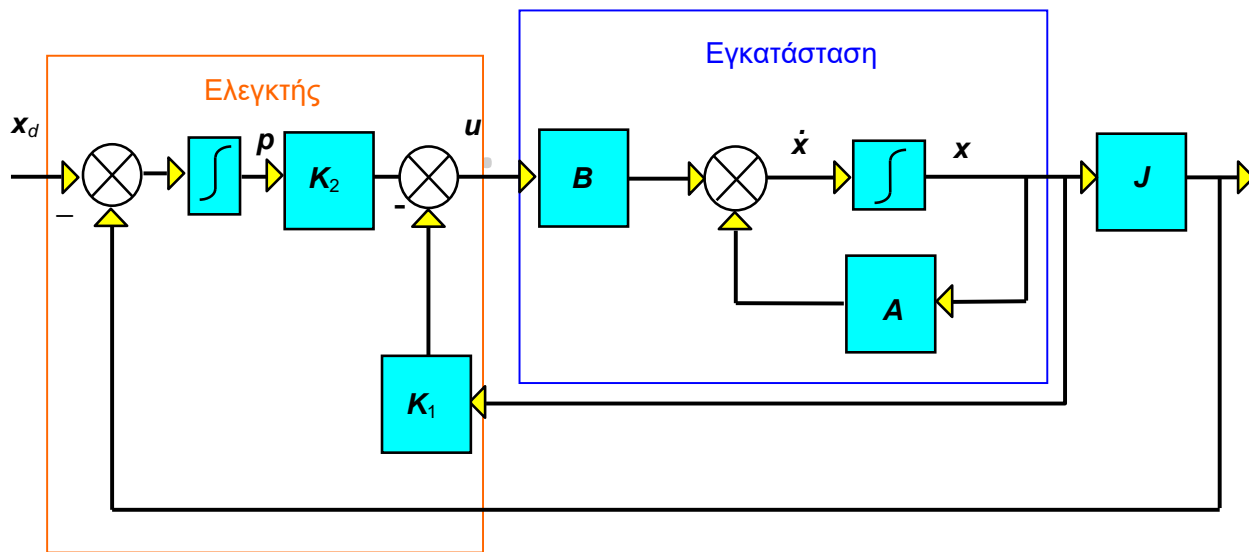
$$\begin{aligned} v(t) &= -\hat{K}z(t) = -\begin{bmatrix} \hat{K}_1 & \hat{K}_2 \end{bmatrix} z(t) = -\hat{K}_1 z_1(t) - \hat{K}_2 z_2(t) \\ \Rightarrow u(t) - u_s &= -\hat{K}_1(x(t) - x_s) - \hat{K}_2(p(t) - p_s) \end{aligned}$$

$$u(t) = -\hat{K}_1 x(t) - \hat{K}_2 p(t) \tag{3.11}$$

Με την τιμή αυτή για το σήμα ελέγχου $u(t)$ το σύστημα (3.9) γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{K}_1 & -B\hat{K}_2 \\ J_{m_j \times n} & 0_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m_j} \\ -I_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} x_d$$

Το δομικό διάγραμμα του συνολικού συστήματος φαίνεται στο Σχ. 3.2.



Σχήμα 3.2 Δομικό διάγραμμα για το πρόβλημα της παρακολούθησης

(Στο παραπάνω σχήμα έχει αντιστραφεί η φορά των προσήμων αντίστοιχα στα μπλοκ του x_d και K_2 , έτσι η συνολική σειρά παραμένει αναλλοίωτη).

Η διαδικασία αυτή είναι δυνατή εφόσον ισχύουν οι γνωστές προϋποθέσεις, δηλαδή να είναι το ζεύγος (\hat{A}, \hat{B}) ελέγξιμο. Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει τις συνθήκες για να συμβαίνει αυτό.

Θεώρημα 3.2 Το ζεύγος (\hat{A}, \hat{B}) είναι ελέγξιμο αν και μόνον αν το ζεύγος (A, B) είναι ελέγξιμο και ο πίνακας,

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ J & \mathbf{0}_{m_j \times r} \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους τάξης ίσης προς τον αριθμό των σειρών ($n + m_j$). Επειδή ο αριθμός των στηλών είναι ($n + r$) πρέπει $r \geq m_j$, δηλαδή οι εισοδοί πρέπει να είναι τουλάχιστον όσες και οι καταστάσεις που θέλουμε να παρακολουθηθούν.

Τα χαρακτηριστικά της χρονικής απόκρισης εξαρτώνται από τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του συνολικού πίνακα κατάστασης,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A - BK_1 & -BK_2 \\ J_{m_j \times n} & \mathbf{0}_{m_j \times m_j} \end{bmatrix}$$

Έτσι επιθυμητά χαρακτηριστικά όπως υπερύψωση και ταχύτητα απόκρισης μπορούν να ικανοποιηθούν με την κατάλληλη επιλογή του πίνακα \hat{K} .

3.4 Παρατηρητές κατάστασης

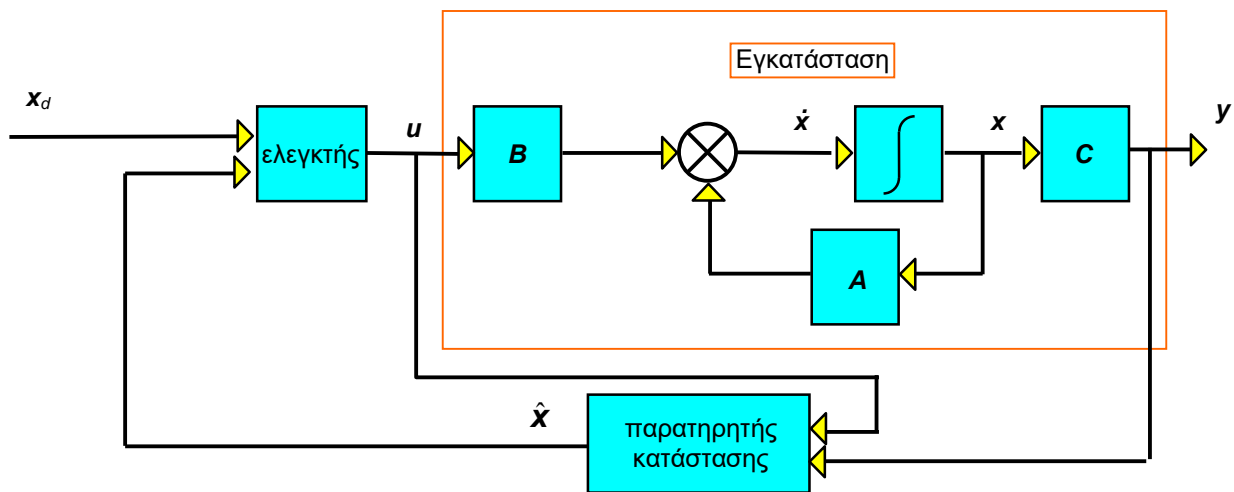
Το διάνυσμα κατάστασης είναι σχεδόν πάντα μη διαθέσιμο όλο για μέτρηση. Μια πιο ρεαλιστική περίπτωση είναι αυτή όπου το μετρήσιμο σύνολο δίνεται από την εξίσωση εξόδου,

$$y(t) = Cx(t) \quad (3.12)$$

Στη περίπτωση αυτή είναι μεγάλης σημασίας η λεγόμενη,

Αρχή Διαχωρισμού: Αν το διάνυσμα κατάστασης δεν είναι μετρήσιμο τότε σαν είσοδος στο μηχανισμό ελέγχου μπορεί να χρησιμοποιηθεί μία εκτίμηση της κατάστασης, διαχωρίζοντας έτσι το συνολικό πρόβλημα σε δύο υποπροβλήματα: του ελέγχου και της εκτίμησης.

Η διαδικασία αυτή φαίνεται στο Σχ. 3.3. Ο αλγόριθμος εκτίμησης καλείται **παρατηρητής κατάστασης** στην ορολογία των συστημάτων ελέγχου.



Σχήμα 3.3 Παρακολούθηση με παρατηρητές κατάστασης

Το πρόβλημα που ανακύπτει είναι αν η εκτίμηση \hat{x} θα συγκλίνει προς την πραγματική κατάσταση. Μία προσέγγιση στο πρόβλημα είναι ο παρατηρητής να χρησιμοποιήσει τους γνωστούς πίνακες A, B για να μιμηθεί το ελεγχόμενο σύστημα. Έτσι αν η εξίσωση του παρατηρητή είναι η,

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

η εξίσωση του σφάλματος εκτίμησης $\tilde{x}(t)$ είναι,

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= x(t) - \hat{x}(t) \\ \Rightarrow \dot{\tilde{x}}(t) &= A\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = x_0 - \hat{x}_0 = \tilde{x}_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = e^{At} \tilde{x}_0 \tag{3.13}$$

Η εξίσωση αυτή δείχνει ότι το σφάλμα εκτίμησης θα συγκλίνει στο μηδέν αν ο πίνακας A είναι ευσταθής. Το πρόβλημα είναι ότι αφενός ο A μπορεί να είναι ασταθής, αφετέρου η σύγκλιση επιτυγχάνεται με ρυθμό που μπορεί να είναι ανεπαρκής. Και τα δύο προβλήματα λύνονται με τη χρήση ανατροφοδότησης και στον παρατηρητή μέσω ενός όρου διόρθωσης ως εξής:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)) \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \tag{3.14}$$

Έτσι η εξίσωση του σφάλματος γίνεται,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = (A - LC)\tilde{x}(t) \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$$

Με το τέχνασμα αυτό ο πίνακας μετάβασης του σφάλματος γίνεται $A - LC$, οι ιδιοτιμές του οποίου ρυθμίζονται μέσω του L . Η ρύθμιση αυτή είναι εφικτή αν το σύστη-

μα είναι παρατηρήσιμο. Η εύρεση του L επιτυγχάνεται όπως και του K (είναι μάλιστα *δυσκό* πρόβλημα), δηλαδή μέσω της,

$L^T = \text{place}(A^T, C^T, q)$ που υπολογίζει έναν πίνακα ανάδρασης κατάστασης L τέτοιον ώστε οι ιδιοτιμές του $A - LC$ να είναι αυτές που ορίζονται στο διάνυσμα q .

Προφανώς και εδώ ανακύπτει το ερώτημα, που να τοποθετήσουμε τις ιδιοτιμές. Εάν δεν υπάρχει κάποιος ιδιαίτερος λόγος περί του αντιθέτου, ένας προσεγγιστικός κανόνας υποδεικνύει να έχουν πραγματικά μέρη πενταπλάσια των αντίστοιχων ιδιοτιμών του παρατηρούμενου συστήματος (**προσοχή**: δηλαδή του $A - BK$). Με τον τρόπο αυτό εξασφαλίζεται ότι ο παρατηρητής θα συγκλίνει πιο γρήγορα απ' ό,τι το σύστημα στη σταθερή του κατάσταση.

Η συνολική εξίσωση του συστήματος βρίσκεται αν επαυξήσουμε την εξίσωση κατάστασης με την εξίσωση του παρατηρητή, δηλαδή,

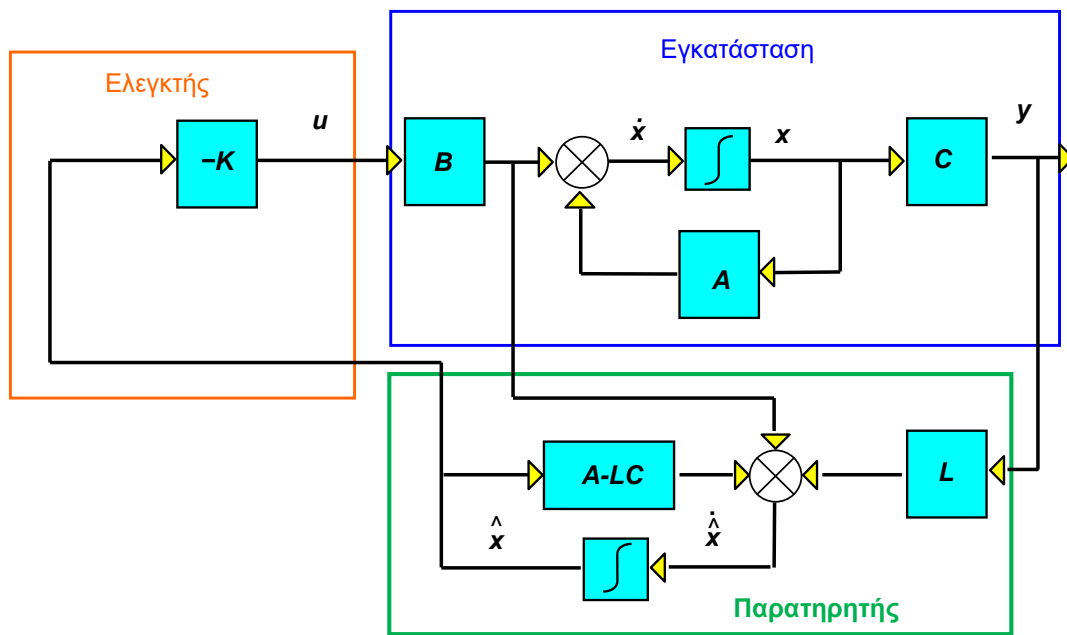
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ LC & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ B \end{bmatrix} u(t) \quad (3.15)$$

Τώρα αν το πρόβλημα είναι ρύθμισης, τότε,

$$u(t) = -Kx(t)$$

και αντικαθιστώντας στη (3.15) παίρνουμε για το συνολικό κλειστό σύστημα ελέγχου,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BK \\ LC & A - LC - BK \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.16)$$



Σχήμα 3.4 Ρύθμιση με παρατηρητή κατάστασης

Αν το πρόβλημα είναι παρακολούθησης, τότε ο έλεγχος είναι της μορφής της (3.11), δηλαδή,

$$u(t) = -\hat{K}_1 \hat{x}(t) - \hat{K}_2 p(t)$$

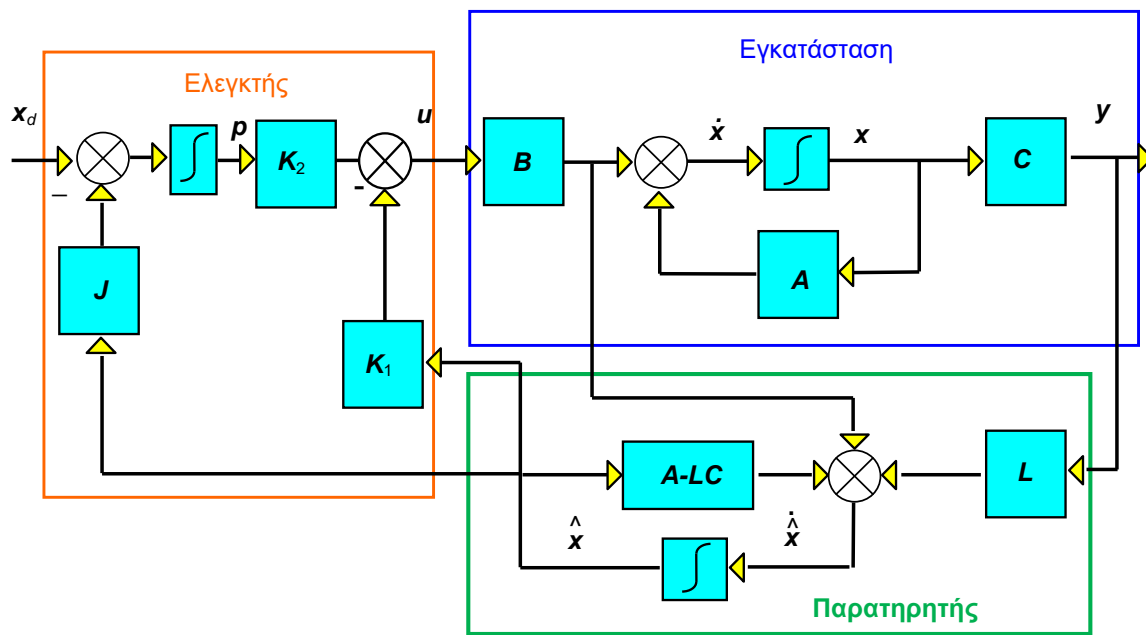
τότε η (3.15) γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{\hat{x}}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -B\hat{K}_1 & -B\hat{K}_2 \\ LC & A - B\hat{K}_1 - LC & -B\hat{K}_2 \\ 0_{m_j \times n} & J & 0_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \hat{x}(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m_j} \\ 0_{n \times m_j} \\ -I_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} x_d \quad (3.17)$$

(παρατηρείστε ότι το $p(t)$ χρησιμοποιεί πλέον την εκτιμώμενη κατάσταση $\hat{x}(t)$).

Το σύστημα (3.17) είναι ένα σύστημα $2n+m_j$ εξισώσεων και περιλαμβάνει την κατάσταση, τον παρατηρητή και τον παρακολουθητή.

Οι απαραίτητες εξισώσεις για την υλοποίηση του ελεγκτή είναι οι (3.11), (3.14), ενώ το δομικό του διάγραμμα φαίνεται στο Σχ. 3.5.



Σχήμα 3.5 Παρακολούθηση με παρατηρητή κατάστασης

Ο προαναφερόμενος παρατηρητής καλείται **παρατηρητής πλήρους τάξης**. Μία πιο «οικονομική» εκδοχή του παρατηρητή αυτού μπορεί να υλοποιηθεί αν εκτιμούμε μόνο τις καταστάσεις που δεν είναι παρατηρήσιμες.

3.4.1 Παρατηρητής μειωμένης τάξης

Ο παρατηρητής μειωμένης τάξης στηρίζεται στο γεγονός ότι αν η διάσταση του διανύσματος εξόδου $y(t) = Cx(t)$ είναι $m (< n)$, δεν υπάρχει λόγος να εκτιμούμε περισσότερες από $n - m$ καταστάσεις. Ο παρατηρητής που προκύπτει καλείται **παρατηρητής μειωμένης τάξης** ή **παρατηρητής Luenberger**. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Κατ' αρχήν ορίζουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό της κατάστασης,

$$z(t) = \begin{matrix} T \\ (n-m) \times 1 \end{matrix} x(t) \quad \begin{matrix} (n-m) \times n \end{matrix}$$

όπου ο T είναι κάποιος πίνακας τέτοιος ώστε ο $E = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}$ να έχει αντίστροφο και έστω αυτός $E^{-1} = [P \ \vdots \ M]$. Αυτό θα είναι δυνατό αν βαθμός(C)= m . Συνδυάζοντας τα y, z ,

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix} x(t) \Rightarrow x(t) = \begin{bmatrix} C \\ T \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = [P \ \vdots \ M] \begin{bmatrix} y(t) \\ z(t) \end{bmatrix} = Py(t) + Mz(t)$$

Επομένως,

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{P}\hat{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t)$$

Για να εκτιμήσουμε το \mathbf{z} χρειαζόμαστε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την εξέλιξη του. Προπολλαπλασιάζοντας την εξίσωση κατάστασης με τον \mathbf{E} παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{E}\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{E}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \Rightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \\ &\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}}(t) \\ \dot{\mathbf{z}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \vdots & \mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}(t) \\ \mathbf{z}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{T} \end{bmatrix} \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \end{aligned}$$

ή

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{P} & \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{M} \\ \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{P} & \mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}\mathbf{B} \\ \mathbf{T}\mathbf{B} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{A}}_{11} & \hat{\mathbf{A}}_{12} \\ \hat{\mathbf{A}}_{21} & \hat{\mathbf{A}}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y} \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

Έτσι, η διαφορική εξίσωση για το \mathbf{z} είναι η,

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{22}\mathbf{z}(t) + (\hat{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t))$$

Ένας παρατηρητής πλήρους τάξης για το \mathbf{z} θα ήταν ο,

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + (\hat{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t)) + \mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$$

Δυστυχώς ο διορθωτικός όρος $\mathbf{L}(\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t))$ ισούται με μηδέν, αφού,

$$\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}(\mathbf{P}\mathbf{y}(t) + \mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t)) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{M}\hat{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{y}(t) - \mathbf{y}(t) = \mathbf{0}$$

Μία εναλλακτική επιλογή είναι ο διορθωτικός όρος να είναι συνάρτηση της παραγώγου του \mathbf{y} ,

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \hat{\mathbf{A}}_{22}\hat{\mathbf{z}}(t) + (\hat{\mathbf{A}}_{21}\mathbf{y}(t) + \hat{\mathbf{B}}_2\mathbf{u}(t)) + \mathbf{L}(\dot{\mathbf{y}}(t) - \hat{\mathbf{A}}_{11}\mathbf{y}(t) - \hat{\mathbf{B}}_1\mathbf{u}(t) - \hat{\mathbf{A}}_{12}\hat{\mathbf{z}}(t))$$

Συγκλίνει ο παρατηρητής αυτός προς την πραγματική τιμή του \mathbf{z} ; Η εξίσωση σφάλματος είναι,

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = (\hat{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{A}}_{12})\tilde{\mathbf{z}}(t)$$

και το ερώτημα μπορεί να απαντηθεί θετικά αν ο πίνακας \mathbf{L} μπορεί να σταθεροποιήσει την εξίσωση σφάλματος. Αποδεικνύεται ότι παρατηρησιμότητα του ζεύγους (\mathbf{C}, \mathbf{A}) συνεπάγεται και παρατηρησιμότητα του $(\hat{\mathbf{A}}_{12}, \hat{\mathbf{A}}_{22})$ [Luenberger, 1964].

Ορίζοντας,

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{z}(t) - \mathbf{L}\mathbf{y}(t)$$

καταλήγουμε στη τελική μορφή του παρατηρητή μειωμένης τάξης,

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{F}\mathbf{w}(t) + \mathbf{H}\mathbf{y}(t) + \mathbf{G}\mathbf{u}(t) \quad (3.18)$$

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{M}\mathbf{w}(t) + \mathbf{N}\mathbf{y}(t) \quad (3.19)$$

με τους πίνακες να ορίζονται από τις σχέσεις,

$$\mathbf{F} = \hat{\mathbf{A}}_{22} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{A}}_{12}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{F}\mathbf{L} + \hat{\mathbf{A}}_{21} - \mathbf{L}\hat{\mathbf{A}}_{11}, \quad \mathbf{G} = \hat{\mathbf{B}}_2 - \mathbf{L}\hat{\mathbf{B}}_1, \quad \mathbf{N} = \mathbf{P} + \mathbf{M}\mathbf{L}$$

Ο \mathbf{L} σχεδιάζεται και εδώ όπως και στη περίπτωση του παρατηρητή πλήρους τάξης, δηλαδή με ιδιοτιμές που έχουν πενταπλάσιο πραγματικό μέρος από αυτές του $\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}$.

Το συνολικό σύστημα κατάστασης-παρατηρητή είναι το εξής:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{0} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} & \mathbf{F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \quad (3.20)$$

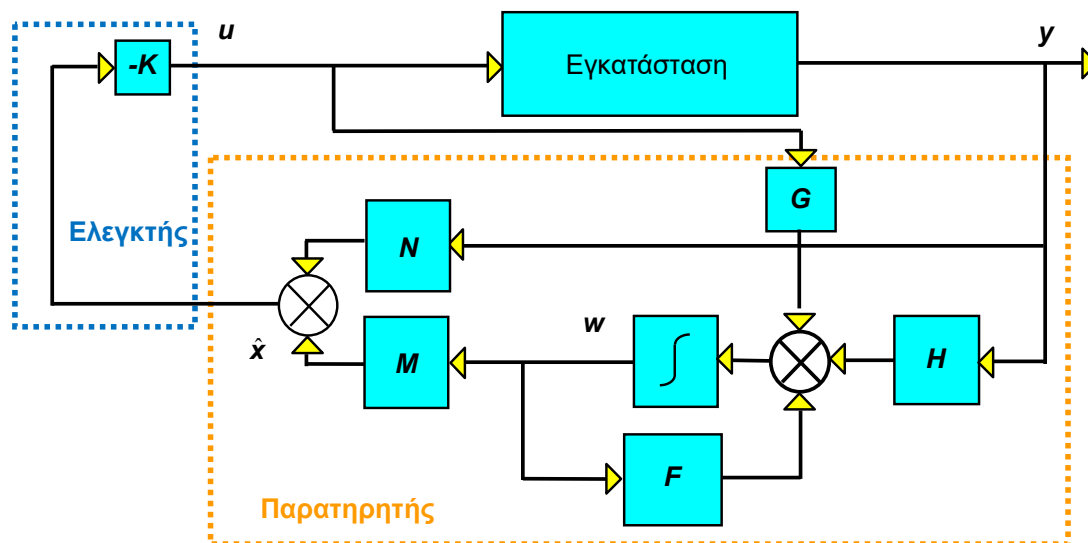
Στο πρόβλημα ρύθμισης ο έλεγχος δίνεται από την,

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) = -\mathbf{K}(\mathbf{M}\mathbf{w}(t) + \mathbf{N}\mathbf{y}(t)) = -\mathbf{K}\mathbf{M}\mathbf{w}(t) - \mathbf{K}\mathbf{N}\mathbf{C}\mathbf{x}(t)$$

οπότε αντικαθιστώντας στη (3.20), παίρνουμε την εξίσωση του κλειστού συστήματος,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{w}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{N}\mathbf{C} & -\mathbf{B}\mathbf{K}\mathbf{M} \\ \mathbf{H}\mathbf{C} - \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{N}\mathbf{C} & \mathbf{F} - \mathbf{G}\mathbf{K}\mathbf{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{w}(t) \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος παρατήρησης που χρησιμοποιεί παρατηρητή μειωμένης τάξης φαίνεται στο Σχ. 3.6.



Σχήμα 3.6 Ρύθμιση με παρατηρητή μειωμένης τάξης

Στο πρόβλημα παρακολούθησης, ο έλεγχος δίνεται από την (3.11), δηλαδή,

$$u(t) = -\hat{K}_1 \hat{x}(t) - \hat{K}_2 p(t) = -\hat{K}_1 \hat{x}(t) - \hat{K}_2 \int (J\hat{x}(t) - x_d) dt \tag{3.22}$$

όπου έγινε χρήση της (3.19).

Αντικαθιστώντας στην (3.20) παίρνουμε τη συνολική εξίσωση κατάστασης-παρατηρητή μειωμένης τάξης-παρακολουθητή:

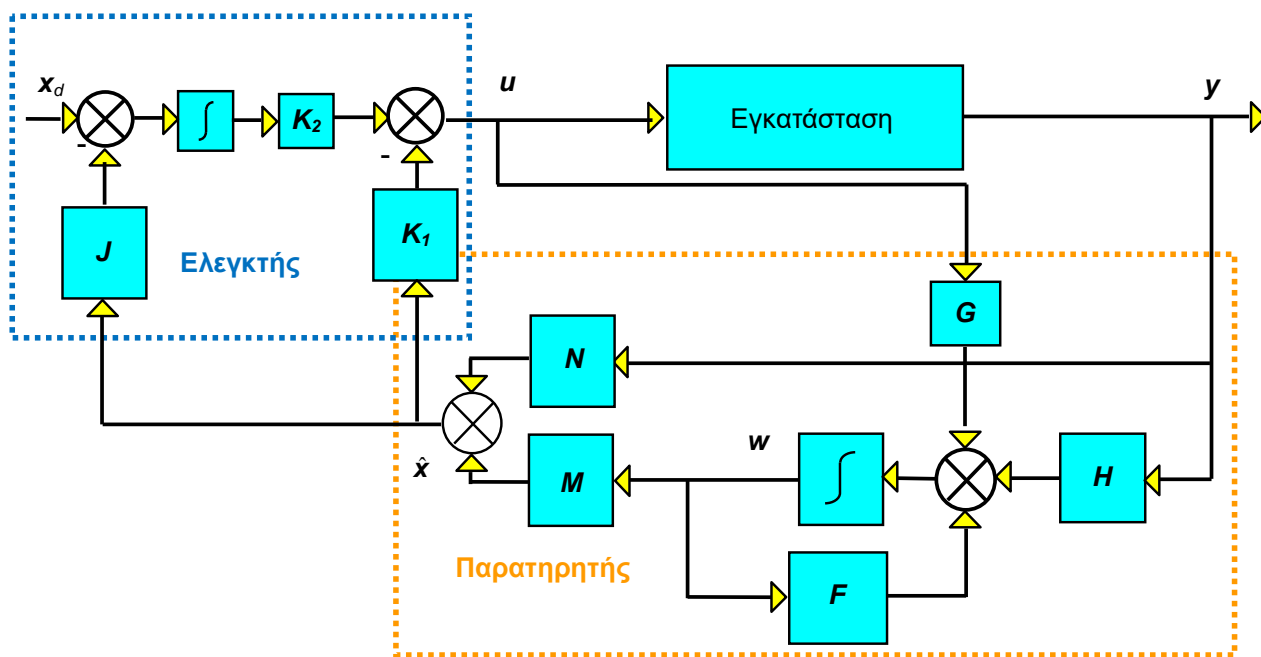
$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{K}_1 NC & -B\hat{K}_1 M & -B\hat{K}_2 \\ HC - G\hat{K}_1 NC & F - G\hat{K}_1 M & -G\hat{K}_2 \\ JNC & JM & 0_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n \times m_j} \\ 0_{(n-m) \times m_j} \\ -I_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} x_d$$

ή

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{A}\tilde{x}(t) + \tilde{B}x_d$$

Έτσι οι εξισώσεις που χρειάζονται για την υλοποίηση του ελεγκτή (που πρέπει να περιέχουν μόνο εισόδους και εξόδους) είναι οι (3.18), (3.19) και (3.22).

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος παρατήρησης που χρησιμοποιεί παρατηρητή μειωμένης τάξης φαίνεται στο Σχ. 3.7.

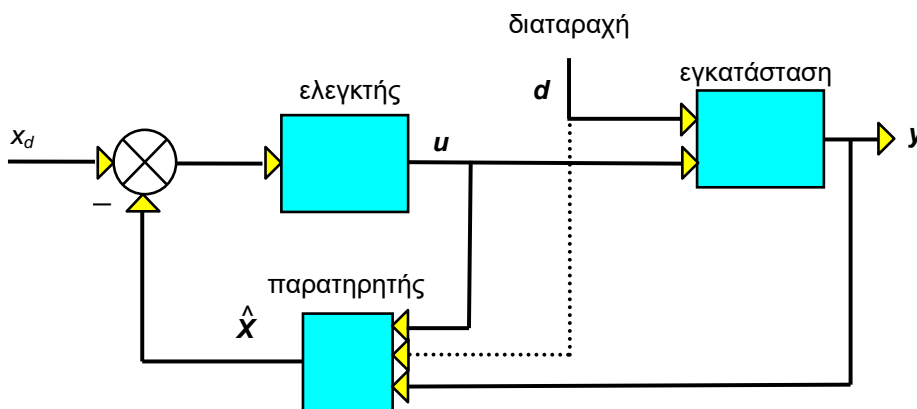


Σχήμα 3.7 Παρακολούθηση με παρατηρητή μειωμένης τάξης

3.5 Απόρριψη διαταραχών

Θα μπορούσε να ισχυρισθεί κανείς ότι η απόρριψη διαταραχών αποτελεί τη *raison d'être* της επιστήμης των συστημάτων με ανατροφοδότηση. Ο λόγος είναι ότι όλα τα προαναφερθέντα κλειστά συστήματα είναι ισοδύναμα με αντίστοιχα ανοικτά, και αποτελούν μάλλον ιδεατές αναπαραστάσεις. Στη πράξη τα συστήματα επηρεάζονται από, συνήθως απρόβλεπτες, «διαταραχές», γεγονός που καθιστά απαραίτητη τη τροποποίηση των προηγούμενων αλγορίθμων.

Το πρόβλημα που θα αντιμετωπίσουμε φαίνεται στο δομικό διάγραμμα του Σχ. 3.8.



Σχήμα 3.8 Τυπικό διάγραμμα προβλήματος απόρριψης διαταραχών

Οι εξισώσεις που το διέπουν είναι οι,

$$\begin{aligned}
 \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gd(t) \\
 y(t) &= Cx(t) \\
 \hat{x}(t) &= g(u(t), y(t)) \\
 u(t) &= f(x_d, d(t), \hat{x}(t))
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

όπου g και f κανόνες που πρέπει να βρεθούν.

Η λύση του προβλήματος εξαρτάται από τη φύση της διαταραχής.

3.5.1 Μετρήσιμη διαταραχή

Στη περίπτωση αυτή γράφουμε την εξίσωση κατάστασης ως,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Dd(t) = Ax(t) + [B \quad D] \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} = Ax(t) + \tilde{B}\tilde{u}(t) \tag{3.24}$$

και επαναλαμβάνουμε τη σχεδίαση. Για παράδειγμα το σύστημα παρακολούθησης με παρατηρητή μειωμένης τάξης γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \theta \\ HC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{B} \\ G \end{bmatrix} \tilde{u}(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \theta \\ HC & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B & D \\ G_1 & G_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ d(t) \end{bmatrix} \tag{3.25}$$

με,

$$G = \hat{B}_2 - L \hat{B}_1$$

και,

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C\tilde{B} \\ T\tilde{B} \end{bmatrix}$$

Αφού,

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -\hat{K}_1 \hat{x}(t) - \hat{K}_2 p(t) = -K_1 (Mw(t) + Ny(t)) - \hat{K}_2 p(t) = \\
 &= -\hat{K}_1 Mw(t) - \hat{K}_1 NCx(t) - \hat{K}_2 p(t)
 \end{aligned}
 \tag{3.26}$$

και,

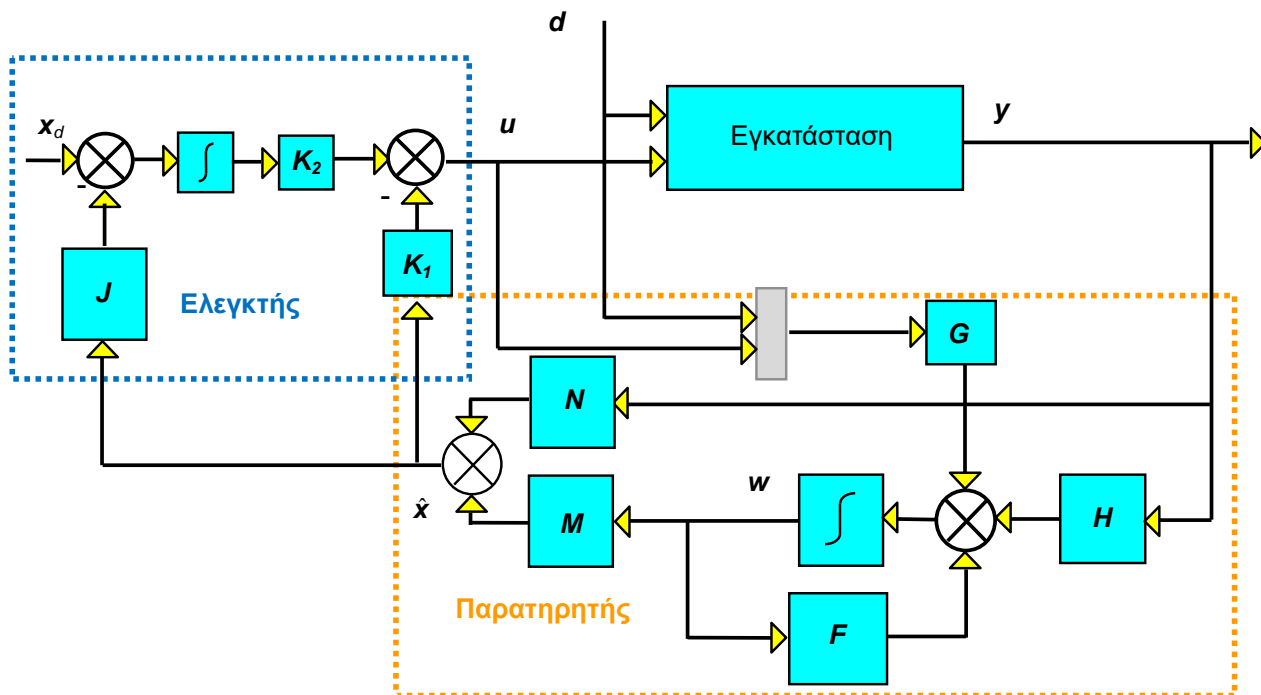
$$\dot{p}(t) = J\hat{x}(t) - x_d = J(Mw(t) + NCx(t)) - x_d$$

η συνολική εξίσωση του κλειστού συστήματος παρακολουθητή-εκτιμητή μειωμένης τάξης-μετρήσιμης διαταραχής γίνεται,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{K}_1 NC & -B\hat{K}_1 M & -B\hat{K}_2 \\ HC - G_1 \hat{K}_1 NC & F - G_1 \hat{K}_1 M & -G_1 \hat{K}_2 \\ JNC & JM & 0_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -I \end{bmatrix} x_d + \begin{bmatrix} D \\ G_2 \\ 0 \end{bmatrix} d =$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{w}(t) \\ \dot{p}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - B\hat{K}_1 NC & -B\hat{K}_1 M & -B\hat{K}_2 \\ HC - G_1 \hat{K}_1 NC & F - G_1 \hat{K}_1 M & -G_1 \hat{K}_2 \\ JNC & JM & 0_{m_j \times m_j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ w(t) \\ p(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & D \\ 0 & G_2 \\ -I & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d \\ d \end{bmatrix}$$

Το δομικό διάγραμμα του συστήματος φαίνεται στο Σχ. 3.9.



Σχήμα 3.9 Παρακολούθηση με παρατηρητή μειωμένης τάξης και μετρήσιμη διαταραχή

3.5.2 Διαταραχή με γνωστό πρότυπο

3.5.3 Άγνωστη διαταραχή

© Α. Πουλιέζος

Βιβλιογραφία

- [1] Andronov A. A. and S. E. Khaikin (1949). “*Theory of Oscillators*”, (Princeton Univ. Press, Princeton 1949), translated and adapted by S. Lefschetz from Russian 1937 publication.
- [2] Wolovich (1987). *Robotics: Basic Analysis & Design*.
- [3] Luenberger D.G. (1964). Observing the state of a linear system. *IEEE Trans. Mil. Electron.*, **MIL-8**, pp.74-80.
- [4] Poincaré H. J (1892, 93, 99) . *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, Vols 1-3*. Gauthiers-Villars, Paris (English translation edited by D. Goroff, published by the American Institute of Physics, New York, 1993.)

© Α. Πουλιέζος

Βιογραφίες



Lyapunov, Aleksandr Mikhailovich (1857-1918).

Διακεκριμένος Ρώσος (από το Yaroslavl) μαθηματικός, γνωστός κυρίως από τη δουλειά του σε θέματα ευστάθειας.

Φίλος του Markov και μαθητής του Chebyshev, έλαβε το διδακτορικό του από το Πανεπιστήμιο της Μόσχας το 1892 με τίτλο «Το γενικό πρόβλημα της ευστάθειας της κίνησης». Το 1899 διατυπώνει μεθόδους για την εκτίμηση της ευστάθειας σε συστήματα διαφορικών εξισώσεων.

Διετέλεσε καθηγητής στα Πανεπιστήμια του Charkov και Οδησού, και ήταν μέλος της Ρωσικής Ακαδημίας Επιστημών. Αυτοκτόνησε αμέσως μετά το θάνατο, από φυματίωση, της συζύγου του Ναταλίας.

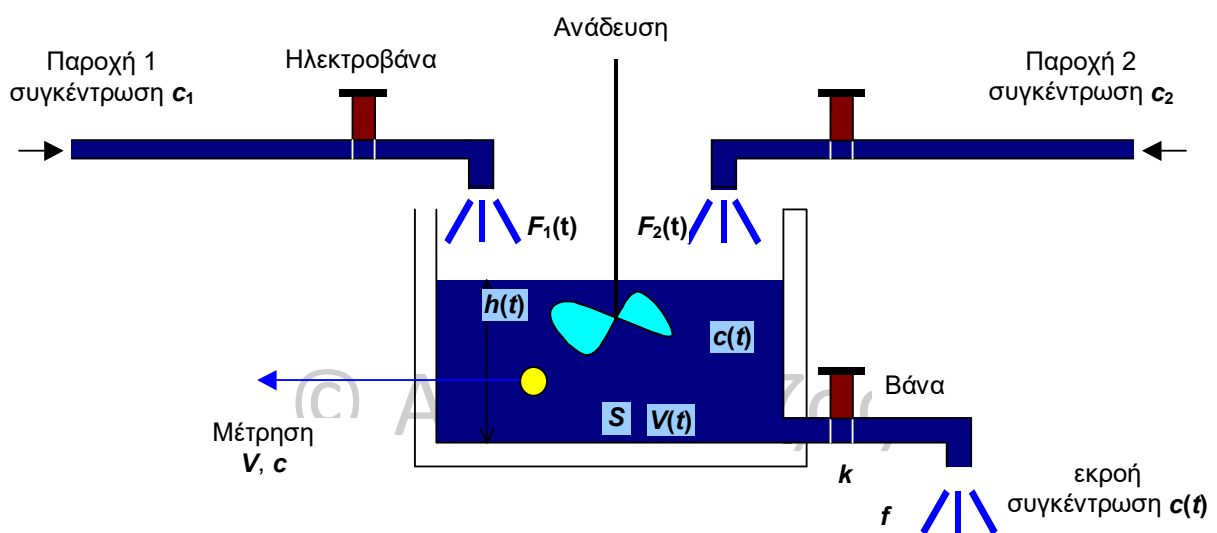
© Α. Πουλιέζος

Παράρτημα

Π1 Έλεγχος αναδευόμενης δεξαμενής

(Kwakernaak, σ. 7)

Το παράδειγμα που ακολουθεί είναι τυπικό πολλών συστημάτων ελέγχου διεργασιών.



Σχήμα Π1 Δεξαμενή ανάδευσης υγρών

Η δεξαμενή τροφοδοτείται με δύο υγρά με ροές τροφοδοσίας $F_1(t)$ και $F_2(t)$ αντίστοιχα. Τα υγρά περιέχουν διαλυμένο υλικό με σταθερές συγκεντρώσεις c_1 και c_2 . Η δεξαμενή αναδύεται συνεχώς έτσι ώστε η συγκέντρωση της εκροής να είναι ίση με $c(t)$, την συγκέντρωση της δεξαμενής. Στόχος του συστήματος ελέγχου είναι η διατήρηση της συγκέντρωσης $c(t)$ σε επιθυμητά επίπεδα μέσω της ρύθμισης των ροών $F_1(t)$ και $F_2(t)$. Μετρώνται τα $c(t)$ και $V(t)$.

Οι εξισώσεις ισορροπίας μάζας είναι,

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - F(t) \quad (\text{Π1})$$

$$\frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = c_1 F_1(t) + c_2 F_2(t) - c(t)F(t) \quad (\text{Π2})$$

όπου $V(t)$ είναι ο όγκος του υγρού στη δεξαμενή. Για τον ρυθμό εκροής $F(t)$ ισχύει:

$$F(t) = k[h(t)]^{1/2} = k\sqrt{\frac{V(t)}{S}}$$

όπου S το εμβαδόν της δεξαμενής. Έτσι οι (Π1)-(Π2) γίνονται:

$$\frac{dV(t)}{dt} = F_1(t) + F_2(t) - k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \quad (\text{Π3})$$

$$\frac{d}{dt}[c(t)V(t)] = c_1F_1(t) + c_2F_2(t) - c(t)k\sqrt{\frac{V(t)}{S}} \quad (\text{Π4})$$

Οι (Π3)-(Π4) είναι μη γραμμικές ως προς V , γεγονός που σημαίνει ότι πρέπει να γραμμικοποιηθούν γύρω από ένα σημείο ισορροπίας. Ας θεωρήσουμε λοιπόν τη σταθερή κατάσταση όπου όλες οι μεταβλητές είναι σταθερές. έστω F_{10} , F_{20} , F_0 για τους ρυθμούς ροών, V_0 για τον όγκο και c_0 για τη συγκέντρωση στη δεξαμενή. Στη κατάσταση αυτή οι (Π3)-(Π4) γίνονται,

$$0 = F_{10} + F_{20} - F_0 \quad (\text{Π5})$$

$$0 = c_1F_{10} + c_2F_{20} - c_0F_0 \quad (\text{Π6})$$

και

$$F_0 = k\sqrt{\frac{V_0}{S}} \quad (\text{Π7})$$

Στη συνέχεια ας θεωρήσουμε μικρές μετατοπίσεις γύρω από το σημείο ισορροπίας,

$$F_1(t) = F_{10} + \mu_1(t) \quad (\text{Π8})$$

$$F_2(t) = F_{20} + \mu_2(t) \quad (\text{Π9})$$

$$V(t) = V_0 + \xi_1(t) \quad (\text{Π10})$$

$$c(t) = c_0 + \xi_2(t) \quad (\text{Π11})$$

Έτσι η γραμμικοποίηση των (Π3)-(Π4) γύρω από τα σημεία ισορροπίας δίνει,

$$\dot{\xi}(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{k}{2V_0} \sqrt{\frac{V_0}{S}} \xi_1(t) \quad (\text{Π12})$$

$$\dot{\xi}_2(t)V_0 + c_0\dot{\xi}_1(t) = c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) - c_0 \frac{k}{2V_0} \sqrt{\frac{V_0}{S}} \xi_1(t) - k \sqrt{\frac{V_0}{S}} \xi_2(t) \quad (\text{Π13})$$

Χρησιμοποιώντας την Π7, οι (Π12)-(Π13) γίνονται:

$$\dot{\xi}(t) = \mu_1(t) + \mu_2(t) - \frac{F_0}{2V_0} \xi_1(t) \quad (\text{Π14})$$

$$\dot{\xi}_2(t)V_0 + c_0\dot{\xi}_1(t) = c_1\mu_1(t) + c_2\mu_2(t) - c_0 \frac{F_0}{2V_0} \xi_1(t) - F_0 \xi_2(t) \quad (\text{Π15})$$

Τέλος ας ορίσουμε,

$$\theta = \frac{V_0}{F_0}$$

ως τη σταθερά παρακράτησης της δεξαμενής, και,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}, \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_1(t) \\ \mu_2(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(t) - F_0 \\ c(t) - c_0 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} \frac{F_0 \xi_1(t)}{2V_0} \\ \xi_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\theta} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \end{bmatrix}$$

ως τις μεταβλητές κατάστασης, ελέγχου και εξόδου αντίστοιχα. Με τους ορισμούς αυτούς καταλήγουμε στην αναπαράσταση του συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\theta} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{c_1 - c_0} & \frac{1}{c_2 - c_0} \\ \frac{1}{V_0} & \frac{1}{V_0} \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{Π16})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (\text{Π17})$$

Χρησιμοποιώντας σαν τιμές τις,

$$\begin{aligned} F_{10}: & 0,015 \text{ m}^3/\text{s} \\ F_{20}: & 0,055 \text{ m}^3/\text{s} \\ F_0: & 0,02 \text{ m}^3/\text{s} \\ c_1: & 1 \text{ kmol/m}^3 \\ c_2: & 2 \text{ kmol/m}^3 \\ c_0: & 1,25 \text{ kmol/m}^3 \\ V_0: & 1 \text{ m}^3 \\ \theta: & 50 \text{ s} \end{aligned}$$

οι (Π16)-(Π17) γίνονται:

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{Π18})$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \quad (\text{Π19})$$

© Α. Πουλιέζος

Π2 Συνάρτηση διακρίβωσης ελεγχιμότητας/ σταθεροποιησιμότητας

```
function un_stb = con_stb(A, B)
%
% test pair (A, B) for controllability/stabilizability
%
% un_stb:      0 uncontrollable/unstabilizable
%              1 controllable
%              2 stabilizable
%
AT = A';
BT = B';
% check observability/detectability of dual system
un_stb = obs_det(AT, BT);
```

Π3 Συνάρτηση διακρίβωσης παρατηρησιμότητας/εντοπισιμότητας

```
function un_det = obs_det(A, C)
%
% test pair (C, A) for observability/detectability
%
% un_det:      0 unobservable/undetectable
%              1 observable
%              2 detectable
```

```
% get size of dummy B
s_B = size(A, 1);
[AO, BO, CO, T, ko] = obsvf(A, ones(s_B, 1), C);
% number of observable states
sum_k = sum(ko);
if sum_k < s_B
% (C, A) unobservable
% check detectability
dim_uo = s_B - sum_k;
eig_uo = eig(AO(1:dim_uo, 1:dim_uo));
ch = sum(real(eig_uo)<0);
if ch == dim_uo
% (C, A) detectable
un_det = 2;
else
% (C, A) unobservable/undetectable
un_det = 0;
end
else
% (C, A) observable
un_det = 1;
end
```

© Α. Πουλιέζος

Εκδογογραφία

2.0

Εκδογογραφία.

Απόρριψη διαταραχών.

2.3, 2.4

Σύνθεση δομικών διαγραμμάτων σε χώρο κατάστασης. Ιστορικό χώρου κατάστασης.

© Α. Πουλιέζος