

Βέλτιστος έλεγχος

Σημειώσεις μεταπτυχιακού μαθήματος

Α. Πουλιέζος

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Χανιά

Έκδοση 2.3, Αύγουστος 2014

© Α. Πουλιέζος

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	3
1 Εισαγωγή στον Βέλτιστο Έλεγχο	5
1.1 Το γενικό πρόβλημα του ελέγχου	5
1.2 Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου	5
1.3 Διατύπωση του προβλήματος	6
1.3.1 Υπόδειγμα διαδικασίας	7
1.3.2 Περιορισμοί	8
1.3.3 Κριτήριο απόδοσης	8
2 Απαραίτητες μαθηματικές έννοιες	11
2.1 Δομές επί συνόλων	11
2.2 Επιγραμματική παρουσίαση της θεωρίας βελτιστοποίησης συναρτήσεων	11
2.2.1 Ορισμοί	11
2.2.2 Ακρότατα χωρίς περιορισμούς	18
2.2.3 Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων	21
2.2.4 Ακρότατα με περιορισμούς ανισοτήτων	23
2.3 Λύση γραμμικών συστημάτων	23
2.4 Λογισμός μεταβολών	24
3 Ακρότατα συναρτησιακών	27
3.1 Ακρότατα συναρτησιακών βαθμωτών συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς	27
3.1.1 Ειδικές μορφές της εξίσωσης Euler-Lagrange	30
3.2 Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς	37
3.3 Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων με περιορισμούς διαφορικών εξισώσεων	38
4 Βέλτιστος έλεγχος αιτιοκρατικών συστημάτων	45
4.1 Βέλτιστος έλεγχος χωρίς φραγμό στο διάνυσμα ελέγχου	45
4.1.1 Το πρόβλημα του Ζερμέλο	51
4.2 Βέλτιστος έλεγχος με φραγμό στο διάνυσμα ελέγχου - η αρχή του ελαχίστου του Pontryagin	55
4.2.1 Σύστημα παραγωγής	57
4.2.2 Οι μέλισσες ως βελτιστοποιητές	61
4.3 Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένο έλεγχο και διάνυσμα κατάστασης	66
4.4 Ειδικές περιπτώσεις	66
4.4.1 Προβλήματα LQ (γραμμικό σύστημα - τετραγωνικό κόστος): Παρακολούθηση	66

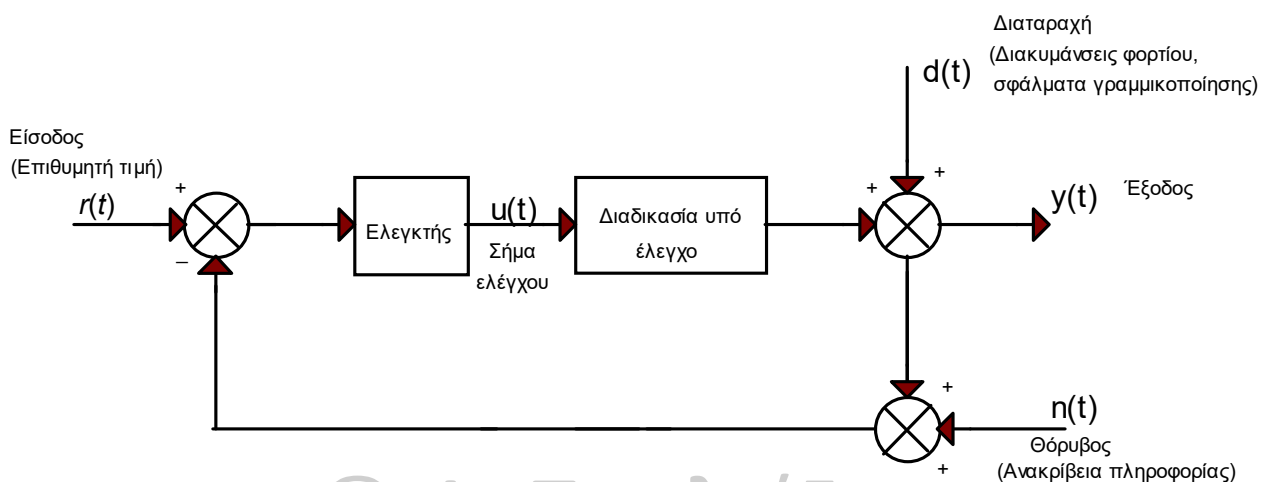
4.4.1.1	Άπειρος ορίζοντας.....	73
4.4.1.2	LQR άπειρου ορίζοντα με μικτό όρο.....	73
4.4.1.3	Επιλογή των Q, R, S	74
4.4.1.4	Παράδειγμα 4.2 Βέλτιστος έλεγχος ενεργούς ανάρτησης σε υπόδειγμα $\frac{1}{4}$	75
4.4.2	Προβλήματα ελαχίστου χρόνου.....	80
5	Στοχαστικά συστήματα	87
5.1	Διατύπωση του προβλήματος.....	87
Παράρτημα I.....	96	
Λίστες προγραμμάτων MATLAB (4.2).....	96	
Πρόγραμμα OPREGLIC	96	
Πρόγραμμα RICATTIC.....	98	
Πρόγραμμα STEQLIC.....	98	
Πρόγραμμα ODE45.....	99	
Αρχείο δεδομένων για το πρόβλημα kirk216.....	102	
Βιογραφίες	104	
Βιβλιογραφία	105	

© Α. Πουλιέζος

1 Εισαγωγή στον Βέλτιστο Έλεγχο

1.1 Το γενικό πρόβλημα του ελέγχου

Ο βέλτιστος έλεγχος αναπτύχθηκε στα πλαίσια της Θεωρίας Ελέγχου. Πριν λοιπόν να δούμε τις βασικές έννοιες του, καλό είναι να γίνει μία γρήγορη επισκόπηση της Θεωρίας (Αυτομάτου) Ελέγχου. Το παρακάτω δομικό διάγραμμα χρησιμοποιείται συνήθως για τη κατανόηση των βασικών εννοιών:



Σχήμα 1.1 Τυπικό διάγραμμα συστήματος αυτομάτου ελέγχου

Βασικό Πρόβλημα: ποιά είναι το κατάλληλο **σήμα ελέγχου** $u(t)$ έτσι ώστε η **έξοδος** $y(t)$ να συμβαδίζει με την **επιθυμητή τιμή** της, $r(t)$, παρ' όλες τις **εξωτερικές διαταραχές** $d(t)$ και ανακρίβεια στην πληροφορία, που προέρχεται από τον **θόρυβο** $n(t)$, περί της πραγματικής κατάστασης της εξόδου.

Όπως είναι φανερό αυτό μπορεί να είναι ένα πολύ δύσκολο πρόβλημα. Η δυσκολία εξαρτάται από τη πολυπλοκότητα της διαδικασίας υπό έλεγχο, από το μέγεθος και τη προβλεψιμότητα των εξωτερικών διαταραχών, και το μέγεθος του θορύβου.

Η συγκεκριμένη δομή είναι σε διάταξη **ανατροφοδότησης** (feedback) ή **κλειστού βρόχου** (closed loop). Το βασικό του χαρακτηριστικό είναι η συνεχής πληροφόρηση του ελεγκτή για τη κατάσταση του συστήματος. Σε αντίθεση με ένα σύστημα **ανοιχτού βρόχου** (open loop), το σύστημα κλειστού βρόχου έχει πιθανότητες να επιλύσει το βασικό πρόβλημα. Αν οι διαταραχές απουσίαζαν, τότε τα δύο συστήματα θα ήταν ισοδύναμα, αφού το μέλλον θα ήταν απόλυτα προβλέψιμο και η πληροφόρηση περί της κατάστασης, περιττή.

1.2 Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου

Ο στόχος του βέλτιστου ελέγχου είναι να υπολογίσει μία στρατηγική ελέγχου που θα ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί κάποια συνάρτηση απόδοσης για ένα σύστημα που ικανοποιεί δεδομένες μαθηματικές σχέσεις.

Παρόλο που οι αρχικές εφαρμογές της θεωρίας υλοποιήθηκαν σε κλασσικές περιοχές της επιστήμης του μηχανικού (ηλεκτρολογία, μηχανολογία κλπ.), στη συνέχεια βρήκε ευρεία εφαρμογή σε πληθώρα τομέων. Είναι γεγονός ότι οποιοδήποτε φυσικό ή τεχνητό δυναμικό σύστημα που μπορεί να περιγραφεί από ένα σύνολο μαθηματικών σχέσεων (σε κατάλληλη μορφή) μπορεί να αναλυθεί και ελεγχθεί μέσω της θεωρίας του βέλτιστου ελέγχου.

Ένα φυσικό ή τεχνητό σύστημα που περιγράφεται από ένα μαθηματικό υπόδειγμα (model) μπορεί να ταξινομηθεί με διάφορους τρόπους σε ζεύγη κατηγοριών. Ένα τέτοιο ζεύγος είναι τα **αιτιοκρατικά-στοχαστικά** συστήματα. Στα κεφάλαια που ακολουθούν, θα αντιμετωπισθούν ως επί το πλείστον αιτιοκρατικά συστήματα. Αυτό γίνεται για δύο λόγους: πρώτον γιατί είναι πιο εύκολο και δεύτερο γιατί για μία ειδική κατηγορία προβλημάτων, τη λεγόμενη **LQG** - **L**inear (system) **Q**uadratic (cost) **G**aussian (noise), οι δύο κατηγορίες επιδέχονται κοινή αντιμετώπιση.

Τα προβλήματα του βέλτιστου ελέγχου μπορούν να επιλυθούν με δύο κυρίως μεθόδους: τον **λογισμό των μεταβολών** και τον **δυναμικό προγραμματισμό**. Κάθε μέθοδος έχει τα πλεονεκτήματα και μειονεκτήματα της: ο λογισμός των μεταβολών καταλήγει σε έλεγχο ανοικτού βρόχου και είναι ιδιαίτερα εφαρμόσιμος σε αιτιοκρατικά συστήματα· ο δυναμικός προγραμματισμός καταλήγει σε έλεγχο κλειστού βρόχου, που όπως προαναφέρθηκε είναι προτιμότερος του ελέγχου ανοικτού βρόχου. Δυστυχώς, όμως οι συνθήκες για την εφαρμογή του δυναμικού προγραμματισμού δεν ικανοποιούνται πάντα. Για λόγους χώρου, στις σημειώσεις αυτές θα ακολουθήσουμε την κατεύθυνση του λογισμού των μεταβολών.

1.3 Διατύπωση του προβλήματος

Η σωστή διατύπωση του προβλήματος βέλτιστου ελέγχου προϋποθέτει:

1. Μαθηματική διατύπωση (πρότυπο) της υπό έλεγχο διαδικασίας.
2. Διατύπωση φυσικών περιορισμών.
3. Διατύπωση κριτηρίου απόδοσης.

Σε μαθηματική γλώσσα, αυτό διατυπώνεται ως,

Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου (για αιτιοκρατικά συστήματα): Να βρεθεί ένας έλεγχος,

$$\mathbf{u}^*(t) \in U \quad (1.1)$$

που να αναγκάζει το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.2)$$

να ακολουθήσει μία αποδεκτή τροχιά,

$$\mathbf{x}^*(t) \in X \quad (1.3)$$

που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης,

$$J[\mathbf{u}(t)] = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.4)$$

Ο τελικός χρόνος t_f και τελική θέση $x(t_f)$ μπορεί να είναι δεδομένα ή ελεύθερα. Η $J[\cdot]$ καλείται **συναρτησιακό**.

Κάθε μία από τις εξισώσεις (1.1)-(1.4) αντικατοπτρίζει κάποια από τις προϋποθέσεις του προβλήματος. Ας δούμε μία-μία ξεχωριστά.

1.3.1 Υπόδειγμα διαδικασίας

Η εξίσωση (1.2) καλείται **εξίσωση κατάστασης** της διαδικασίας. Η μορφή της πρέπει να είναι συγκεκριμένη, δηλαδή το υπόδειγμα πρέπει να διατυπώνεται σαν ένα σύστημα **συνήθων διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης**. Στη γενική τους μορφή οι εξισώσεις αυτές είναι μη γραμμικές και χρονικά μεταβαλλόμενες. Το σύστημα είναι τάξης n , όση δηλαδή και η διάσταση του **διανύσματος κατάστασης \mathbf{x}** . Το **διάνυσμα ελέγχου \mathbf{u}** είναι διάστασης m . Ως υποπεριπτώσεις που επιδέχονται ευκολότερη αναλυτική προσέγγιση, διακρίνουμε τα **γραμμικά, χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα**,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$$

και τα **γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα**,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

Αν η φύση του προβλήματος είναι κατάλληλη, το υπόδειγμα μπορεί να είναι ένα σύστημα n **μη γραμμικών, χρονικά μεταβαλλόμενων εξισώσεων διαφορών πρώτης τάξης**:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(k), \mathbf{u}(k), k) \quad (1.5)$$

Για παράδειγμα, στις οικονομικές εφαρμογές τα πρότυπα εξισώσεων διαφορών είναι πιο κατάλληλα, επειδή η χρονική σταθερά είναι αρκετά μεγάλη. Ένας άλλος λόγος χρήσης είναι ότι στην πράξη έχουμε πάντα διακριτές μετρήσεις. Ο χρόνος που μεσολαβεί μεταξύ δύο μετρήσεων εξαρτάται από την συχνότητα δειγματοληψίας.

Πάντως για γραμμικά συστήματα, είναι δυνατό να μετατρέψουμε την (1.2) στην μορφή (1.5) μέσω του τύπου,

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi \mathbf{x}(k) + \Delta \mathbf{u}(k)$$

όπου,

$\Phi = \Phi(T)$ είναι ο **πίνακας μετάβασης** του συστήματος (ο ορισμός αργότερα) και, $\Delta = \int_0^T \Phi(T-\tau) \mathbf{B} d\tau$, αμφότεροι σταθεροί πίνακες εξαρτώμενοι από την περίοδο δειγματοληψίας T .

Τα αποτελέσματα που προκύπτουν είναι παρόμοια και για τις δύο περιπτώσεις.

1.3.2 Περιορισμοί

Οι εξισώσεις (1.1) και (1.3) αποτελούν τους φυσικούς περιορισμούς του συστήματος για το διάνυσμα ελέγχου και κατάστασης αντίστοιχα. Ο έλεγχος πρέπει να περιορίζεται μ' αυτόν τον άμεσο τρόπο αν δεν περιορίζεται μέσω της (1.4), αφού στην πράξη δεν είναι δυνατόν να υπάρξει απεριόριστη ισχύς. Συνήθως ο περιορισμός αυτός είναι υπό μορφή ανισοτήτων στα στοιχεία του διανύσματος:

$$S_{i-} \leq u_i(t) \leq S_{i+}, \quad i=1, \dots, m \quad (1.6)$$

Η κατάσταση περιορίζεται αν υπάρχουν λόγοι που το επιβάλλουν, αλλά δεν είναι απαραίτητο για να βρεθεί πεπερασμένος έλεγχος. Και σ' αυτή την περίπτωση μία τυπική μορφή περιορισμών είναι οι ανισωτικοί.

1.3.3 Κριτήριο απόδοσης

Η διαφορά μεταξύ της προσέγγισης ενός προβλήματος από αφηρημένη μαθηματική και εφαρμοσμένη σκοπία, έγκειται στο ότι στην δεύτερη οι μαθηματικοί όροι πρέπει να αποκτήσουν φυσική σημασία. Έτσι, η εξειδίκευση της (1.4) θα συσχετισθεί με φυσική ερμηνεία του μαθηματικού τύπου.

Τα προβλήματα βέλτιστου ελέγχου μπορούν να χωριστούν σε κατηγορίες με βάση το κριτήριο απόδοσης. Οι πιο σημαντικές είναι οι εξής (περιγραφικά, όχι με αυστηρή μαθηματική ορολογία):

A. Ελαχίστου χρόνου

Όπως υποδηλώνει και ο τίτλος, στην περίπτωση αυτή ενδιαφέρει να μετακινηθεί η διαδικασία από μία αρχική θέση \mathbf{x}_0 σε μία τελική \mathbf{x}_f σε ελάχιστο χρόνο. Η μορφή της (1.4) για το στόχο αυτό είναι,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0 \quad (1.7)$$

Αν και η μορφή αυτή φαίνεται αρκετά απλή, η επίλυση της είναι ιδιαίτερα δύσκολη!

B. Ελαχίστης κατανάλωσης καυσίμων ή ενέργειας

Στην περίπτωση αυτή η διαδικασία απαιτείται να μετακινηθεί από μία αρχική θέση \mathbf{x}_0 σε μία τελική \mathbf{x}_f καταναλώνοντας ελάχιστα καύσιμα ή δαπανώντας ελάχιστη ενέργεια. Για την πρώτη περίπτωση, αν υποθεθεί ότι η κατανάλωση είναι ανάλογη της τιμής του ελέγχου, ένα κατάλληλο κριτήριο είναι το,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left[\sum_{i=1}^m \beta_i |u_i(t)| \right] dt \quad (1.8)$$

όπου τα β_i είναι μη αρνητικές σταθερές, για τη στάθμιση των στοιχείων του \mathbf{u} . Για την δεύτερη, αν υποθεθεί ότι η ενέργεια είναι ανάλογη του τετραγώνου του σήματος ελέγχου, ένα κατάλληλο κριτήριο είναι το,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 dt \quad (1.9)$$

όπου ο $\mathbf{R}(t)$ είναι πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος για κάθε t , τετραγωνικός πίνακας διάστασης $m \times m$ και,

$$\|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 = \mathbf{u}^T(t) \mathbf{R}(t) \mathbf{u}(t) \quad (1.10)$$

Βέβαια, η εξάρτηση του \mathbf{R} από τον χρόνο δεν απαντάται συχνά στην πράξη (είναι λίγο υπερβολικό), αλλά συνήθως στα μαθηματικά χρησιμοποιούμε την πιο πολύπλοκη μορφή για την οποία ισχύουν τα αποτελέσματα.

Γ. Τετραγωνικού κόστους

Η γενική μορφή του τετραγωνικού κριτηρίου κόστους είναι η,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_H^2 + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{Q(t)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{R(t)}^2 \right\} dt \quad (1.11)$$

όπου οι H και $Q(t)$ είναι πραγματικοί, συμμετρικοί και θετικά ημιορισμένοι τετραγωνικοί πίνακες διάστασης $n \times n$. Στη γενική αυτή μορφή η φυσική σημασία είναι ότι απαιτείται η διαδικασία να διατηρηθεί «κοντά» σε μία επιθυμητή κατάσταση $\mathbf{r}(t)$ χωρίς να δαπανηθεί «μεγάλη» ενέργεια. Τα προβλήματα αυτά καλούνται και **προβλήματα παρακολούθησης**, ενώ αν $\mathbf{r}(t) = 0$ **προβλήματα ρύθμισης**.

Για την επιλογή των πινάκων βαρών H , $Q(t)$ και $R(t)$ δεν υπάρχουν συγκεκριμένες οδηγίες. Ο σχεδιαστής θα πρέπει να επιλέξει το συνδυασμό εκείνο που καταλήγει στο επιθυμητό αποτέλεσμα, μετά από μια διαδικασία δοκιμής-σφάλματος.

Είναι επίσης δυνατός ο συνδυασμός δύο κριτηρίων (με κατάλληλα βάρη) για την ταυτόχρονη ικανοποίηση δύο ή περισσότερων στόχων. Για παράδειγμα, το κριτήριο,

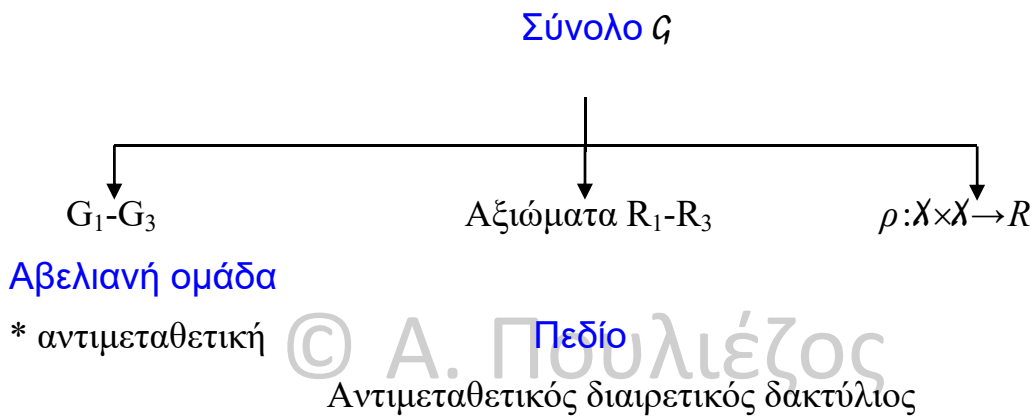
$$J[u(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \{ \lambda + u^2(t) \} dt$$

δηλώνει την επιθυμία μας να ελαχιστοποιήσουμε και το χρόνο και την ενέργεια για ένα σύστημα με μία είσοδο. Η σταθερά λ σταθμίζει την σχετική βαρύτητα των δύο στόχων.

2 Απαραίτητες μαθηματικές έννοιες

2.1 Δομές επί συνόλων

Κάθε περιοχή της μαθηματικής θεωρίας εδράζεται σε συνεπή θεμελιώδη αξιώματα. Αρχίζοντας από την πρωταρχική έννοια του συνόλου, οι μαθηματικοί οικοδομούν προσεκτικά τους ορόφους των μαθηματικών δομών. Στο Σχ. 2.1 αποπειράται μία σχηματική παρουσίαση του μαθηματικού δομικού δένδρου, ούτως ώστε να γίνει πιο αντιληπτή η σχέση ανάμεσα στις διάφορες δομές.



Σχήμα 2.1 Το μαθηματικό δομικό δένδρο

2.2 Επιγραμματική παρουσίαση της θεωρίας βελτιστοποίησης συναρτήσεων

2.2.1 Ορισμοί

Επειδή η θεωρία του λογισμού των μεταβολών, που θα είναι το βασικό μαθηματικό

εργαλείο με το οποίο θα οικοδομήσουμε τον βέλτιστο έλεγχο, γίνεται πιο κατανοητή αν παραλληλισθεί με τον κλασικό λογισμό συναρτήσεων, θα παραθέσουμε στην συνέχεια τις βασικές έννοιες του.

Μία **συνάρτηση** f είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης που αντιστοιχεί σε κάθε στοιχείο q ενός συνόλου X ένα μοναδικό στοιχείο s ένα σύνολο Y . Το σύνολο X καλείται **περιοχή** της f ενώ το σύνολο Y **πεδίο ορισμού**. Με σύμβολα $f: X \rightarrow Y$.

Ένας **μετρικός χώρος** (X, ρ) αποτελείται από ένα (μη κενό) σύνολο X και μία συνάρτηση $\rho: X \times X \rightarrow R$ (σύνολο πραγματικών αριθμών), η οποία ικανοποιεί τα ακόλουθα αξιώματα:

1. $\rho(x, y) \geq 0, \forall x, y \in X$.
2. $\rho(x, y) = 0$ ανν (αν και μόνον αν) $x = y$.
3. $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X$.
4. $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y), \forall x, y, z \in X$ (τριγωνική ανισότητα)

Μέσω της συνάρτησης αυτής ορίζεται η οικεία έννοια της **απόστασης**.

Έστω μία συνάρτηση $f: X \rightarrow Y$, όπου $(X, \rho_x), (Y, \rho_y)$ είναι μετρικοί χώροι. Η συνάρτηση f καλείται **συνεχής στο σημείο $x_0 \in X$** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $\delta > 0$, $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, τέτοιο που αν για οποιοδήποτε σημείο $x \in X$ ισχύει $\rho_x(x, x_0) < \varepsilon$ τότε $\rho_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Η συνάρτηση f καλείται **συνεχής** αν είναι συνεχής σε όλα τα σημεία $x \in X$.

Μία ακολουθία $\{x_n\}$ σημείων ενός μετρικού χώρου (X, ρ) καλείται συγκλίνουσα αν υπάρχει σημείο x_0 τέτοιο ώστε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος $N = N(\varepsilon)$ τέτοιος ώστε αν $n \geq N$, τότε $\rho(x_n, x_0) < \varepsilon$. Το σημείο x_0 καλείται τότε **όριο** της ακολουθίας $\{x_n\}$ και συμβολίζεται,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

Ένας **γραμμικός χώρος** αποτελείται από ένα (μη κενό) σύνολο X (επί ενός πεδίου F) και τους τελεστές της πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού, οι οποίοι έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ για κάθε $x_1, x_2 \in X$
2. $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$ για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in X$
3. Υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο του X , που συμβολίζεται με το 0 , τέτοιο ώστε $0 + x = x$ για κάθε $x \in X$.

4. Για κάθε $x \in \mathcal{X}$ υπάρχει ένα μοναδικό στοιχείο $-x \in \mathcal{X}$ τέτοιο ώστε $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$.
6. $0x = 0$, για κάθε $x \in \mathcal{X}$.
7. $a(\beta x) = (a\beta)x$
 $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
 $a(x_1 + x_2) = ax_1 + ax_2$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathcal{F}$ και $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$.

Σ' ένα γραμμικό χώρο η **νόρμα** $\|\mathbf{q}\|$ ενός διανύσματος \mathbf{q} είναι μία συνάρτηση που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

1. $\|\mathbf{q}\| \geq 0$, και $\|\mathbf{q}\| = 0$ ανν $\mathbf{q} = \mathbf{0}$.
2. $\|a\mathbf{q}\| = |a|\|\mathbf{q}\| \forall a \in \mathcal{R}$.
3. $\|\mathbf{q}^1 + \mathbf{q}^2\| \leq \|\mathbf{q}^1\| + \|\mathbf{q}^2\|$

Η νόρμα ορίζει την γνωστή έννοια του **μεγέθους** ενός διανύσματος (ο συμβολισμός με δύο κάθετες γραμμές χρησιμοποιείται για να τονίσει το γεγονός ότι η νόρμα είναι γενίκευση της έννοιας της απόλυτης τιμής).

Η νόρμα της διαφοράς δύο σημείων είναι ένα μέτρο της **εγγύτητας** των σημείων και επίσης καθορίζουν την μορφή της **γειτονιάς** ενός σημείου.

Ο τρόπος με τον οποίο ορίζεται η νόρμα αφήνει περιθώρια για πολλές συναρτήσεις που μπορεί να είναι υποψήφιες για το σκοπό αυτό. Μία μεγάλη κατηγορία συναρτήσεων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για νόρμες δίνονται από τον τύπο,

$$\|\mathbf{q}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |q_i|^p \right)^{1/p} \quad (2.1)$$

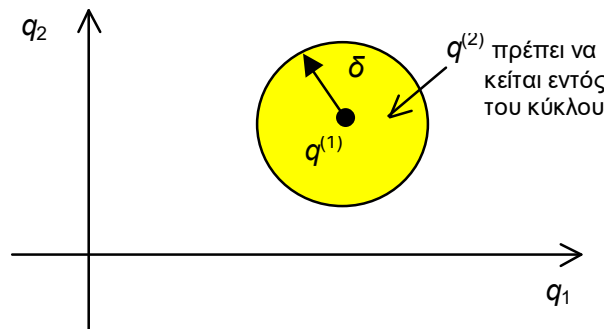
καλούνται δε **νόρμες L_p** .

Η επιλογή του p εξαρτάται από τη συγκεκριμένη εφαρμογή και έχει διαφορετική φυσική σημασία. Για παράδειγμα για $p=1$, η (2.1) υπολογίζει απλά το άθροισμα των απολύτων τιμών των στοιχείων του διανύσματος, για $p=2$ έχουμε την γνωστή

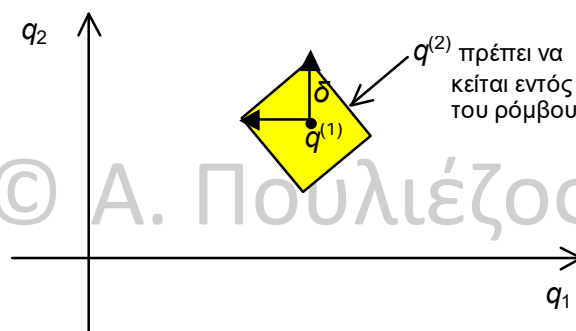
Για να κατανοηθεί καλύτερα η έννοια της νόρμας, στο Σχ. 2.2 (α-β) φαίνονται οι περιοχές που ορίζονται από δύο χαρακτηριστικές νόρμες στον δισδιάστατο Ευκλείδειο χώρο. Αυτές είναι οι,

$$\|\mathbf{q}\|_2 \stackrel{\Delta}{=} \sqrt{q_1^2 + q_2^2}, \quad \|\mathbf{q}\|_1 \stackrel{\Delta}{=} |q_1| + |q_2|$$

Έτσι τα σημεία $\mathbf{q}^{(2)}$ που ικανοποιούν τη σχέση $\|\mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{q}^{(1)}\| < \delta$ για τυχαίο $\mathbf{q}^{(1)}$ κείτονται εντός κύκλου ακτίνας δ στη πρώτη περίπτωση, ενώ στη δεύτερη στο εσωτερικό κατάλληλου ρόμβου.



Σχήμα 2.2α Το σύνολο σημείων που ικανοποιούν $\|\mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{q}^{(1)}\|_2 < \delta$



Σχήμα 2.3β Το σύνολο σημείων που ικανοποιούν $\|\mathbf{q}^{(2)} - \mathbf{q}^{(1)}\|_1 < \delta$

Στη συνέχεια θεωρούμε ότι βρισκόμαστε εντός ενός γραμμικού διανυσματικού χώρου με νόρμα $\|\bullet\|$ και συγκεκριμένα εντός του Ευκλείδειου χώρου n διαστάσεων. Επομένως οι συναρτήσεις μας αντιστοιχούν πραγματικούς αριθμούς σε στοιχεία (διανύσματα) του Ευκλείδειου χώρου n διαστάσεων: $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Ένα σημείο $\mathbf{s} \in \mathcal{D} \in \mathbb{R}^n$ είναι **εσωτερικό σημείο** του \mathcal{D} αν και μόνον αν υπάρχει θετικός πραγματικός αριθμός δ τέτοιος που αν το \mathbf{q} ικανοποιεί $\|\mathbf{q} - \mathbf{s}\| < \delta$, τότε $\mathbf{q} \in \mathcal{D}$.

Η **αύξηση** Δf μίας συνάρτησης $f(\mathbf{q})$ ορίζεται σαν,

$$\Delta f(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}) = f(\mathbf{q} + \Delta \mathbf{q}) - f(\mathbf{q})$$

όπου $\Delta \mathbf{q} = \mathbf{q} - \mathbf{q}_1$ είναι η αύξηση (δηλαδή η διαφορά μεταξύ δύο σημείων) της ανεξάρτητης μεταβλητής \mathbf{q} .

Μία συνάρτηση $f(\mathbf{q})$ έχει **σχετικό ακρότατο** στο σημείο \mathbf{q}^* , αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο που για όλα τα σημεία $\|\mathbf{q} - \mathbf{q}^*\| < \varepsilon$ η αύξηση της f έχει το ίδιο πρόσημο. Αν,

$$\Delta f = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}^*) \geq 0 \quad (2.1)$$

το $f(\mathbf{q}^*)$ είναι **σχετικό ελάχιστο**, αλλιώς αν,

$$\Delta f = f(\mathbf{q}) - f(\mathbf{q}^*) \leq 0 \quad (2.2)$$

το $f(\mathbf{q}^*)$ είναι **σχετικό μέγιστο**.

Οι ορισμοί αυτοί είναι αρκετά δύσχρηστοι για να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση των ακρότατων. Στις περισσότερες των περιπτώσεων χρησιμοποιούνται οι ακόλουθες έννοιες.

Η αύξηση μίας συνάρτησης μπορεί να γραφεί σαν,

$$\Delta f(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}) = df(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}) + g(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}) \cdot \|\Delta \mathbf{q}\|$$

όπου η df είναι γραμμική συνάρτηση της $\Delta \mathbf{q}$. Αν,

$$\text{ορ } \left\{ g(\mathbf{q}, \Delta \mathbf{q}) \right\} = 0 \\ \|\Delta \mathbf{q}\| \rightarrow 0$$

τότε η f καλείται **διαφορίσιμη κατά Fréchet** στο \mathbf{q} και η df είναι το **διαφορικό Fréchet** της f στο \mathbf{q} . Η προσέγγιση αυτή αντιστοιχεί σε μία ισχυρή έννοια της διαφορίσιμης, αφού απαιτεί την ύπαρξη νόρμας.

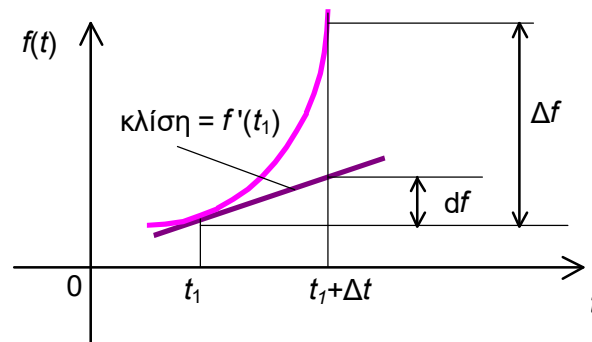
Στη περίπτωση αυτή,

$$\Delta f \approx df$$

Αν η f είναι διαφορίσιμη συνάρτηση μίας μεταβλητής t , τότε το διαφορικό μπορεί να γραφτεί,

$$df(t, \Delta t) = f'(t) \Delta t$$

Η $f'(t)$ καλείται **παράγωγος** της f στο t .



Σχήμα 2.4 Γεωμετρική ερμηνεία της παραγώγου

Στο Σχ. 2.4 φαίνεται η γεωμετρική ερμηνεία των όρων αυτών: η $f'(t_1)\Delta t$ είναι μία γραμμική προσέγγιση πρώτης τάξης της αύξησης Δf . Όσο μικρότερο είναι το Δt , τόσο καλύτερη η προσέγγιση.

Για διαφορίσιμες συναρτήσεις n μεταβλητών το διαφορικό βρίσκεται από τον τύπο,

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial q_n} \Delta q_n$$

Το πρόσημο ενός τετραγωνικού πίνακα F διάστασης $n \times n$ ορίζεται με την βοήθεια **τετραγωνικών μορφών** του τύπου,

$$Q = \mathbf{x}^T \mathbf{F} \mathbf{x} \quad (2.3)$$

Ο πίνακας F καλείται **θετικά ορισμένος** αν η αντίστοιχη τετραγωνική μορφή (2.3) είναι θετική ($Q > 0$) για $\mathbf{x} \neq 0$. Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να συμβαίνει αυτό είναι όλοι οι κύριοι υποπίνακες του F να έχουν θετικές ορίζουσες, δηλαδή,

$$|f_{11}| > 0, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

Αντίστοιχα ο F καλείται **θετικά ημιορισμένος** αν $Q \geq 0$ με αντίστοιχες ικανές και αναγκαίες συνθήκες.

Οι ορισμοί επεκτείνονται σε **αρνητικά ορισμένους** και **αρνητικά ημιορισμένους** πίνακες οι οποίοι ορίζονται εύκολα μέσω των αρνητικών τους π.χ. ο F είναι αρνητικά ημιορισμένος αν ο $-F$ είναι θετικά ημιορισμένος. Τέλος, ένας πίνακας καλείται **αόριστος** αν δεν είναι τίποτα από τα προηγούμενα.

Αν ο F είναι συμμετρικός, οι ικανές και αναγκαίες συνθήκες μετατρέπονται σε αντί-

στοιχες συνθήκες για τις ιδιοτιμές του F . Για παράδειγμα, αν,

$$\lambda_i > 0, \quad \forall i$$

τότε ο F είναι θετικά ορισμένος.

Η **ανάπτυξη Taylor** μιας συνάρτησης $f(\mathbf{q})$ με συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης n γύρω από το σημείο \mathbf{q} δίνεται από την σχέση,

$$f(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) = f(\mathbf{q}) + \mathbf{g}^T \Delta\mathbf{q} + \frac{1}{2} \Delta\mathbf{q}^T \mathbf{H} \Delta\mathbf{q} + O(3) \quad (2.4)$$

όπου $O(3)$ συμβολίζει όρους παραγώγων τάξης 3 και άνω, και

$$\mathbf{g} = \nabla f(\mathbf{q}) = \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} = \left[\frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_1} \quad \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_2} \quad \dots \quad \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial q_n} \right]^T \quad (\text{Ιακωβιανό διάνυσμα κλίσης})$$

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

(**Πίνακας Hessian**)

Επειδή η πλήρης μορφή της (2.4) απαντάται σπάνια στη βιβλιογραφία, νοίλα :

$$f(\mathbf{q} + \Delta\mathbf{q}) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_n=0}^{\infty} \frac{\partial^{m_1}}{\partial q_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial q_2^{m_2}} \dots \frac{\partial^{m_n}}{\partial q_n^{m_n}} f(\mathbf{q}) \prod_{i=1}^n \frac{1}{m_i!} (\Delta q_i)^{m_i} \quad (2.6)$$

Για να καταλάβουμε την (2.6) ας δούμε τους όρους της (2.4) σε ανάπτυξη:

$$\begin{aligned}
g^T \Delta q &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f(q)}{\partial q_1} & \frac{\partial f(q)}{\partial q_2} & \dots & \frac{\partial f(q)}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} \\
&= \frac{\partial f(q)}{\partial q_1} \Delta q_1 + \frac{\partial f(q)}{\partial q_2} \Delta q_2 + \dots + \frac{\partial f(q)}{\partial q_n} \Delta q_n
\end{aligned} \tag{2.7}$$

και,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta q^T H \Delta q &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta q_1 & \Delta q_2 & \dots & \Delta q_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_2 \partial q_1} & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_2 \partial q_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_1} & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix} = \tag{2.8}
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1^2} + \dots + \Delta q_n \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_1} & \Delta q_1 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_2} + \dots + \Delta q_n \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_2} & \dots & \Delta q_1 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_n} + \dots + \Delta q_n \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1 \\ \Delta q_2 \\ \vdots \\ \Delta q_n \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \left[\Delta q_1^2 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1^2} + \dots + \Delta q_n \Delta q_1 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_1} + \Delta q_1 \Delta q_2 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_2} + \dots + \Delta q_n \Delta q_2 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n \partial q_2} + \Delta q_1 \Delta q_n \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_1 \partial q_n} + \dots + \Delta q_n^2 \frac{\partial^2 f(q)}{\partial q_n^2} \right]$$

2.2.2 Ακρότατα χωρίς περιορισμούς

Θεμελιώδες Θεώρημα ακρότατων συναρτήσεων: Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους στο εσωτερικό σημείο $q=s$. Τότε αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου είναι ο μηδενισμός του διαφορικού ή ισοδύναμα

του διανύσματος κλίσης,

$$\nabla f = \left. \frac{\partial f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{s}} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Αν περαιτέρω υπάρχουν οι απαιτούμενες μερικές δεύτερες παράγωγοι και είναι συνεχείς στο εσωτερικό σημείο $\mathbf{q}=\mathbf{s}$, η ικανή συνθήκη για να έχει η f τοπικό μέγιστο (ελάχιστο) είναι ο πίνακας των δευτέρων παραγώγων,

$$\mathbf{H} = \left. \frac{\partial^2 f(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}=\mathbf{s}} \begin{matrix} < \mathbf{0} \\ > \mathbf{0} \end{matrix} \quad (2.10)$$

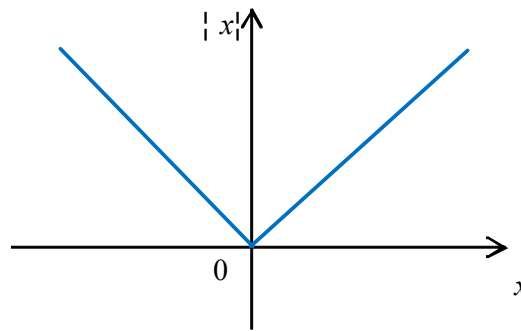
να είναι αρνητικά (θετικά) ορισμένος. Αν ο \mathbf{H} είναι αόριστος το \mathbf{s} είναι **σημείο σέλλας**.

Αν ο πίνακας είναι ημιορισμένος, δηλαδή μηδενίζεται για κάποια $x \neq 0$, πρέπει να εξετασθούν υψηλότεροι όροι της σειράς Taylor (Εξ. 2.4) και να χρησιμοποιηθεί ο πίνακας:

τάξη παραγώγου ν	πρόσημο όρου	συμπέρασμα
άρτια	θετικά ορισμένο	ελάχιστο
	αρνητικά ορισμένο	μέγιστο
περιττή	οτιδήποτε	αδυναμία απόφασης

Προφανώς στη περίπτωση πολλών μεταβλητών τα πράγματα δυσκολεύουν όταν πάμε να υπολογίσουμε όρους παραγώγων μεγαλύτερους του δύο.

Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η μη διαφορισιμότητα μίας συνάρτησης δε σημαίνει ότι δεν υπάρχουν ακρότατα. Απλώς, η ύπαρξη διαφορικού διευκολύνει την εξακρίβωση τους. Για παράδειγμα η $f(x)=|x|$ (Σχ. 2.5), έχει ελάχιστο στο $x=0$, αλλά η συνάρτηση δεν είναι συνεχής εκεί, επομένως δεν είναι και διαφορίσιμη (η συνέχεια είναι αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για τη διαφορισιμότητα). Η μελέτη της εύρεσης ακρότατων για μη λείες (μη διαφορίσιμες) συναρτήσεις αποτελεί ένα νέο μαθηματικό πεδίο που καλείται **μη λεία βελτιστοποίηση**.



Σχήμα 2.5

Παράδειγμα 2.1. Να βρεθούν τα ακρότατα και η φύση τους για την συνάρτηση,

$$f(x,y) = 3x^3 - 5y^2 - 225x + 70y + 23$$

Λύση: Από την (2.9) τα ακρότατα δίνονται λύνοντας τις,

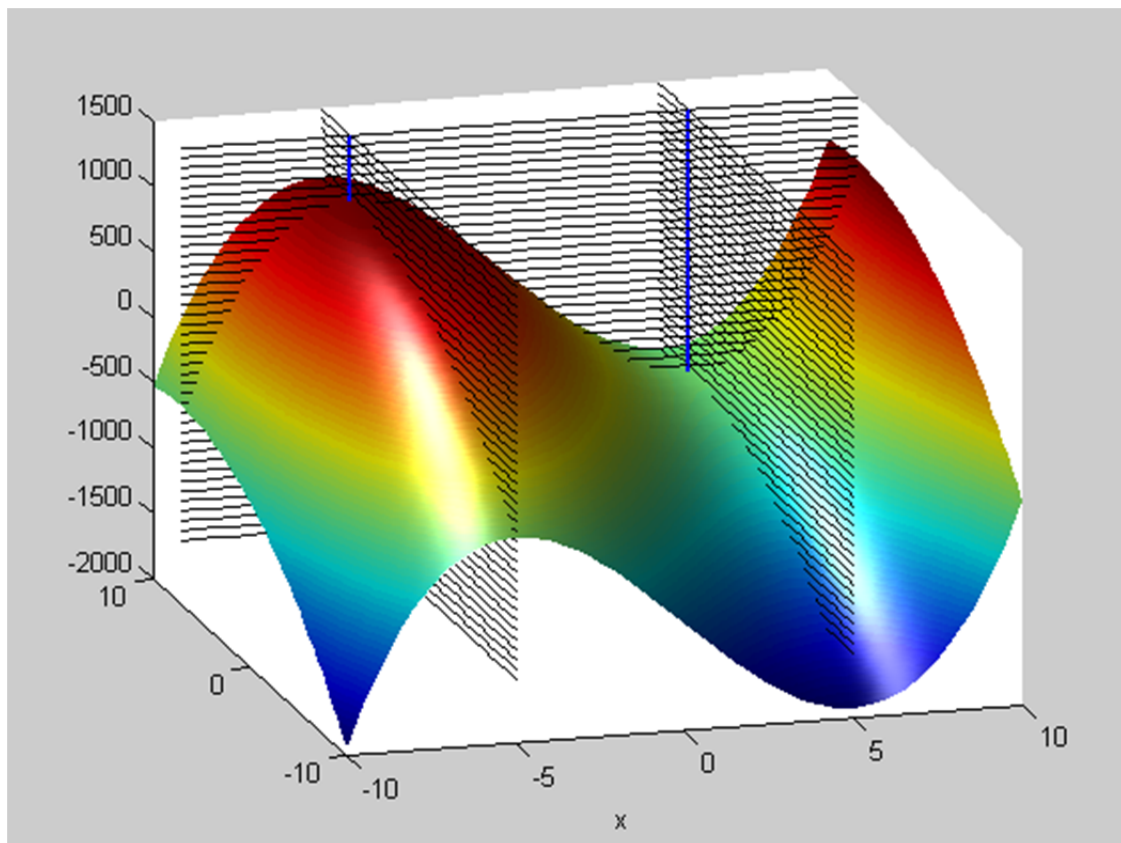
$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 9x^2 - 225 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = -10y + 70 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x = \pm 5, y = 7$$

Ο πίνακας Hessian (2.5) είναι,

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18x & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}|_{(x=5, y=7)} = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}|_{(x=-5, y=7)} = \begin{bmatrix} -90 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του πρώτου πίνακα είναι (90, -10) δηλαδή είναι αόριστος, ενώ του δεύτερου (-90, -10) δηλαδή είναι αρνητικά ορισμένος. Επομένως για $(x=5, y=7)$ έχουμε σημείο σέλλας ενώ για $(x=-5, y=7)$ μέγιστο. Στο Σχήμα 2.6 φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τα αντίστοιχα ακρότατα (στα σημεία τομής των κυανών ευθειών με την επιφάνεια).



Σχήμα 2.6 Γράφημα της $f(x,y)=3x^3-5y^2-225x+70y+23$ με εμφανή τα ακρότατα.

2.2.3 Ακρότατα με περιορισμούς ισοτήτων

Έστω μία συνάρτηση $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους και οι περιορισμοί $\mathbf{g}(\mathbf{q})=\mathbf{0}$, $\mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Το πρόβλημα είναι να βρεθούν τα ακρότατα της f υπό τους περιορισμούς \mathbf{g} .

Όπως θα πράξουμε πολλές φορές στη συνέχεια, θα μετατρέψουμε το πρόβλημα αυτό σε κάποιο που ξέρουμε να λύνουμε: στο πρόβλημα χωρίς περιορισμούς. Αυτό επιτυγχάνεται με την χρήση των πολλαπλασιαστών Lagrange.

Ορίζοντας την Λαγκρανζιανή (κατ' άλλους Χαμιλτονιανή) L ως,

$$L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})=f(\mathbf{q})+\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{g}(\mathbf{q}) \quad (2.11)$$

όπου το διάνυσμα $\boldsymbol{\lambda}$ καλείται **πολλαπλασιαστής Lagrange**, και βρίσκοντας τα ακρότατά της, έχουμε επιτύχει τον στόχο μας. Αυτό φαίνεται εύκολα αν εφαρμόσουμε το Θεμελιώδες Θεώρημα στην (2.11),

$$\frac{\partial L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})} = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{q}} \boldsymbol{\lambda}^T = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (2.12)$$

Η δεύτερη προϋπόθεση εξασφαλίζει την ικανοποίηση των αρχικών περιορισμών ισοτήτων.

Είναι χρήσιμο να έχουμε μία ποιοτική εικόνα των πολλαπλασιαστών Lagrange. Αν και η ακριβής σημασία εξαρτάται από το συγκεκριμένο πρόβλημα, εν τούτοις η σχέση,

$$\frac{\partial L^*}{\partial \mathbf{g}} = -\boldsymbol{\lambda}$$

μας δείχνει ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange ερμηνεύονται σαν την αλλαγή στη βέλτιστη τιμή που επιφέρει μία αλλαγή στους περιορισμούς.

Οι εξισώσεις (2.12) αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ελαχίστου υπό περιορισμούς ισοτήτων. Για να βρούμε και τις ικανές χρησιμοποιούμε την αντίστοιχη συνθήκη δευτέρας τάξης (2.10) (πρόσημο του πίνακα Hessian) στη Λαγκρανζιανή,

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 L(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})}{\partial(\mathbf{q}, \boldsymbol{\lambda})^2} < \mathbf{0}$$

Παράδειγμα 2.2 Να βρεθούν τα ακρότατα της,

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}^T \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

υπό τον περιορισμό $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = x_1 - 3$.

Λύση: Σύμφωνα με την (2.12), οι αναγκαίες συνθήκες είναι,

$$\begin{array}{l} x_1 - 3 = 0 \\ x_1 + x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + 2x_2 + 1 = 0 \end{array}$$

Η λύση είναι $\mathbf{x}^* = [3 \quad -2]$, $\lambda^* = -1$.

2.2.4 Ακρότατα με περιορισμούς ανισοτήτων

Εδώ το πρόβλημα ορίζεται ως εξής:

Να βρεθούν τα ακρότατα της $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχείς πρώτες μερικές παραγώγους υπό τους περιορισμούς,

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(\mathbf{q}) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m_e} \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}) &\leq \mathbf{0}, \quad \mathbf{g}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{m-m_e+1} \end{aligned}$$

Προφανώς το πρόβλημα αυτό περιλαμβάνει, σαν υποπεριπτώσεις τα προηγούμενα.

Δεν είναι εφικτό στην γενική περίπτωση να μετατρέψουμε τις ανισότητες σε ισότητες, και έτσι να ανάγουμε το πρόβλημα σε κάτι γνωστό. Σε ειδικές περιπτώσεις αυτό όμως είναι εφικτό, με τη χρήση κατάλληλου μετασχηματισμού.

Αναγκαίες συνθήκες στο ακρότατο, επιπλέον των περιορισμών \mathbf{h} , \mathbf{g} , συνιστούν οι εξισώσεις Kuhn-Tucker (ή Karush- Kuhn-Tucker, KKT¹):

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{q}^*) + \sum_{i=1}^{m_e} \lambda_i^* \cdot \nabla \mathbf{h}(\mathbf{q}^*) + \sum_{i=m_e+1}^m \lambda_i^* \cdot \nabla \mathbf{g}(\mathbf{q}^*) &= \mathbf{0} \\ \lambda_i^* \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{h}(\mathbf{q}^*) \\ \mathbf{g}(\mathbf{q}^*) \end{bmatrix} &= \mathbf{0}, \quad i=1, \dots, m \\ \lambda_i^* &\geq \mathbf{0}, \quad i=m_e+1, \dots, m \end{aligned}$$

Αν οι \mathbf{h} , \mathbf{g} είναι κυρτές συναρτήσεις οι παραπάνω εξισώσεις είναι και ικανές συνθήκες.

2.3 Λύση γραμμικών συστημάτων

Έστω το γραμμικό, μη ομογενές, χρονικά μεταβαλλόμενο σύστημα ,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

¹ Η εναλλακτική ονομασία οφείλεται στην αδημοσίευτη μεταπτυχιακή διατριβή του Karush (1936) που περιγράφεται περιληπτικά στους Kuhn-Tucker.

Η λύση του είναι,

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (2.13)$$

όπου ο πίνακας $\Phi(t, t_0)$ καλείται **πίνακας μετάβασης**. Η εύρεση του, για χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, απαιτεί την επίλυση, με μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης, της διαφορικής εξίσωσης πινάκων,

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$$

Αν το σύστημα είναι χρονικά αμετάβλητο, τα πράγματα απλοποιούνται και ο πίνακας μετάβασης μπορεί να βρεθεί με διάφορους τρόπους, ένας εκ των οποίων είναι μέσω της εκτίμησης, με μεθόδους αριθμητικής ανάλυσης, της σχέσης,

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!}\mathbf{A}^2t^2 + \dots + \frac{1}{k!}\mathbf{A}^k t^k + \dots$$

2.4 Λογισμός μεταβολών

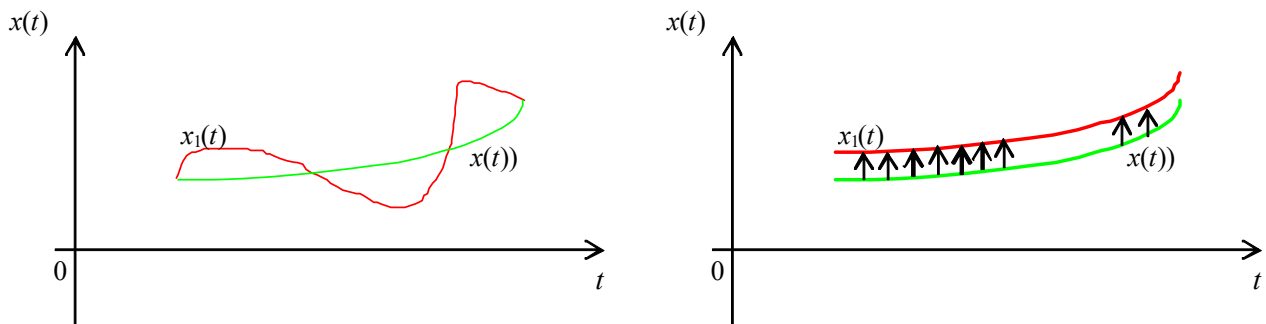
Επειδή όπως προαναφέρθηκε ο λογισμός των μεταβολών συσχετίζεται αρκετά καλά με τον πιο οικείο κλασσικό λογισμό συναρτήσεων, οι γενικές έννοιες θα παρουσιαστούν παράλληλα.

Κλασσικός λογισμός	Λογισμός μεταβολών
Συνάρτηση	Ένα συναρτησιακό $J[\mathbf{x}(t)]$ είναι ένας κανόνας αντιστοίχισης, που αντιστοιχεί σε κάθε συνάρτηση $\mathbf{x}(t) \in \Omega$ ένα πραγματικό αριθμό.
Νόρμα, εγγύτητα.	<p>Η νόρμα $\ \mathbf{x}(t)\$ μίας συνάρτησης $\mathbf{x}(t)$ είναι μία συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε $\mathbf{x}(t) \in \Omega \cdot t \in [t_0, t_f]$ ένα πραγματικό αριθμό και που έχει τις παρακάτω ιδιότητες:</p> <ol style="list-style-type: none"> $\ \mathbf{x}(t)\ \geq 0$ και $\ \mathbf{x}(t)\ = 0$ ανν $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0} \forall t \in [t_0, t_f]$ $\ \alpha\mathbf{x}(t)\ = \alpha \ \mathbf{x}(t)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. $\ \mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{x}^{(2)}(t)\ \leq \ \mathbf{x}^{(1)}(t)\ + \ \mathbf{x}^{(2)}(t)\$ <p>Η νόρμα της διαφοράς δύο συναρτήσεων είναι ένα μέτρο της εγγύ-</p>

	<i>γύτητας</i> των συναρτήσεων.
<i>Αύξηση.</i>	<p>Η <i>αύξηση</i> ΔJ ενός συναρτησιακού $J[\mathbf{x}(t)]$ ορίζεται σαν,</p> $\Delta J[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] = J[\mathbf{x}(t) + \delta \mathbf{x}(t)] - J(\mathbf{x}(t))$ <p>όπου $\delta \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_1(t)$ είναι η αύξηση (δηλαδή η διαφορά μεταξύ δύο συναρτήσεων) της συνάρτησης $\mathbf{x}(t)$ * .</p>
<i>Διαφορισιμότητα, διαφορικό, παράγωγος.</i>	<p>Η αύξηση ενός συναρτησιακού μπορεί να γραφεί σαν,</p> $\Delta J[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] = \delta J[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] + g[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)] \cdot \ \delta \mathbf{x}(t)\ $ <p>όπου το δJ είναι γραμμική συνάρτηση της $\delta \mathbf{x}(t)$. Αν,</p> $\lim_{\ \delta \mathbf{x}(t)\ \rightarrow 0} \frac{g[\mathbf{x}(t), \delta \mathbf{x}(t)]}{\ \delta \mathbf{x}(t)\ } = 0$ <p>τότε το J είναι <i>διαφορίσιμο</i> στο \mathbf{x} και το δJ είναι η <i>μεταβολή</i> του J για τη συνάρτηση \mathbf{x}.</p> <p>Κατ' αναλογία, η μεταβολή δJ είναι η γραμμική προσέγγιση της διαφοράς στο J όταν υπολογίζεται σε δύο συναρτήσεις. Αν οι συναρτήσεις είναι «κοντά» ($\ \delta \mathbf{x}(t)\$ μικρό) τότε η μεταβολή προσεγγίζει την αύξηση ΔJ καλά.</p>
<i>Σχετικό ακρότατο, σχετικό ελάχιστο, σχετικό μέγιστο.</i>	<p>Ένα συναρτησιακό $J[\mathbf{x}(t)]$ έχει <i>σχετικό ακρότατο</i> στο σημείο $\mathbf{x}^*(t)$, αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο που για όλες τις συναρτήσεις $\ \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}^*(t)\ < \varepsilon$ η αύξηση του J έχει το ίδιο πρόσημο. Αν,</p> $\Delta J = J[\mathbf{x}(t)] - J[\mathbf{x}^*(t)] \geq 0$ <p>το $J[\mathbf{x}^*(t)]$ είναι <i>σχετικό ελάχιστο</i>, αλλιώς αν,</p> $\Delta J = J[\mathbf{x}(t)] - J[\mathbf{x}^*(t)] \leq 0$ <p>το $J[\mathbf{x}^*(t)]$ είναι <i>σχετικό μέγιστο</i>.</p>
Θεμελιώδες Θεώρημα ακρότατων συναρτήσεων.	<p>Θεμελιώδες Θεώρημα ακρότατων συναρτησιακών: Αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη ακρότατου (χωρίς περιορισμό στην $\mathbf{x}(t)$) είναι ο μηδενισμός της μεταβολής:</p> $\delta J[\mathbf{x}^*(t), \delta \mathbf{x}(t)] = 0$

για όλες τις αποδεκτές $x(t)$. (Απόδειξη στον Kirk (1970)).

* Η έννοια της αύξησης συναρτήσεως $\delta x(t)$ χρήζει επιπλέον διευκρίνισης καθώς δεν είναι τόσο προφανής όσο η αντίστοιχη της συνάρτησης. Στο Σχ. 2.7 δίνονται δύο παραδείγματα για τη καλύτερη κατανόηση της. Στα παραδείγματα αυτά οι γειτονικές συναρτήσεις $x_1(t)$ πρέπει να ανήκουν στο σύνολο που ανήκει και η $x(t)$, π.χ. αν η $x(t)$ είναι συνεχής, πρέπει και η $x_1(t)$ να είναι συνεχής. Επίσης $\| \delta x(t) \| < \epsilon$.



Σχήμα 2.7 Παραδείγματα γειτονικών συναρτήσεων

© Α. Πουλιέζος

Παράδειγμα 2.3 Μία κατάλληλη νόρμα για συνεχείς, βαθμωτές συναρτήσεις x της μεταβλητής $t \in [t_0, t_f]$, είναι η,

$$\| x(t) \|_{\infty} = \max_{t_0 < t < t_f} |x(t)|$$

3 Ακρότατα συναρτησιακών

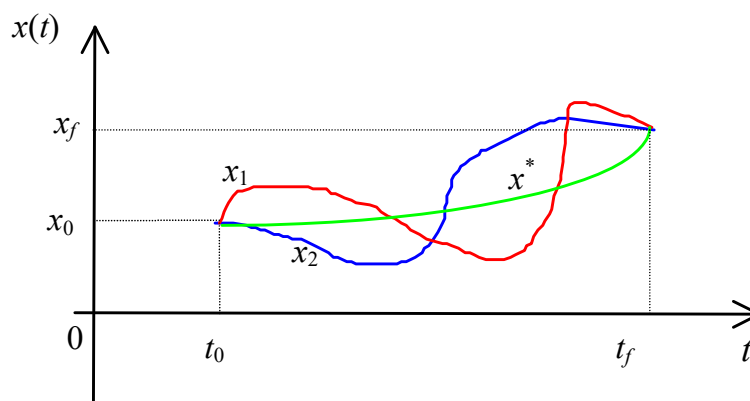
3.1 Ακρότατα συναρτησιακών βαθμωτών συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς.

Η επίλυση του αρχικού προβλήματος θα γίνει σταδιακά. Κατ' αρχήν θα βρεθούν τα ακρότατα συναρτησιακών μίας βαθμωτής συνάρτησης χωρίς περιορισμούς. Στη συνέχεια τα αποτελέσματα θα γενικευθούν για διανυσματικές συναρτήσεις. Κατόπιν θα επιλυθεί το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου χωρίς περιορισμό στο διάνυσμα ελέγχου και τέλος θα αντιμετωπισθεί το γενικότερο πρόβλημα.

Πρόβλημα 1. Έστω $x(t)$ μία βαθμωτή συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $x^*(t)$ για την οποία το συναρτησιακό,

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \quad (3.1)$$

έχει σχετικό ακρότατο. Να σημειωθεί ότι το γράμμα J σημαίνει δεσμευτικά συναρτησιακό ενώ η $g(., ., .)$ είναι συνάρτηση (με συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές της). Επειδή συνήθως υπάρχει παρεξήγηση, στο συναρτησιακό θα χρησιμοποιούνται αγκύλες $[]$, ενώ στη συνάρτηση παρενθέσεις $()$. Τα $t_0, t_f, x(t_0) = x_0, x(t_f) = x_f$ είναι δεδομένα. Στο Σχ. 3.1 φαίνονται μία συνάρτηση ακρότατου $x^*(t)$ και δύο αποδεκτές συναρτήσεις σύγκρισης $x_1(t), x_2(t)$.



Σχήμα 3.1

Η προσπάθεια ξεκινάει από το θεμελιώδες θεώρημα. Η αύξηση $\Delta J [x^*(t), \delta x(t)]$ είναι,

$$\begin{aligned}
\Delta J[x^*(t), \delta x(t)] &= J[x^*(t) + \delta x(t)] - J[x^*(t)] \\
&= \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \\
&= \int_{t_0}^{t_f} \{g(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\} dt
\end{aligned}$$

Στόχος είναι να εκφρασθεί η ΔJ συναρτήσει των x, \dot{x} και δx . Αναπτύσσοντας τον ολοκληρωτή κατά Taylor βάσει της (2.3) γύρω από το σημείο (x, \dot{x}) δίνει:

$$\Delta J[x^*(t), \delta x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] \delta x(t) + \\ &+ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta \dot{x}(t) + o(\delta x(t), \delta \dot{x}(t)) \end{aligned} \right\} dt$$

Αν στην παραπάνω έκφραση² κρατήσουμε τους όρους πρώτης τάξης (γραμμικούς), λαμβάνουμε την μεταβολή,

$$\delta J[x^*(t), \delta x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt$$

Οι μεταβολές $\delta x(t)$ και $\delta \dot{x}(t)$ σχετίζονται μέσω του τύπου,

$$\delta x(t) = \int_{t_0}^t \delta \dot{x}(t) dt + \delta x(t_0)$$

Αυτό σημαίνει ότι προσδιορίζοντας το $\delta x(t)$, προσδιορίζουμε με μοναδικό τρόπο και το $\delta \dot{x}(t)$. Έστω $\delta x(t)$ η ανεξάρτητα μεταβαλλόμενη συνάρτηση. Ο όρος που περιέχει το $\delta \dot{x}(t)$ αναλύεται μέσω του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη, σαν,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt = \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t) \Big|_{t_0}^{t_f} - \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \right\} \delta x(t) dt$$

Επειδή τα $x(t_0), x(t_f)$ είναι δεδομένα, όλες οι αποδεκτές συναρτήσεις πρέπει να περνούν από τα σημεία αυτά και επομένως $\delta x(t_0) = 0, \delta x(t_f) = 0$. Έτσι,

² Ο όρος $o(\delta x(t), \delta \dot{x}(t))$ σημαίνει ότι είναι υψηλότερας τάξης από πρώτης (αφού οι $\delta x(t), \delta \dot{x}(t)$ είναι γραμμικοί).

$$\delta J[x^*(t), \delta x(t)] = 0 = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \right\} \delta x(t) dt \quad (3.2)$$

Για να προχωρήσουμε χρειαζόμαστε το:

Θεμελιώδες λήμμα του λογισμού των μεταβολών. Αν μία συνάρτηση $h(t)$ είναι συνεχής και,

$$\int_{t_0}^{t_f} h(t) \delta x(t) dt = 0 \quad (3.3)$$

για κάθε συνάρτηση δx που είναι συνεχής στο διάστημα $[t_0, t_f]$, τότε η $h(t)$ είναι μηδέν παντού στο διάστημα $[t_0, t_f]$. (Απόδειξη στους Gelfand και Fomin (1963)).

Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδες Λήμμα στην συνθήκη (3.2), δίνει την λύση:

Πρόβλημα 1: Δεδομένα $t_f, x(t_f)$

Αναγκαία συνθήκη για να είναι η $x^*(t)$ σχετικό ακρότατο του,

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] = 0; \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.4)$$

Η εξίσωση Euler-Lagrange είναι μία **συνήθης, μη γραμμική, χρονικά μεταβαλλόμενη διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης**. Οι ιδιότητες αυτές καθιστούν την αναλυτική λύση της σχεδόν αδύνατη, παρά μόνο σε ειδικές περιπτώσεις που μειώνεται σε πρώτη τάξης. Η επίλυση της με αριθμητικές μεθόδους απαιτεί την λύση ενός **μη γραμμικού, συνοριακού προβλήματος δύο σημείων**, ένα εξίσου δύσκολο πρόβλημα (οι αρχικές συνθήκες δεν δίνονται στον αρχικό χρόνο t_0 για την συνάρτηση και την πρώτη παράγωγο της).

Πρέπει επίσης να τονισθεί ότι η εξίσωση Euler είναι αναγκαία συνθήκη. Για να εξακριβωθεί αν η συνάρτηση $x^*(t)$ μεγιστοποιεί ή ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό απαιτείται περαιτέρω έρευνα (υπάρχει και η, με μικρή πιθανότητα, περίπτωση του σαγματικού τύπου). Ο πιο απλός τρόπος για την εξακρίβωση είναι η εξέταση γειτονικών συναρτήσεων και οι τιμές του J στις συναρτήσεις αυτές. Αν οι τιμές είναι μεγαλύτε-

ρες του $J[x^*(t)]$ τότε η $x^*(t)$ ελαχιστοποιεί, αλλιώς μεγιστοποιεί.

3.1.1 Ειδικές μορφές της εξίσωσης Euler-Lagrange

Επειδή η λύση της εξίσωσης Euler-Lagrange θα αποδειχθεί απαραίτητη σε κάθε πρόβλημα βελτιστοποίησης, είναι χρήσιμο να δούμε κάποιες ειδικές μορφές που προκύπτουν από την ειδική μορφή της g .

(α) Η g δεν εξαρτάται από το t (αλλά μόνον από τις $x(t)$, $\dot{x}(t)$).

Σ' αυτή τη περίπτωση,

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x}} \right] =$$

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial x} - \left[\frac{\partial^2 g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x} \partial x} \right] \dot{x}^*(t) - \left[\frac{\partial^2 g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x}^2} \right] \ddot{x}^*(t)$$

Πολλαπλασιάζοντας τη τελευταία έκφραση με $\dot{x}^*(t)$, τη καθιστά παράγωγο της,

$$\frac{d}{dt} \left[g(x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \dot{x}^*(t) \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x}} \right]$$

που σημαίνει,

$$g(x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \dot{x}^*(t) \frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t))}{\partial \dot{x}} = c_1 \quad (3.5)$$

Παράδειγμα 3.1 Πρόβλημα βραχιστόχρονου (brachistochrone problem)

Το κλασσικό αυτό πρόβλημα τέθηκε από τον Johann Bernoulli το 1696 και λύθηκε από τον ίδιο και άλλους επιφανείς μαθηματικούς της εποχής του.



Σχήμα 3.2 Βραχιστόχρονο γλυπτό του Henk Ovink στο χώρο του Πανεπιστημίου του Groningen στη μνήμη του Johann Bernoulli

Έχει ως εξής: ένα σωματίδιο κινείται πάνω σ' ένα σύρμα υπό την επίδραση της βαρύτητας χωρίς τριβές. Οι άκρες του σύρματος είναι στερεωμένες στα σημεία A, B . Ποιο είναι το σχήμα του σύρματος που ελαχιστοποιεί τον χρόνο κατάβασης;

Έστω $A=(0, 0)$, $B=(x_B, y_B)$, με το y θετικό προς τα κάτω. Η ταχύτητα του σωματιδίου δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2gy}$$

επομένως ο χρόνος κατάβασης είναι,

$$t[y(x)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y(x_B)=y_B} \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y(x)}} dx \quad (3.6)$$

Η έκφραση αυτή είναι ένα συναρτησιακό με δεδομένη την τελική θέση και χρόνο (στην περίπτωση αυτή x_B, y_B). Μπορεί λοιπόν να ταυτοποιηθεί ως Πρόβλημα τύπου 1, και επομένως η εξίσωση Euler-Lagrange,

$$\frac{\partial g(y^*(x), \dot{y}^*(x), x)}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left[\frac{\partial g(y^*(x), \dot{y}^*(x), x)}{\partial \dot{y}} \right] = 0$$

θα μας οδηγήσει στην λύση. Αντικαθιστώντας λοιπόν την,

$$g\left(y(x), \frac{dy(x)}{dx}, x\right) = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}}{\sqrt{y(x)}} g\left(y(x), \frac{dy(x)}{dx}\right)$$

στην Euler-Lagrange, δίνει,

$$-\frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}}{2y(x)\sqrt{y(x)}} - \frac{d}{dx} \left\{ \frac{1}{\sqrt{y(x)}} \frac{dy(x)}{dx} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy(x)}{dx}\right)^2}} \right\} = 0 \quad (3.7)$$

Ας ξαναγράψουμε την (3.7) πιο συμπαγώς,

$$\frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{2y\sqrt{y}} + \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\dot{y}}{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} \right\} = 0 \quad (3.8)$$

και ας κάνουμε τις πράξεις:

$$\frac{\sqrt{1 + \dot{y}^2}}{2y\sqrt{y}} - \frac{\dot{y}^2}{2y\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2}} + \frac{\ddot{y}}{\sqrt{y}\sqrt{1 + \dot{y}^2}} - \frac{\dot{y}^2 \ddot{y}}{(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{y}} = 0 \quad (3.9)$$

Πολλαπλασιάζοντας με $2y(1 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}} \sqrt{y}$ και απλοποιώντας, δίνει,

$$1 + \dot{y}^2 + 2y\ddot{y} = 0 \quad (3.10)$$

που είναι η διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί η λύση.

Για να τη λύσουμε πολλαπλασιάζουμε με \dot{y} , την αναδιατάσσουμε και ολοκληρώνουμε,

$$\int \frac{2y\ddot{y}}{1 + \dot{y}^2} = -\int \frac{\dot{y}}{y} \Rightarrow \ln(1 + \dot{y}^2) = -\ln y + c \Rightarrow y(1 + \dot{y}^2) = e^c = c_1 \quad (3.11)$$

Στην (3.11) μπορούσαμε να καταλήξουμε απευθείας και από την (3.5), αφού η g δεν

είναι συνάρτηση του x , αλλά η (3.10) παραλληλίζεται με την λύση που έδωσε ο ίδιος ο Bernoulli, καθιστώντας ευκολότερη τη σύγκριση μεταξύ των δύο προσεγγίσεων.

Η (3.11) γράφεται,

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{c_1 - y}{y}} \Rightarrow \frac{\sqrt{y} dy}{\sqrt{c_1 - y}} = \pm dx \quad (3.12)$$

Θέτοντας $y = c_1(\eta\mu\varphi/2)^2$, τότε $dy = c_1\eta\mu\varphi/2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi/2 d\varphi$, και η (3.12) γίνεται,

$$c_1(\eta\mu\varphi/2)^2 d\varphi = \pm dx \quad (3.13)$$

Επειδή $(\eta\mu\varphi/2)^2 = (1 - \sigma\upsilon\nu\varphi)/2$, ολοκληρώνοντας την (3.13) δίνει,

$$c_1(\varphi - \eta\mu\varphi) = \pm(2x + c_2) \Rightarrow x = \pm \frac{c_1}{2}(\varphi - \eta\mu\varphi) \pm \frac{c_2}{2}$$

Η λύση δηλαδή είναι, σε παραμετρική μορφή,

$$y = \frac{c_1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi), \quad x = \pm \frac{c_1}{2}(\varphi - \eta\mu\varphi) \pm \frac{c_2}{2} \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \quad (3.14)$$

Το c_2 είναι μηδέν αφού $x = 0$ για $y = 0$ (όταν $\varphi = 0$).

Οι παραμετροποιημένες, ως προς φ , εξισώσεις αυτές αναπαριστούν **κυκλοειδή**, δηλαδή καμπύλες που χαράσσονται από το σημείο ενός κύκλου που κυλιέται επί ευθείας γραμμής. Η σταθερά c_1 είναι η διάμετρος του κύκλου, και βρίσκεται από την τελική συνθήκη, δηλαδή από το ότι το κυκλοειδές πρέπει να περνάει από το σημείο $(x(t_1), y(t_1))$. Έτσι,

$$y_B = \frac{c_1}{2}(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi_B), \quad x_B = \pm \frac{c_1}{2}(\varphi_B - \eta\mu\varphi_B), \quad 0 \leq \varphi_B \leq 2\pi \quad (3.15)$$

Από τη πρώτη των (3.15),

$$\frac{2y_B}{(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi_B)} = c_1$$

οπότε το σύστημα καταλήγει στην,

$$x_B(1 - \sigma\upsilon\nu\varphi_B) - y_B(\varphi_B - \eta\mu\varphi_B) = 0$$

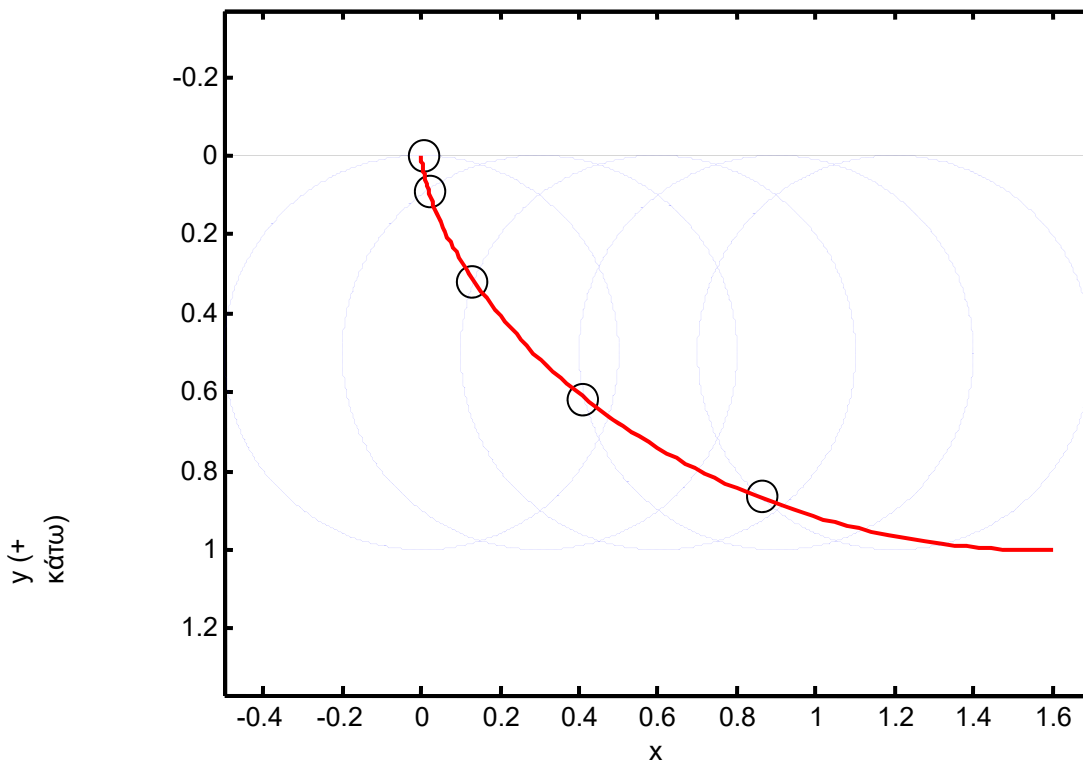
Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό ως προς φ_B και λύνεται με αριθμητικές μεθόδους (π.χ. **fzero** στη MATLAB).

Έχοντας βρει τα c_1, φ_B , ο χρόνος κατάβασης υπολογίζεται από την (3.6), ως,

$$t[y(x_B)] = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{y(x_B)=y_B} \frac{\sqrt{1+\dot{y}^2}}{\sqrt{y}} dx = \frac{2y_B}{\sqrt{2gy_B}} \frac{\varphi_B/2}{\eta\mu(\varphi_B/2)} = \sqrt{\frac{2c_1}{g}} (\varphi_B/2) \quad (3.16)$$

Στο Σχ. 3.3 φαίνεται η λύση του προβλήματος όταν $(x_1, y_1) = (\pi/2, 1)$.

Βραχιστόχρονη καμπύλη από το (0, 0) στο $(\pi/2, 1)$, $\varphi=1, t=0.70936$



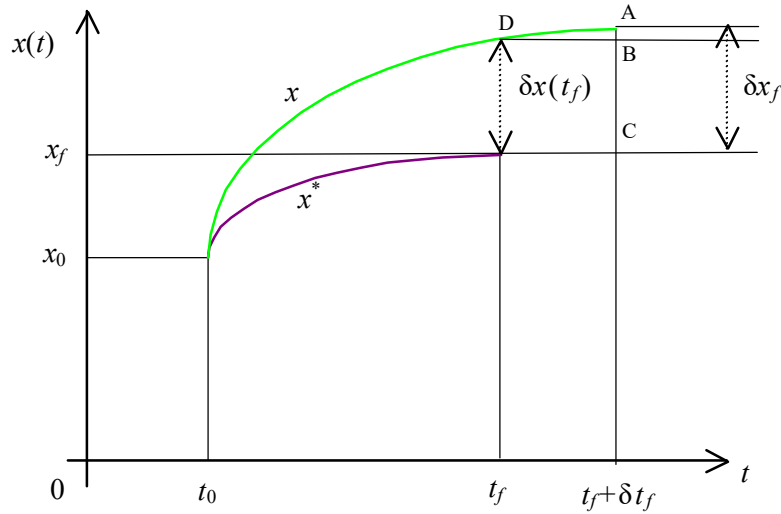
Σχήμα 3.3 Βραχιστόχρονη καμπύλη με τον παράγοντα κύκλο

Πρόβλημα 2. Έστω $x(t)$ μία βαθμωτή συνάρτηση με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $x^*(t)$ για την οποία το συναρτησιακό,

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

έχει σχετικό ακρότατο. Τα $t_0, x(t_0) = x_0$ είναι δεδομένα, ενώ τα $t_f, x(t_f) = x_f$ ελεύθερα. Το πρόβλημα αυτό είναι το γενικότερο που μπορεί να τεθεί και περιλαμβάνει το

Πρόβλημα 1 σαν ειδική περίπτωση.



Σχήμα 3.4

Στο Σχ. 3.4 φαίνεται μία συνάρτηση ακρότατου $x^*(t)$ και μία αποδεκτή συνάρτηση σύγκρισης $x(t)$. Ο στόχος είναι, όπως και πρώτα, να βρούμε την μεταβολή δJ σαν τον γραμμικό όρο της αύξησης ΔJ . Η αύξηση λοιπόν είναι:

$$\begin{aligned}
 \Delta J[x^*(t), \delta x(t)] &= J[x^*(t) + \delta x(t)] - J[x^*(t)] \\
 &= \int_{t_0}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt - \int_{t_0}^{t_f} g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} \{g(x(t), \dot{x}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\} dt + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_f} \{g(x^*(t) + \delta x(t), \dot{x}^*(t) + \delta \dot{x}(t), t) - g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)\} dt + \\
 &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt
 \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση προκύπτει γιατί η $x^*(t)$ δεν ορίζεται εκτός του διαστήματος $[t_0, t_f]$. Έτσι η $x(t)$ μπορεί να αναλυθεί σαν $\delta x(t) + x^*(t)$ μόνο σ' αυτό το διάστημα. Το πρώτο ολοκλήρωμα αναπτύσσεται σε σειρά Taylor όπως στο Πρόβλημα 1, δίνοντας για την αύξηση (κρατώντας μόνο γραμμικούς όρους),

$$\begin{aligned}
 \Delta J[x^*(t), \delta x(t)] &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] \delta x(t) + \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \delta \dot{x}(t) \right\} dt + \\
 &\quad + \int_{t_f}^{t_f + \delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Το δεύτερο ολοκλήρωμα γράφεται,

$$\int_{t_f}^{t_f+\delta t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt = [g(x(t_f), \dot{x}(t_f), t_f)] \delta t_f + o(\delta t_f)$$

χρησιμοποιώντας την τραπεζοειδή προσέγγιση για τα ολοκληρώματα. Ολοκληρώνοντας κατά μέρη τον όρο που περιέχει το $\delta \dot{x}(t)$ και αντικαθιστώντας τον γραμμικό όρο της (3.17), δίνει για τη μεταβολή,

$$\begin{aligned} \delta J[x^*(t), \delta x(t)] = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \right\} \delta x(t) dt + \\ & + \left[\frac{\partial g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x(t_f) + [g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)] \delta t_f \end{aligned} \quad (3.18)$$

Στη συνέχεια πρέπει να συσχετισθεί η $\delta x(t_f)$ με τα δt_f και δx_f . Από το Σχ. 3.3,

$$\begin{aligned} AC = AB + BC & \cong DA \times \varepsilon\phi \widehat{ADB} + BC \\ \therefore \delta x_f & \cong \delta x(t_f) + \dot{x}^*(t_f) \delta t_f \Rightarrow \delta x(t_f) \cong \delta x_f - \dot{x}^*(t_f) \delta t_f \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας στην (3.18), και ομαδοποιώντας τους κοινούς όρους, δίνει τελικά,

$$\begin{aligned} \delta J[x^*(t), \delta x(t)] = & \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] \right\} \delta x(t) dt + \\ & + \left[\frac{\partial g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x_f + \\ & + \left[g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{x}} \right] \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f \\ = & 0 \end{aligned}$$

Το άθροισμα των όρων πρέπει να είναι μηδέν. Τι σημαίνει αυτό για τον καθένα όρο χωριστά. Ας εξετάσουμε τον πρώτο όρο. Πρέπει ο όρος αυτός να είναι μηδέν; Η απάντηση είναι ναι, γιατί αν θεωρήσουμε ένα αντίστοιχο πρόβλημα με δεδομένα τα βέλτιστα x^* , t_f^* , δηλαδή ένα Πρόβλημα τύπου 1, θα καταλήξουμε στην αντίστοιχη εξίσωση Euler-Lagrange που ισοδυναμεί σε μηδενισμό του εν λόγω ολοκληρώματος. Επομένως η εξίσωση Euler-Lagrange πρέπει να ισχύει ανεξάρτητα από την φύση των συνοριακών συνθηκών. Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο ζευγάρι αναγκαίων συνθηκών για να είναι η συνάρτηση $x^*(t)$ ακρότατο:

Πρόβλημα 2: Ελεύθερα $t_f, x(t_f)$

Αναγκαίες συνθήκες για να είναι η $x^*(t)$ σχετικό ακρότατο του,

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

Εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(x^*(t), \dot{x}^*(t), t)}{\partial \dot{x}} \right] = 0; \quad \forall t \in [t_0, t_f].$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left[\frac{\partial g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{x}} \right] \delta x_f + \left[g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g(x^*(t_f), \dot{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{x}} \right] \dot{x}^*(t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Οι εξισώσεις των συνοριακών συνθηκών επιλύονται ανάλογα με την σχέση που δίδεται ανάμεσα στα t_f και $x(t_f)$. Αν είναι ασυσχέτιστα, οι όροι που τα πολλαπλασιάζουν πρέπει να μηδενίζονται. Αν συσχετίζονται, η δεδομένη σχέση χρησιμοποιείται για να απαλειφθεί ο ένας εκ των δύο όρων και να προκύψει μία εξίσωση ως προς τον άλλο. Περισσότερα στα παραδείγματα ή στον Kirk (1970).

3.2 Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων χωρίς περιορισμούς

Η επέκταση σε προβλήματα όπου η συνάρτηση $x(t)$ είναι διανυσματική, δηλαδή $x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]$, είναι σχετικά απλή υπόθεση. Το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής:

Πρόβλημα 3. Έστω $x(t)$ μία διανυσματική συνάρτηση όπου τα $x_i(t)$ είναι ανεξάρτητες συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $x^*(t)$ για την οποία το συναρτησιακό,

$$J[x(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

έχει σχετικό ακρότατο. Τα $t_0, x(t_0) = x_0$ είναι δεδομένα, ενώ τα $t_f, x(t_f) = x_f$ ελεύθερα.

Η λύση στο Πρόβλημα 3 ακολουθεί τα βήματα της λύσης του Προβλήματος 2 αντικαθιστώντας τις βαθμωτές συναρτήσεις με διανυσματικές (τυπογραφικά αυτό σημαίνει την χρήση έντονων (bold) χαρακτήρων αντί κανονικών). Έτσι δεν πρέπει να προκαλεί έκπληξη το αποτέλεσμα:

Πρόβλημα 3: Ελεύθερα $t_f, \mathbf{x}(t_f)$

Αναγκαίες συνθήκες για να είναι η $\mathbf{x}^*(t)$ σχετικό ακρότατο του,

$$J[\mathbf{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$$

Διανυσματική εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right] = 0; \quad \forall t \in [t_0, t_f]$$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left[\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Με λόγια, πρέπει να λυθεί ένα **σύστημα n εξισώσεων Euler-Lagrange με συνοριακές συνθήκες στα δύο άκρα**. Επιπλέον οι συνοριακές συνθήκες μπορεί να διαφοροποιούνται στα στοιχεία του $\mathbf{x}(t)$. Για παράδειγμα, μπορεί,

$$\mathbf{x}_i(t_f), i = 1, 2, \dots, r \text{ να δίδονται και } \mathbf{x}_j(t_f), j = r+1, \dots, n \text{ να είναι ελεύθερα.}$$

Ανάλογα με την φύση των συνοριακών συνθηκών διαμορφώνονται ανάλογα και οι μαθηματικές εξισώσεις που τις διέπουν.

3.3 Ακρότατα συναρτησιακών διανυσματικών συναρτήσεων με περιορισμούς διαφορικών εξισώσεων

Το πρόβλημα αυτό είναι πολύ σχετικό, όπως θα δούμε, με το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου που θέσαμε στην αρχή.

Πρόβλημα 4. Έστω $\mathbf{w}(t)$ μία διανυσματική συνάρτηση διάστασης $(n+m)$ όπου τα $w_i(t)$ είναι μη ανεξάρτητες συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες παραγώγους. Ζητείται να βρεθεί η συνάρτηση $\mathbf{w}^*(t)$ για την οποία το συναρτησιακό,

$$J[\mathbf{w}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) dt$$

έχει σχετικό ακρότατο δεδομένου ότι η $\mathbf{w}(t)$ ικανοποιεί το σύστημα των n διαφορικών εξισώσεων,

$$f_i(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.19)$$

Τα $t_0, \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0, t_f, \mathbf{w}(t_f) = \mathbf{w}_f$ είναι δεδομένα.

Αν η $\mathbf{w}_{(m+n) \times 1}(t)$ ιδωθεί σαν $[\mathbf{x}_{n \times 1}(t) \quad \vdots \quad u_{m \times 1}(t)]$ και οι περιορισμοί σαν την εξίσωση κατάστασης, τότε η ομοιότητα με το αρχικό μας πρόβλημα είναι προφανής.

Η λύση θα ακολουθήσει τα βήματα της λύσης του Προβλήματος 2, αλλά θα χρειαστούμε επιπλέον την τεχνική των πολλαπλασιαστών Lagrange, γνωστών από την χρήση τους στην βελτιστοποίηση συναρτήσεων υπό περιορισμούς.

Το πρώτο βήμα λοιπόν είναι ο σχηματισμός του **επαυξημένου συναρτησιακού** J_a ,

$$\begin{aligned} J_a[\mathbf{w}(t), \mathbf{p}(t)] &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) + \mathbf{p}^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) \right\} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_f} g_a(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), \mathbf{p}(t), t) dt \end{aligned}$$

Παρατηρούμε δύο πράγματα: πρώτον ότι οι πολλαπλασιαστές Lagrange είναι συναρτήσεις και όχι σταθερές όπως στα προβλήματα βελτιστοποίησης συναρτήσεων, και δεύτερον ότι $J_a = J$ αν ικανοποιούνται οι περιορισμοί. Ακολουθώντας παρόμοια, αλλά όχι ίδια, λογική καταλήγουμε στην λύση (δες Kirk (1970)),

Πρόβλημα 4: Δεδομένα t_f , $\mathbf{w}(t_f)$, $f_i(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) = 0, i = 1, 2, \dots, n$

Αναγκαίες συνθήκες για να είναι η $\mathbf{w}^*(t)$ σχετικό ακρότατο του,

$$J[\mathbf{w}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) dt$$

Διανυσματική εξίσωση Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial g_a(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), \mathbf{p}(t), t)}{\partial \mathbf{w}} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), \mathbf{p}(t), t)}{\partial \dot{\mathbf{w}}} \right] = 0; \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (3.20)$$

$$\text{όπου } g_a(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), t) + \mathbf{p}^T(t) f(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), t) \quad (3.21)$$

και ικανοποίηση περιορισμών:

$$f_i(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) = 0, i = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις απαρτίζουν ένα σύνολο $(2n+m)$ διαφορικών εξισώσεων δευτέρας τάξης που πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange, προκειμένου για πραγματικά προβλήματα έχουν φυσική σημασία. Για παράδειγμα στη κίνηση συστημάτων οι πολλαπλασιαστές μπορεί να ιδωθούν σαν εξωτερικές δυνάμεις οι οποίες έχουν την ίδια επίδραση στην κίνηση όπως οι περιορισμοί (δηλαδή με τις δυνάμεις και χωρίς περιορισμούς η κίνηση είναι όμοια).

Παράδειγμα 3.2 Το πρόβλημα της Διδούς (ισοπεριμετρικό πρόβλημα).

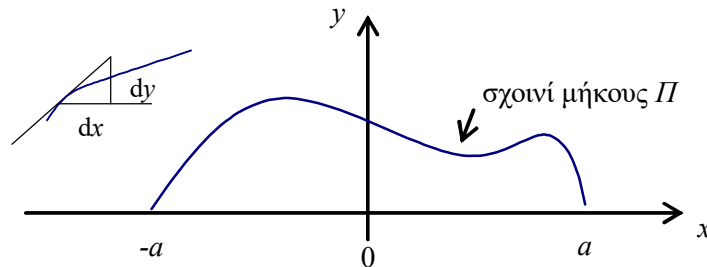
Ιστορικά: Η Διδώ ήταν πριγκίπισσα της Τύρου της Φοινίκης (83χμ. νότια της σημερινής Βυρηντού) γύρω στα 800 π.Χ. Μετά τη δολοφονία του συζύγου της από τον αδελφό της αναγκάστηκε να εγκαταλείψει τη χώρα της και μαζί με συνοδεία συμπολιτών της έφτασε στη Β. Αφρική (κοντά στη σημερινή Τύνιδα). Εκεί κατά τη παράδοση προσφέρει στους κατοίκους της συγκεκριμένη αμοιβή για μια φαινομενικά άδικη συναλλαγή: ν' αγοράσει τόση γη όση μπορεί να περικλείσει το δέρμα ενός ταύρου. Η συμφωνία επιτυγχάνεται και η Διδώ κόβει το δέρμα σε στενές λωρίδες, τις ενώνει και μ' αυτό περικλείει έκταση ικανή για να ιδρύσει τη Καρχηδόνα (Quart Hadasht: Νέα Πόλη). Το σχήμα της έκτασης είναι ένα ημικύκλιο με διάμετρο την ακτογραμμή. Η περιπέτεια της Διδούς περιγράφεται στην «Αινειάδα» του Βιργιλίου.

Το πρόβλημα που έλυσε εμπειρικά η Διδώ μπορεί να διατυπωθεί ως: «Να βρεθεί το σχήμα που φράζεται από μία ευθεία και έχει μέγιστο εμβαδόν για δοθείσα περίμετρο». Ο Ζηνόδορος (μαθηματικός-αστρονόμος του 2^{ου} π.Χ. αι.) πρώτος απέδειξε ότι η επιφάνεια του κύκλου είναι μεγαλύτερη από οποιοδήποτε πολυγώνου με την ίδια περίμετρο, αλλά η λύση αποδείχθηκε αυστηρά μόλις το 1841 από τον Steiner.

Το πρόβλημα μπορεί να τεθεί στο πλαίσιο της θεωρίας του λογισμού των μεταβολών ως εξής:

Δίνεται ένα κομμάτι σχοινί μήκους Π του οποίου δένουμε τις άκρες σε απόσταση

$2a < \Pi$ μεταξύ τους. Να βρεθεί το σχήμα του σχοινιού που περικλείει την μεγαλύτερη επιφάνεια μεταξύ του σχοινιού και της ευθείας που ενώνει τις άκρες του (Σχ. 3.5).



Σχήμα 3.5

Σε μαθηματικά: να βρεθεί η $y(x)$ που μεγιστοποιεί το εμβαδόν,

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} y(x) dx$$

υπό το περιορισμό της περιμέτρου,

$$\Pi = \int_{x=-a}^{x=a} \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} dx \tag{3.23}$$

και συνοριακές συνθήκες $y(-a) = y(a) = 0$ (σημείωση: $\dot{y}(x) = \frac{dy(x)}{dx}$!).

Για να τεθεί ο ολοκληρωματικός περιορισμός στη μορφή (3.19), εισάγεται νέα μεταβλητή,

$$\dot{y}_1(x) = \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} \Rightarrow y_1(x) = \int_{-a}^x \sqrt{1 + \dot{y}^2(s)} ds$$

με συνοριακές συνθήκες $y_1(-a) = 0, y_1(a) = \Pi$.

Μπορούν λοιπόν τώρα να εφαρμοσθούν οι (3.20)-(3.24) με,

$$g_a(w^*(x), \dot{w}^*(x), p(x), x) = y(x) + p(x) \left(\dot{y}_1(x) - \sqrt{1 + \dot{y}^2(x)} \right)$$

Η Euler-Lagrange (3.20) είναι,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_a}{\partial y} \\ \frac{\partial g_a}{\partial y_1} \\ \frac{\partial g_a}{\partial p} \end{bmatrix} - \frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_a}{\partial \dot{y}} \\ \frac{\partial g_a}{\partial \dot{y}_1} \\ \frac{\partial g_a}{\partial \dot{p}} \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 - \frac{d}{dx} \left[-\dot{y}p(1 + \dot{y}^2)^{-\frac{1}{2}} \right] + \dot{p}[\dots] \\ -\dot{p} \\ \dot{y}_1 - \sqrt{1 + \dot{y}^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

Από τη δεύτερη των (3.24) προκύπτει ότι $p=c_1$, ενώ ολοκληρώνοντας τη πρώτη (δεδομένου ότι $\dot{p}=0$),

$$\frac{c_1 \dot{y}}{\sqrt{1 + \dot{y}^2}} = x - c_2 \Rightarrow c_1 \dot{y} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} (x - c_2) \Rightarrow c_1^2 \dot{y}^2 = (1 + \dot{y}^2)(x - c_2)^2 \quad (3.25)$$

$$\Rightarrow \dot{y}^2 (c_1^2 - (x - c_2)^2) = (x - c_2)^2 \Rightarrow \dot{y} = \frac{\pm (x - c_2)}{\sqrt{c_1^2 - (x - c_2)^2}} \quad (3.26)$$

(η τρίτη των (3.24) είναι φυσικά οι περιορισμοί).

Ολοκληρώνοντας την 3.26 παίρνουμε,

$$y = \mp \sqrt{c_1^2 - (x - c_2)^2} + c_3 \Rightarrow (y - c_3)^2 + (x - c_2)^2 = c_1^2$$

που αναπαριστά κύκλο με κέντρο (c_3, c_2) και ακτίνα c_1 . Για να βρούμε τις τρεις αυτές σταθερές θα χρησιμοποιήσουμε τις συνοριακές συνθήκες και τον ισοπεριμετρικό περιορισμό:

$$y(-a) = 0 \Rightarrow c_3^2 + (-a - c_2)^2 = c_1^2 \quad (3.27)$$

$$y(a) = 0 \Rightarrow c_3^2 + (a - c_2)^2 = c_1^2 \quad (3.28)$$

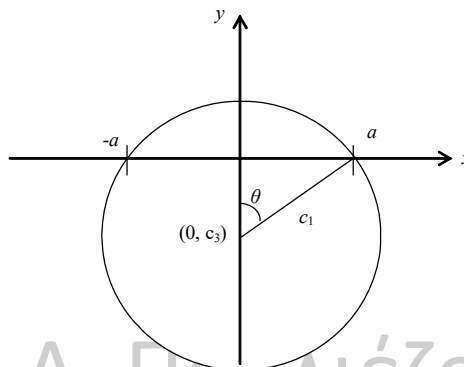
απ' όπου προκύπτει $c_2=0$, πράγμα που σημαίνει ότι το κέντρο του κύκλου βρίσκεται επί του άξονα των y (λογικό).

Από τις (3.25), (3.26) και (3.23):

$$\frac{c_1 \dot{y}}{x} = \sqrt{1 + \dot{y}^2} = \frac{c_1 x}{x \sqrt{c_1^2 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow \Pi = \int_{-a}^a \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{c_1}\right)^2}} dx = 2c_1 \text{τοξημ} \frac{a}{c_1}$$

Η τελευταία σχέση μπορεί να επαληθευθεί και γεωμετρικά βλέποντας το Σχ. 3.6.



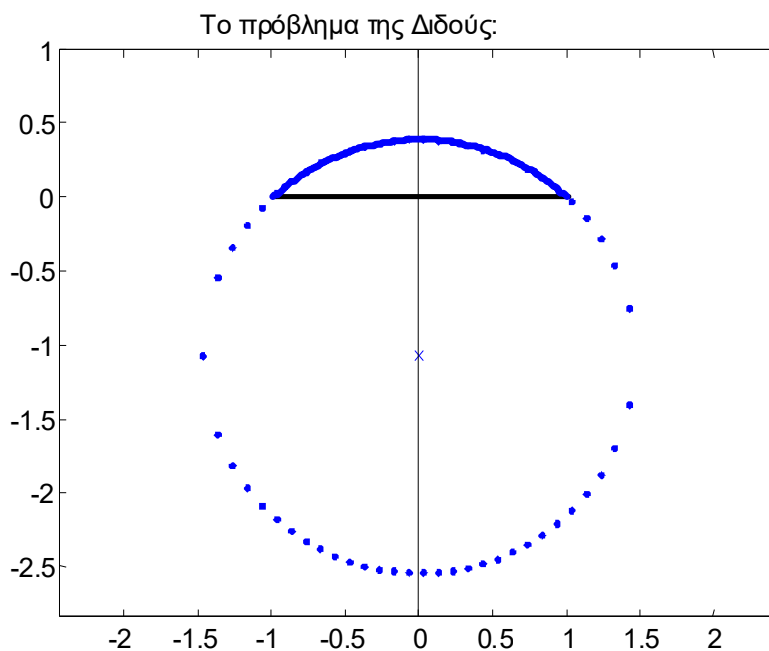
Σχήμα 3.6

Προφανώς το μήκος του τόξου $(-a, a)$ είναι $2 \times c_1 \times \theta$ (σε ακτίνια) $= 2c_1 \text{τοξημ}(a/c_1)$.

Η τελευταία αυτή εξίσωση πρέπει να λυθεί αριθμητικά ως προς c_1 και στη συνέχεια ν' αντικατασταθεί στη (3.27) για να βρεθεί το c_3 . Τέλος το εμβαδόν είναι,

$$E = \int_{x=-a}^{x=a} \left(\sqrt{c_1^2 - x^2} + c_3 \right) dx$$

Στο Σχ. 3.7 φαίνεται η λύση για $\Pi=2,2$, $a=1$. Οι αριθμητικές τιμές είναι $c_1=1,4687$, $c_3=-1,076$, $E=0,5399$.



Σχήμα 3.7

Θα μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα αν ήταν και το a ζητούμενο; Στη περίπτωση αυτή οι συνοριακές συνθήκες είναι $y(-x_f)=y(x_f)=0$ με το x_f άγνωστο, και πρέπει στις προηγούμενες εξισώσεις να προστεθεί μία ακόμα. Αυτό είναι ένα πρόβλημα που δεν έχουμε εξετάσει ακριβώς αφού δίνεται η αρχική και τελική θέση αλλά όχι οι χρόνοι (δηλαδή το x_f). Στη περίπτωση αυτή πρέπει να προσαρμόσουμε τις συνοριακές συνθήκες του Προβλήματος 3,

$$g_a(y^*(-x_f), \dot{y}^*(-x_f), -x_f) - \left[\frac{\partial g_a(y^*(-x_f), \dot{y}^*(-x_f), -x_f)}{\partial \dot{y}} \right]^T \dot{y}^*(-x_f) = 0$$

$$g_a(y^*(x_f), \dot{y}^*(x_f), x_f) - \left[\frac{\partial g_a(y^*(x_f), \dot{y}^*(x_f), x_f)}{\partial \dot{y}} \right]^T \dot{y}^*(x_f) = 0$$

Μία από τις παραπάνω αρκεί για την εύρεση του x_f .

4 Βέλτιστος έλεγχος αιτιοκρατικών συστημάτων

4.1 Βέλτιστος έλεγχος χωρίς φραγμό στο διάνυσμα ελέγχου

Είμαστε πλέον σε θέση να αντιμετωπίσουμε το αρχικό μας πρόβλημα, που εκφράζεται από τις (1.1)-(1.4):

Να βρεθεί ένας αποδεκτός έλεγχος $\mathbf{u}^*(t)$ που να αναγκάζει το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (1.2)$$

να ακολουθήσει μία αποδεκτή τροχιά $\mathbf{x}^*(t)$ που βελτιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης,

$$J[\mathbf{u}(t)] = l(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (1.4)$$

Υποθέτουμε ότι τα $t_0, \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ δίδονται και ότι η τελική κατάσταση κείται επί της κινούμενης επιφάνειας που περιγράφεται από την (διανυσματική) εξίσωση,

$$\mathbf{m}_{k \times 1}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = \mathbf{0} \quad (4.1)$$

Προς το παρόν οι περιοχές αποδεκτών ελέγχων και καταστάσεων δεν περιορίζονται.

Να σημειωθεί ότι οι συναρτήσεις l και \mathbf{m} παρότι φαίνονται όμοιες, χρησιμοποιούνται για να εκφράσουν διαφορετικές απαιτήσεις της σχεδίασης (περισσότερα στα παραδείγματα που θ' ακολουθήσουν).

Όπως είπαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο, τα μέχρι τώρα αποτελέσματα θα γενικευθούν στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Κατ' αρχήν, χρησιμοποιώντας πολλαπλασιαστές Lagrange επαναδιατυπώνουμε το πρόβλημα έτσι ώστε να απαλλαγούμε από τον περιορισμό (4.1). Έτσι η (1.4) γράφεται,

$$J[\mathbf{u}(t)] = l(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \mathbf{v}^T(t_f) \mathbf{m}(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4.2)$$

ή

$$J[\mathbf{u}(t)] = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (4.3)$$

Η (4.3) διαφέρει από τα προηγούμενα κατά τον όρο $h(\mathbf{x}(t_f), t_f)$. Αν μπορούσαμε να τον βάλουμε μέσα στο ολοκλήρωμα, θα είχαμε κάνει ένα μεγάλο βήμα προς την λύση. Λοιπόν,

$$\begin{aligned} h(\mathbf{x}(t_f), t_f) &= \int_{t_0}^{t_f} \frac{d}{dt} [h(\mathbf{x}(t), t)] dt + h(\mathbf{x}(t_0), t_0) = \\ &= \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \right\} dt + h(\mathbf{x}(t_0), t_0) \end{aligned} \quad (4.4)$$

χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσιδωτής παραγωγίσης στο h . Ο όρος $h(\mathbf{x}(t_0), t_0)$ είναι σταθερός αφού τα t_0 , \mathbf{x}_0 δίδονται, επομένως μπορεί να παραλειφθεί από την βελτιστοποίηση. Έτσι,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} \right\} dt \quad (4.5)$$

και καταφέραμε τον πρώτο στόχο μας. Οι περιορισμοί των διαφορικών εξισώσεων εισάγονται μέσω των πολλαπλασιαστών Lagrange,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} \left\{ g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] \right\} dt$$

Έστω η επαυξημένη συνάρτηση,

$$\begin{aligned} g_a(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) &= g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}(t) \\ &+ \frac{\partial h(\mathbf{x}(t), t)}{\partial t} + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) - \dot{\mathbf{x}}(t)] \end{aligned} \quad (4.6)$$

Τότε, εφαρμόζοντας την μέχρι τώρα θεωρία, η μεταβολή του J_a για βέλτιστο σύστημα είναι,

$$\begin{aligned}
\delta J_a[\mathbf{u}^*(t)] = 0 = & \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \\
& + \left[g_a(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) - \right. \\
& \left. - \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) \right] \delta t_f + \\
& + \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right]^T \right] \delta \mathbf{x}(t) + \\
& \left. \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \delta \mathbf{u}(t) + \left[\frac{\partial g_a(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{p}} \right]^T \delta \mathbf{p}(t) \right\} dt
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Δύσπεπτη έκφραση! Ας εξετάσουμε κατ' αρχήν τους όρους του ολοκληρώματος, και ειδικότερα τους όρους που περιέχουν την h :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial t} \right\} - \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t) \right\}$$

Εκτελώντας την μερική παραγωγή,ση,

$$\left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial t \partial \mathbf{x}} \right] - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]$$

και εφαρμόζοντας την αλυσιδωτή παραγωγή στον τελευταίο όρο,

$$\left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial t \partial \mathbf{x}} \right] - \left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}^2} \right] \dot{\mathbf{x}}^*(t) - \left[\frac{\partial^2 h(\mathbf{x}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x} \partial t} \right]$$

Για συναρτήσεις με καλή συμπεριφορά (συνεχείς δεύτερες μερικές παράγωγοι) οι όροι αυτοί αθροίζονται στο μηδέν. Έτσι, το ολοκλήρωμα της (4.7) γίνεται,

$$\int_{t_0}^{t_f} \left\{ \begin{aligned} & \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T + \mathbf{p}^{*\top}(t) \frac{\partial a(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} + \frac{d\mathbf{p}^{*\top}(t)}{dt} \delta \mathbf{x}(t) + \\ & \left[\frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T + \mathbf{p}^{*\top}(t) \frac{\partial a(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} \delta \mathbf{u}(t) + \\ & \left[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t) - \dot{\mathbf{x}}^*(t) \right]^T \delta \mathbf{p}(t) \end{aligned} \right\} dt$$

Όπως έχουμε ήδη δείξει το ολοκλήρωμα πρέπει να μηδενίζεται ανεξαρτήτως των συννοριακών συνθηκών. Κατ' αρχήν οι περιορισμοί πρέπει να ικανοποιούνται από την βέλτιστη \mathbf{u} , οπότε ο συντελεστής του $\delta \mathbf{p}$ είναι μηδέν. Στη συνέχεια η $\mathbf{p}(t)$ επιλέγεται έτσι ώστε ο συντελεστής του $\delta \mathbf{x}$ να μηδενίζεται, ήτοι:

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = - \left[\frac{\partial a(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{p}^*(t) - \frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.8)$$

Η εξίσωση (4.8) καλείται **εξίσωση συγκατάστασης** και η $\mathbf{p}(t)$ **συγκατάσταση**.

Τέλος ο συντελεστής της $\delta \mathbf{u}$ πρέπει να μηδενίζεται, οπότε,

$$0 = \frac{\partial g(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} + \left[\frac{\partial a(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} \right]^T \mathbf{p}^{*\top}(t) \quad (4.9)$$

Οι εξισώσεις (4.8)-(4.9) έχουν ιδιαίτερη βαρύτητα, γιατί όπως θα δούμε, πρέπει να ικανοποιούνται (με κάποια τροποποίηση της (4.9)) και στην περίπτωση που ο έλεγχος είναι φραγμένος. Στην (4.7) υπάρχουν ακόμη οι όροι εκτός του ολοκληρώματος, που πρέπει και αυτοί να μηδενίζονται, αφού η συνολική μεταβολή πρέπει να είναι μηδέν. Έτσι, αντικαθιστώντας την g_a (4.6) στη (4.7) παίρνουμε,

$$\left[\frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[g(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h(\mathbf{x}^*(t_f), t_f)}{\partial t} + \mathbf{p}^{*T}(t_f) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Τέλος αντικαθιστώντας την h καταλήγουμε στις τελικές συνοριακές συνθήκες,

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) + \mathbf{v}^T \mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right\} - \mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0}$$

$$g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) + \mathbf{v}^T \mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right\} = 0$$

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = 0$$

Όπως και προηγούμενα, οι εξισώσεις αυτές μετατρέπονται σε μία ποικιλία μορφών ανάλογα με το είδος των συνοριακών συνθηκών.

Τα παραπάνω αποτελέσματα γράφονται πιο συνεκτικά αν ορίσουμε την **Χαμιλτονιανή**,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

Έτσι οι αναγκαίες συνθήκες για την ύπαρξη ακρότατου μετατρέπονται στις:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{p}} \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.11)$$

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{u}} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (4.12)$$

Όπου $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^\top(t) \cdot \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$ (4.13)

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) + \mathbf{v}^\top \mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right\} - \mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{0}$$

Και $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial}{\partial t} \left\{ l(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) + \mathbf{v}^\top \mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right\} = 0$ (4.14)

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) = \mathbf{0}$$

Οι αναγκαίες συνθήκες (4.10)-(4.12) αποτελούνται από $2n$ διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης και m αλγεβρικές εξισώσεις. Η λύση των διαφορικών εξισώσεων απαιτεί την εύρεση $2n$ σταθερών. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούνται οι n αρχικές συνθήκες και n ή $n+1$ (αν το t_f δεν δίνεται) σχέσεις από την έκφραση των συνοριακών συνθηκών.

Ιστορικά: Στη κλασική φυσική, η αρχή του Hamilton για συντηρητικά συστήματα λέει ότι: «από όλα τα πιθανά μονοπάτια που μπορεί ένα δυναμικό σύστημα να πάρει για να μετακινηθεί από ένα σημείο σ' ένα άλλο σε δεδομένο χρόνο, το μονοπάτι που τελικά θα ακολουθηθεί ελαχιστοποιεί το ολοκλήρωμα της διαφοράς της κινητικής και δυναμικής ενέργειας» (Goldstein, 1971). Η εξίσωση Euler-Lagrange (3.4) είναι παρόμοια με την εξίσωση κίνησης του Lagrange, αν θεωρήσουμε,

\mathbf{q} : διάνυσμα γενικευμένων συντεταγμένων

$\mathbf{u} = \dot{\mathbf{q}}$: διάνυσμα ταχυτήτων

$U(\mathbf{q})$: δυναμική ενέργεια

$T(\mathbf{q}, \mathbf{u})$: κινητική ενέργεια

$L(\mathbf{q}, \mathbf{u}) = T(\mathbf{q}, \mathbf{u}) - U(\mathbf{q})$: λαγκρανζιανή του συστήματος

Με την ορολογία αυτή, η εξίσωση κίνησης του Lagrange είναι η,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0$$

Επίσης αν,

$$\lambda = - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}$$

ορισθεί σαν το γενικευμένο διάνυσμα ορμής, τότε οι εξισώσεις κίνησης του Hamilton είναι παρόμοιες με τις (4.10), (4.11), δηλαδή ισχύει,

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{q}} &= \frac{\partial H}{\partial \lambda} \\ -\lambda &= \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \end{aligned}$$

Η φυσική σημασία της Χαμιλτονιανής στην κίνηση συστημάτων μπορεί έτσι να φανεί ότι είναι η συνολική ενέργεια (υπό κατάλληλες συνθήκες).

4.1.1 Το πρόβλημα του Ζερμέλο³

Μία βάρκα ξεκινά από μία συγκεκριμένη θέση $A(0,0)$ στην όχθη ενός ποταμού πλάτους β και θέλει να φτάσει αντίπερα στην θέση $B(\alpha, \beta)$. Η βάρκα κινείται πάντα με μία σταθερή ταχύτητα V , ενώ ο ποταμός έχει ρεύμα ταχύτητας $W(y)$. Τυπικά παραδείγματα κατανομής του ρεύματος είναι τα:

σταθερό : $W(y) = w$

παραβολικό : $W(y) = y(\beta - y)$

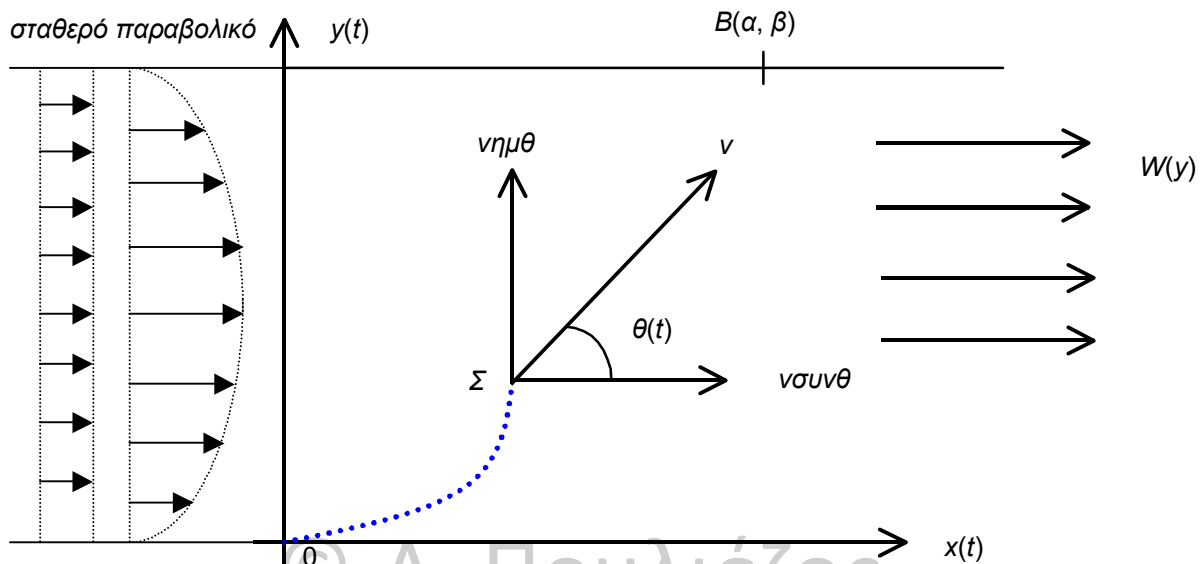
Να βρεθεί η βέλτιστη κατεύθυνση πλοήγησης $\theta^*(t)$ ώστε η βάρκα να φτάσει στην επιθυμητή θέση σε ελάχιστο χρόνο.

Για να επιλύσουμε το πρόβλημα αυτό χρησιμοποιώντας την θεωρία του βέλτιστου ελέγχου πρέπει να το διατυπώσουμε στην κατάλληλη μορφή. Κατ' αρχήν το μαθηματικό υπόδειγμα πρέπει να είναι σε μορφή διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης.

³ Ερνέστος Ζερμέλο: επιφανής μαθηματικός των αρχών του 20^{ου} αιώνα.

Αναφερόμενοι στο Σχ. 4.8, σε μια τυχαία θέση $\Sigma(x, y)$ με κατεύθυνση πλοήγησης $\theta(t)$ θα ισχύει για την οριζόντια και κάθετη κίνηση:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= v \cos\theta(t) + W[y(t)], & x(0) &= 0, x(t_f) = \beta \\ \dot{y}(t) &= v \sin\theta(t), & y(0) &= 0, y(t_f) = \alpha \end{aligned} \quad (4.15)$$



Σχήμα 4.8 Το πρόβλημα πλοήγησης του Ζερμέλο

Το σύστημα αυτό είναι μη γραμμικό με μεταβλητές κατάστασης x, y και έλεγχο την θ . Το κριτήριο σχεδίασης (ελαχιστοποίηση χρόνου) πρέπει να είναι το ολοκλήρωμα κάποιας συνάρτησης της κατάστασης και του ελέγχου,

$$\min_{\theta(t)} J[\theta(t)] = \int_0^{t_f} dt = t_f$$

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις (4.10)-(4.14) στο σύστημα αυτό, παίρνουμε τις παρακάτω αναγκαίες συνθήκες:

Εξισώσεις συγκατάστασης:

$$\begin{aligned} \dot{p}_1^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} = 0 \Rightarrow p_1^*(t) = c_1 \\ \dot{p}_2^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = -p_1^*(t)w'(y) \Rightarrow \dot{p}_2^*(t) = -c_1 w'(y) \end{aligned} \quad (4.16)$$

Εξίσωση ελαχίστου:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = 0 \Rightarrow -p_1^*(t) \nu \eta \mu \theta(t) + p_2^*(t) \nu \sigma \upsilon \nu \theta(t) = 0$$

$$\epsilon \phi \theta^*(t) = \frac{p_2^*(t)}{p_1^*(t)} \Rightarrow \theta^*(t) = \tau \omicron \xi \epsilon \phi \frac{p_2^*(t)}{p_1^*(t)} \quad (4.17)$$

Τερματικές συνθήκες: $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) = 0$

όπου η Χαμιλτονιανή ορίζεται σαν,

$$\mathcal{H}(t) = 1 + p_1(t) [\nu \sigma \upsilon \nu \theta(t) + W(y)] + p_2(t) \nu \eta \mu \theta(t) \quad (4.18)$$

Αρκεί λοιπόν να βρούμε τα p_1^* , p_2^* και μετά προσδιορίζεται αμέσως η βέλτιστη πλοήγηση $\theta^*(t)$. Η (4.16) δεν λύνεται εύκολα στη γενική περίπτωση. Παρατηρούμε⁴ όμως ότι αν παραγωγίσουμε τη Χαμιλτονιανή,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= \dot{p}_1(t) [\nu \sigma \upsilon \nu \theta(t) + W(y)] + p_1(t) [-\dot{\theta}(t) \nu \eta \mu \theta(t) + \dot{y}(t) W'(y)] + \dot{p}_2(t) \nu \eta \mu \theta(t) + \dot{\theta}(t) p_2(t) \nu \sigma \upsilon \nu \theta(t) \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 + \dot{\theta}(t) [-p_1(t) \nu \eta \mu \theta(t) + p_2(t) \nu \sigma \upsilon \nu \theta(t)] + p_1(t) \dot{y}(t) W'(y) + \dot{p}_2(t) \nu \eta \mu \theta(t) \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 + \dot{\theta}(t) [0] + p_1(t) \dot{y}(t) W'(y) - \dot{p}_1(t) W'(y) \nu \eta \mu \theta(t) = p_1(t) W'(y) [\dot{y}(t) - \nu \eta \mu \theta(t)] \\ &\Rightarrow \frac{d\mathcal{H}}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{H}(t) = c \end{aligned}$$

Λόγω όμως των τερματικών συνθηκών $\mathcal{H}(t_f) = 0$ άρα $\mathcal{H}(t) = 0, \forall t$.

Χρησιμοποιώντας την (4.18) παίρνουμε,

$$\mathcal{H}(t) = 0 \Rightarrow p_2^*(t) = -\frac{c_1 [\nu \sigma \upsilon \nu \theta(t) + W(y)] + 1}{\nu \eta \mu \theta(t)}$$

και τέλος μέσω της (4.17),

⁴ Η προσέγγιση αυτή βρέθηκε στις «Σημειώσεις Βέλτιστου Ελέγχου», Ν. Χριστοδουλάκης, ΑΣΟΕΕ, 1988.

$$\frac{\eta\mu\theta^*(t)}{\sigma\upsilon\nu\theta^*(t)} = -\frac{c\{\nu\sigma\upsilon\nu\theta^*(t) + W(y^*(t))\} + 1}{\nu\eta\mu\theta^*(t)}$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην απλούστερη μορφή,

$$\theta^*(t) = \tau\omicron\zeta\sigma\upsilon\nu\left\{-\frac{\nu}{W[y^*(t)] + c_1}\right\} \quad (4.19)$$

Για να υπολογισθεί η σταθερά c_1 , καθώς και ο απαιτούμενος ολικός χρόνος t_f , πρέπει να αντικαταστήσουμε την θ^* στις εξισώσεις του συστήματος (4.15), και να τις λύσουμε χρησιμοποιώντας τις συνοριακές συνθήκες (4 εξισώσεις για τα c , t_f και τις δύο σταθερές των διαφορικών). Στην γενική περίπτωση δεν υπάρχει αναλυτική λύση και πρέπει να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι προσομοίωσης.

Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα όπου η ροή είναι σταθερή, $W(y)=w$. Στη περίπτωση αυτή, η (4.19) γίνεται,

$$\theta^*(t) = \theta^* \text{ (σταθερά)}$$

Επομένως η βέλτιστη τροχιά είναι ευθεία γραμμή που προφανώς είναι αυτή που ενώνει τα σημεία $(0, 0)$, (α, β) . Αντικαθιστώντας την βέλτιστη θ στις (4.15) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} \dot{x}^*(t) &= \nu\sigma\upsilon\nu\theta^* + w \Rightarrow x^*(t) = (\nu\sigma\upsilon\nu\theta^* + w)t + c_x \\ \dot{y}^*(t) &= \nu\eta\mu\theta^* \Rightarrow y^*(t) = (\nu\eta\mu\theta^*)t + c_y \end{aligned}$$

(θυμίζουμε: θ^* σταθερά!). Θέτοντας τις αρχικές συνθήκες για τα x, y παίρνουμε:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 &= (\nu\sigma\upsilon\nu\theta^* + w)0 + c_x \Rightarrow c_x = 0 \\ y(0) = 0 &= (\nu\eta\mu\theta^*)0 + c_y \Rightarrow c_y = 0 \end{aligned}$$

ενώ για τις τελικές,

$$\begin{aligned} x(t_f) &= \alpha = (\nu\sigma\upsilon\nu\theta^* + w)t_f \\ y(t_f) &= \beta = (\nu\eta\mu\theta^*)t_f \Rightarrow t_f = \frac{\beta}{\nu\eta\mu\theta^*} \end{aligned}$$

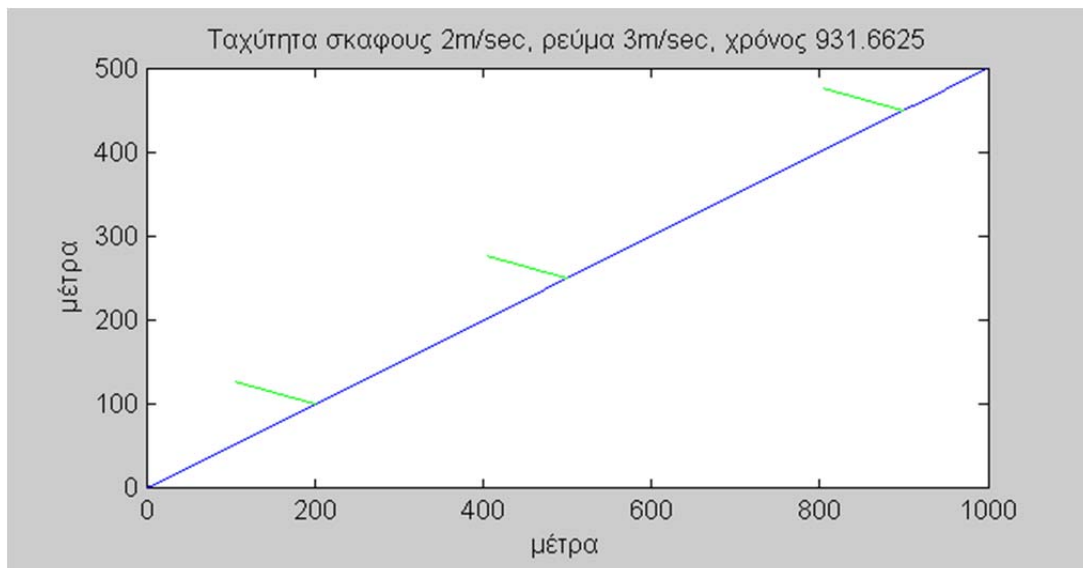
Αντικαθιστώντας τον t_f στην πρώτη εξίσωση, δίνει,

$$\frac{(v \sin \theta^* + w) \beta}{v \eta \mu \theta^*} = \alpha \Rightarrow w \beta = \alpha v \eta \mu \theta^* - \beta v \sigma \nu \theta^*$$

Και χρησιμοποιώντας τον τύπο $\sigma \nu(x-a) = \sigma \nu x \sigma \nu a + \eta \mu x \eta \mu a$, καταλήγουμε τελικά στην επιθυμητή σχέση,

$$\theta^* = \sigma \nu^{-1} \left(\frac{w \beta}{v \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) + \epsilon \phi^{-1} \left(\frac{\alpha}{-\beta} \right)$$

Τα αποτελέσματα για ένα πρόβλημα με $(\alpha, \beta) = (1000\text{m}, 500\text{m})$, $v = 2\text{m/sec}$, $w = 3\text{m/sec}$ φαίνονται στο Σχ. 4.9.



Σχήμα 4.9 Επίλυση του προβλήματος του Ζερμέλο (με πράσινο φαίνεται η βέλτιστη γωνία πλοήγησης)

4.2 Βέλτιστος έλεγχος με φραγμό στο διάνυσμα ελέγχου - η αρχή του ελαχίστου του Pontryagin

Η επέκταση των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων στην περίπτωση που το διάνυσμα ελέγχου είναι φραγμένο, π.χ. $\|u(t)\| \leq M$, δεν είναι απλή υπόθεση, γι' αυτό δεν πρέπει να προκαλεί εντύπωση ότι το πρόβλημα αυτό λύθηκε μόλις το 1962 από τον Ρώσο μαθηματικό L.S. Pontryagin. Η αυστηρή μαθηματική απόδειξη είναι αρκετά περίπλοκη, και δεν θα θίξουμε εδώ παρά μόνο τα κύρια σημεία της. Για τον ενδιαφερόμενο, υπάρχει μεταξύ άλλων στον Pontryagin *et al.* (1962) και Berkovitz (1974).

Η βασική διαφορά μεταξύ της θεωρίας του λογισμού των μεταβολών και του συγκε-

κριμένου προβλήματος είναι η διαφοροποίηση των αναγκαίων συνθηκών για ελάχιστο όταν η $\mathbf{u}^*(t)$ αναγκασθεί να βρεθεί στα όρια της αποδεκτής περιοχής για κάποιο χρονικό διάστημα στο $[t_0, t_f]$. Στην περίπτωση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι πρέπει,

$$\delta J[\mathbf{u}^*(t), \delta \mathbf{u}(t)] \geq 0$$

Κάνοντας όλες τις πράξεις ξανά καταλήγουμε στη φημισμένη **αρχή του ελαχίστου του Pontryagin**:

Οι αναγκαίες συνθήκες για να είναι ένας αποδεκτός έλεγχος,

$$\mathbf{u}^*(t) \in U$$

ελάχιστο του,

$$J[\mathbf{u}(t)] = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$$

υπό τον περιορισμό,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$$

είναι οι εξής:

$$\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{p}} \quad (4.10)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = - \frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.11)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t), t), \quad \forall \mathbf{u}(t) \in U \quad (4.20)$$

όπου $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)]$

Συνοριακές συνθήκες:

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$$

Με λόγια, η αρχή του ελαχίστου λέει ότι ο βέλτιστος έλεγχος πρέπει να ελαχιστοποιεί την Χαμιλτονιανή. Η αρχή αυτή μας επιτρέπει να δούμε ευκολότερα ότι οι παραπάνω συνθήκες περιέχουν όλες τις προηγούμενες σαν υποπεριπτώσεις, αφού αν ο έλεγχος είναι μη φραγμένος, ελαχιστοποίηση της Χαμιλτονιανής ως προς \mathbf{u} , σημαίνει

$\partial \mathcal{H} / \partial u = 0$ δηλαδή την (4.12).

4.2.1 Σύστημα παραγωγής

(O. Maimon, E. Khmelnitsky, K. Kogan (1998). "Optimal flow control in manufacturing systems", Kluwer Academic Publishers)

Έστω ένα σύστημα παραγωγής που προσδιορίζεται από την ποσότητα ενός αποθηκευμένου προϊόντος $X(t)$ για έναν ορίζοντα προγραμματισμού T , $t \in [0, T]$. Στην περίπτωση αυτή ο ρυθμός συσσώρευσης δίνεται από τη διαφορά μεταξύ του ρυθμού παραγωγής $u(t)$ και ζήτησης $d(t)$:

$$\dot{X}(t) = u(t) - d(t) \quad X(0) = X_0$$

Ο ρυθμός παραγωγής περιορίζεται από τη μέγιστη χωρητικότητα,

$$0 \leq u(t) \leq U$$

Ας υποθέσουμε ότι κριτήριο προγραμματισμού είναι η συνάρτηση,

$$\frac{1}{2} c X^2(t)$$

που εκφράζει ένα αναλογικό κόστος τόσο για την ύπαρξη θετικής αποθηκευμένης ποσότητας (που προκύπτει για παράδειγμα λόγω της δέσμευσης κεφαλαίου και εξόδων αποθήκευσης) όσο και για τη περίπτωση που η ζήτηση δεν μπορεί να ικανοποιηθεί. Το πρόβλημα λοιπόν αυτό μπορεί να τεθεί στα πλαίσια του βέλτιστου ελέγχου ως ακολούθως:

$$\min_{u(t)} J[u(t)] = \frac{1}{2} \int_0^T c X^2(t) dt \quad (4.21)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\dot{X}(t) = u(t) - d(t), \quad X(0) = X_0, \quad 0 \leq u(t) \leq U \quad (4.22)$$

Το πρόβλημα αυτό είναι ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης με περιορισμό στο διάνυσμα ελέγχου, δεδομένο τελικό χρόνο $t_f = T$ και ελεύθερη τελική κατάσταση $x(t_f)$. Να σημειωθεί ότι η ζήτηση $d(t)$ πρέπει να είναι γνωστή εκ των προτέρων. Στη περίπτωση αυτή πρέπει να ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες, για την ύπαρξη ελαχίστου:

1. Εξίσωση συγκατάστασης

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.23)$$

2. Ελαχιστοποίηση Χαμιλτονιανής

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t), t), \quad \forall \mathbf{u}(t) \in U \quad (4.24)$$

3. Συνοριακές συνθήκες

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f = 0 \quad (4.25)$$

όπου η Χαμιλτονιανή δίνεται από την,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)]$$

Ας συγκεκριμενοποιήσουμε την καθεμία από αυτές. Κατ' αρχήν η Χαμιλτονιανή είναι,

$$\mathcal{H}(X(t), u(t), p(t), t) = \frac{1}{2} cX^2(t) + p(t)[u(t) - d(t)] \quad (4.26)$$

ενώ η εξίσωση συγκατάστασης:

$$\dot{p}^*(t) = -cX(t) \quad (4.27)$$

με τερματική τιμή (εξαιτίας της 4.25)

$$p^*(T) = 0 \quad (4.28)$$

Μεγιστοποίηση της (4.26) ως προς $u(t)$ δίνει τρεις περιοχές ελέγχου (περιοχές παραγωγής) για το συγκεκριμένο πρόβλημα:

$$u(t) = U \text{ αν } p(t) < 0 \quad \text{περιοχή πλήρους παραγωγής} \quad (4.29)$$

$$u(t) = 0 \text{ αν } p(t) > 0 \quad \text{περιοχή μη παραγωγής} \quad (4.30)$$

$$u(t) \in [0, U] \text{ αν } p(t) = 0 \text{ περιοχή επαρκούς παραγωγής} \quad (4.31)$$

Το ερώτημα που προκύπτει είναι πότε ενεργοποιούνται οι περιοχές αυτές.

Ας δούμε κατ' αρχήν πότε η $p(t)=0$. Παραγωγίζοντας και χρησιμοποιώντας την (4.27), παίρνουμε,

$$\dot{p}(t) = cX(t) = 0 \Rightarrow X(t) \equiv 0 \quad (4.32)$$

Λόγω της εξίσωσης κατάστασης (4.22), $u(t)=\min\{U, d(t)\}$ στην περιοχή επαρκούς ελέγχου. Έτσι οι (4.29-4.31) γίνονται,

$$u(t)=U \text{ αν } p(t)<0 \quad \text{περιοχή πλήρους παραγωγής} \quad (4.33)$$

$$u(t)=0 \text{ αν } p(t)>0 \quad \text{περιοχή μη παραγωγής} \quad (4.34)$$

$$u(t)=\min\{U,d(t)\} \text{ αν } p(t)=0 \quad \text{περιοχή επαρκούς παραγωγής} \quad (4.35)$$

Η ποιοτική ερμηνεία των (4.33-4.35) συνάδει πλήρως με την κοινή λογική: υπάρχουν τρεις πολιτικές παραγωγής (α) μέγιστη παραγωγή, (β) ελάχιστη παραγωγή και (γ) παραγωγή όση ακριβώς και η ζήτηση. Ειδικότερα στη (γ) περίπτωση η πολιτική είναι βέλτιστη αν η ζήτηση είναι μικρότερη (ή ίση) της χωρητικότητας. Η αρχή του ελαχίστου όμως μας επιτρέπει να βρούμε και τους βέλτιστους χρόνους εναλλαγής μεταξύ των πολιτικών αυτών. Ας δούμε πώς, μ' ένα συγκεκριμένο αριθμητικό παράδειγμα.

Έστω $T=10$ ώρες, $c=1\text{€/kg.ώρα}$, $X_0=4\text{kg}$, $U=3\text{Kg/ώρα}$, και $d(t)$ όπως στο Σχ. 4.10.

Η πρώτη περιοχή δεν μπορεί να είναι «επαρκούς παραγωγής» αφού $X(0)\neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι η περιοχή «μη παραγωγής» συμβαίνει πρώτη (αν η υπόθεση μας δεν είναι σωστή οι συνθήκες της Αρχής του Ελαχίστου δεν θα ισχύουν οπότε στη συνέχεια θα δοκιμάσουμε την περιοχή «πλήρους παραγωγής»). Στη περιοχή «μη παραγωγής», $u(t)=0$ και

$$\begin{aligned} \dot{X}(t) &= -2,5, X(0) = 4 \\ \dot{p}(t) &= -X(t), p(t) > 0 \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας,

$$\begin{aligned} X(t) &= -2,5t + 4 \\ p(t) &= 1,25t^2 - 4t + p(0) \end{aligned}$$

όπου $t \in [0, t_1]$ και t_1 ο χρόνος λήξης της πρώτης περιοχής. Η δεύτερη περιοχή μπορεί να είναι «πλήρους παραγωγής» ή «επαρκούς παραγωγής». Αν διαλέξουμε την επαρκή παραγωγή, τότε $X(t_1)=0 \Rightarrow t_1=1,6$ και $p(1,6)=0 \Rightarrow p(0)=3,2$. Στη περιοχή αυτή $u(t)=d(t)$.

Ποια είναι η επόμενη περιοχή και που αρχίζει; Επειδή στο χρόνο $t=4$ η ζήτηση κορυφώνεται, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι η επόμενη περιοχή είναι περιοχή «πλήρους παραγωγής». Στη περιοχή αυτή $u(t)=U, t \in [t_2, t_3]$,

$$\begin{aligned}\dot{X}(t) &= U - d(t), X(t_2) = 0 \\ \dot{p}(t) &= -cX(t), p(t_2) = 0, p(t) < 0\end{aligned}$$

Οι εξισώσεις αυτές πρέπει να ολοκληρωθούν λαμβανομένης υπόψη της τιμής της ζήτησης στην περίοδο αυτή. Έτσι παίρνουμε,

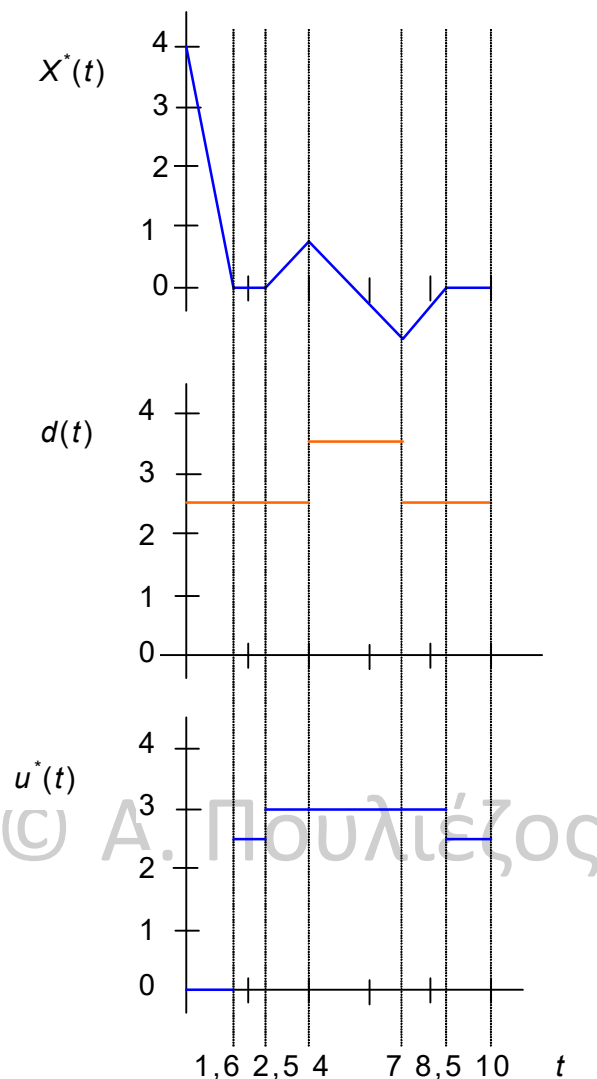
$$X(t) = 0,5(t-t_2), p(t) = -0,25(t-t_2)^2 \quad t \in [t_2, 4] \quad (4.36)$$

$$X(t) = 4 - 0,5(t+t_2), p(t) = 0,25(t+t_2)^2 - 0,5t_2^2 - 4t + 8 \quad t \in [4, 7] \quad (4.37)$$

$$X(t) = -3 + 0,5(t-t_2), p(t) = -0,25(t+t_2)^2 + 3t - 16,5 \quad t \in [7, t_3] \quad (4.38)$$

Αν η επόμενη περιοχή είναι της «επαρκούς παραγωγής», τότε $X(t_3)=p(t_3)=0$. Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις (4.36-4.38), δίνει $t_2=2,5$ και $t_3=8,5$.

Επειδή η τελευταία περιοχή είναι «επαρκούς παραγωγής», η συνθήκη $p^*(T)=0$ ικανοποιείται. Κάνοντας τις ενδεικνυόμενες πράξεις στην τελευταία περιοχή, βρίσκουμε ότι οι προϋποθέσεις της αρχής του ελαχίστου ικανοποιούνται. Άρα η στρατηγική που υποθέσαμε είναι πράγματι βέλτιστη.



Σχήμα 4.10 Βέλτιστη τροχιά, ζήτηση και βέλτιστος έλεγχος για το πρόβλημα αποθεμάτων

Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει την δυνατότητα της θεωρίας βέλτιστου ελέγχου να επιλύει προβλήματα παραγωγής, ωστόσο είναι φανερό ότι η αυξημένη πολυπλοκότητα σε περιπτώσεις πολλών διαστάσεων (δηλαδή πολλές μηχανές και πολλά προϊόντα) καθιστά την αναλυτική επίλυση αδύνατη. Στις περιπτώσεις αυτές είναι απαραίτητη η προσφυγή σε αριθμητικές μεθόδους όπως η «shooting» και της «χρονικής αποσύνθεσης».

4.2.2 Οι μέλισσες ως βελτιστοποιητές

(D.G. Luenberger (1979). "Introduction to Dynamic Systems", Wiley)

Πολλά «κοινωνικά» έντομα, όπως οι μέλισσες, έχουν έναν ετήσια κύκλο στο πληθυσμό τους που αποτελείται ουσιαστικά από δύο κατηγορίες: τα θηλυκά που δεν μπορούν να γονιμοποιηθούν («εργάτριες») και τους αναπαραγωγούς (θηλυκά που γονι-

μποιούνται «βασίλισσες» και αρσενικά «κηφήνες»).

Τα στείρα θηλυκά αριθμούν περί τις 50.000 και ζουν ~35 μέρες, ανάλογα με τη φύση της εργασίας τους (εντός ή εκτός κυψέλης). Η βασίλισσα έχει διάρκεια ζωής 2-4 έτη ενώ τα αρσενικά είναι περίπου 300 με διάρκεια ζωής ~50 μέρες (το φθινόπωρο εκδιώκονται και ουσιαστικά καταδικάζονται σε θάνατο).

Η κυψέλη χρειάζεται γύρη (φυτική πρωτεΐνη για άζωτο, φωσφόρο, αμινοξέα και βιταμίνες), νέκταρ (πηγή υδατανθράκων (10.000.000 άνθη/λίτρο μελιού), νερό (20 λίτρα/έτος) και πρόπολη (φυτική ρητίνη).

Στο τέλος του καλοκαιριού όλα τα μέλη της αποικίας, εκτός των νεαρών βασιλισσών, πεθαίνουν και μία νέα γενεά δημιουργείται. Από εξελικτική σκοπιά, η κοινωνία των μελισσών πρέπει να «προγραμματίσει» τη παραγωγή εργατριών και αναπαραγωγών, έτσι ώστε να μεγιστοποιήσει το πλήθος των αναπαραγωγών στο τέλος της περιόδου. Η βελτιστοποίηση αυτή δεν συμβαίνει βέβαια συνειδητά, αλλά είναι το αποτέλεσμα μακρόχρονης εξελικτικής διαδικασίας. Ας διατυπώσουμε το πρόβλημα των μελισσών ως ένα πρόβλημα βέλτιστου ελέγχου για να δούμε πόσο κοντά στη θεωρητικά βέλτιστη λύση, είναι η τακτική τους.

Έστω $w(t)$ και $q(t)$ τα επίπεδα πληθυσμών των εργατριών και αναπαραγωγών αντίστοιχα. Ανά πάσα στιγμή t , $0 \leq t \leq T$, της περιόδου, η αποικία αφιερώνει ένα ποσοστό $u(t)$ της συνολικής της προσπάθειας στο να μεγαλώνει το πληθυσμό των εργατριών και το υπόλοιπο $1-u(t)$ στους αναπαραγωγούς. Υποτίθεται ότι οι δύο πληθυσμοί αναπαριστώνται από τις εξισώσεις,

$$\dot{w}(t) = bu(t)w(t) - \mu w(t)$$

$$\dot{q}(t) = c(1-u(t))w(t)$$

Οι (θετικές) σταθερές b και c εξαρτώνται από το περιβάλλον και αντιπροσωπεύουν την διαθεσιμότητα των πόρων και την αποδοτικότητα με την οποία οι πόροι αυτοί μετατρέπονται σε νέες εργάτριες και αναπαραγωγούς. Ο ρυθμός θνησιμότητας των εργατριών είναι μ , ενώ αυτός των αναπαραγωγών θεωρείται αμελητέος. Για να είναι η αποικία παραγωγική, υποτίθεται $b > \mu$. Το πρόβλημα της αποικίας μπορεί τώρα να διατυπωθεί ως,

$$\max J = q(T)$$

υπό το περιορισμό $0 \leq u(t) \leq 1$ και με αρχικές συνθήκες,

$$w(0) = 1, q(0) = 0$$

Η Χαμιλτονιανή είναι,

$$\begin{aligned}
H(\lambda_1, \lambda_2, w, q, u) &= 0 + [p_1(t) \quad p_2(t)] \begin{bmatrix} bu(t)w(t) - \mu w(t) \\ c(1-u(t))w(t) \end{bmatrix} = \\
&= w(t)[p_1(t)b - p_2(t)c]u(t) + [p_2(t)c - p_1(t)\mu]w(t)
\end{aligned}$$

Οι συνθήκες βέλτιστου για τη συγκατάσταση είναι,

$$\dot{p}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} -\dot{p}_1(t) = [bu(t) - \mu]p_1(t) + c[1-u(t)]p_2(t) \\ -\dot{p}_2(t) = 0 \end{cases} \quad (4.39)$$

με τερματικές συνθήκες,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial x}(x^*(t_f), t_f) - p^*(t_f) \right]^T \delta x_f = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial w} \Big|_{t=T} \\ \frac{\partial h}{\partial q} \Big|_{t=T} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1^*(T) \\ p_2^*(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

ενώ,

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), u(t), p^*(t), t), \quad 0 \leq u(t) \leq 1$$

Επειδή η Χαμιλτονιανή είναι γραμμική ως προς u και $w > 0$ (αφού είναι πληθυσμός), μεγιστοποιείται με $u=0$ ή $u=1$ ανάλογα με το πρόσημο της $[p_1(t)b - p_2(t)c]$. Επειδή,

$$-\dot{p}_2(t) = 0 \Rightarrow p_2^*(t) = \text{σταθερά} = 1 \quad (4.41)$$

η συνθήκη είναι,

$$p_1(t)b - c \quad \text{ή} \quad p_1(t) \begin{cases} > c \\ < b \end{cases} \quad (4.42)$$

Τώρα, ξεκινώντας από τον τελικό χρόνο,

$$p_1(T)b - p_2(T)c = -c < 0 \Rightarrow u^*(T) = 0$$

λαμβάνοντας υπόψη τις (4.39). Κοντά στο τελικό χρόνο,

$$-\dot{p}_1^*(t) = \mu p_1^*(t) + c \Rightarrow p_1^*(t) = \frac{c}{\mu} \left(1 - e^{\mu(t-T)}\right) \quad (4.43)$$

Η (4.43) περιγράφει μία μεταβλητή που αυξάνεται από το τέλος προς την αρχή, καθώς $p_1^*(T) = 0$ και $e^{\mu(t-T)} = \frac{e^{\mu t}}{e^{\mu T}} < \frac{e^{\mu T}}{e^{\mu T}}, t \leq T$. Στη χρονική στιγμή t_s που η (4.42) αλλάζει φορά, δηλαδή $p_1(t_s) = \frac{c}{b}$, $u^*(t) = 1$ και η (4.39) είναι πια,

$$-\dot{p}_1(t) = [b - \mu] p_1(t) \Rightarrow p_1^*(t) = e^{-(b-\mu)t} + \left(\frac{c}{b} - e^{-(b-\mu)t_s} \right) \quad (4.44)$$

(λόγω του ότι η τερματική συνθήκη είναι $p_1(t_s) = \frac{c}{b}$). Επειδή τώρα $b > m$, η p_1 συνεχίζει να αυξάνεται (προς τα πίσω) και συνακόλουθα η $u(t)$ δεν ξαναλλάζει τιμή.

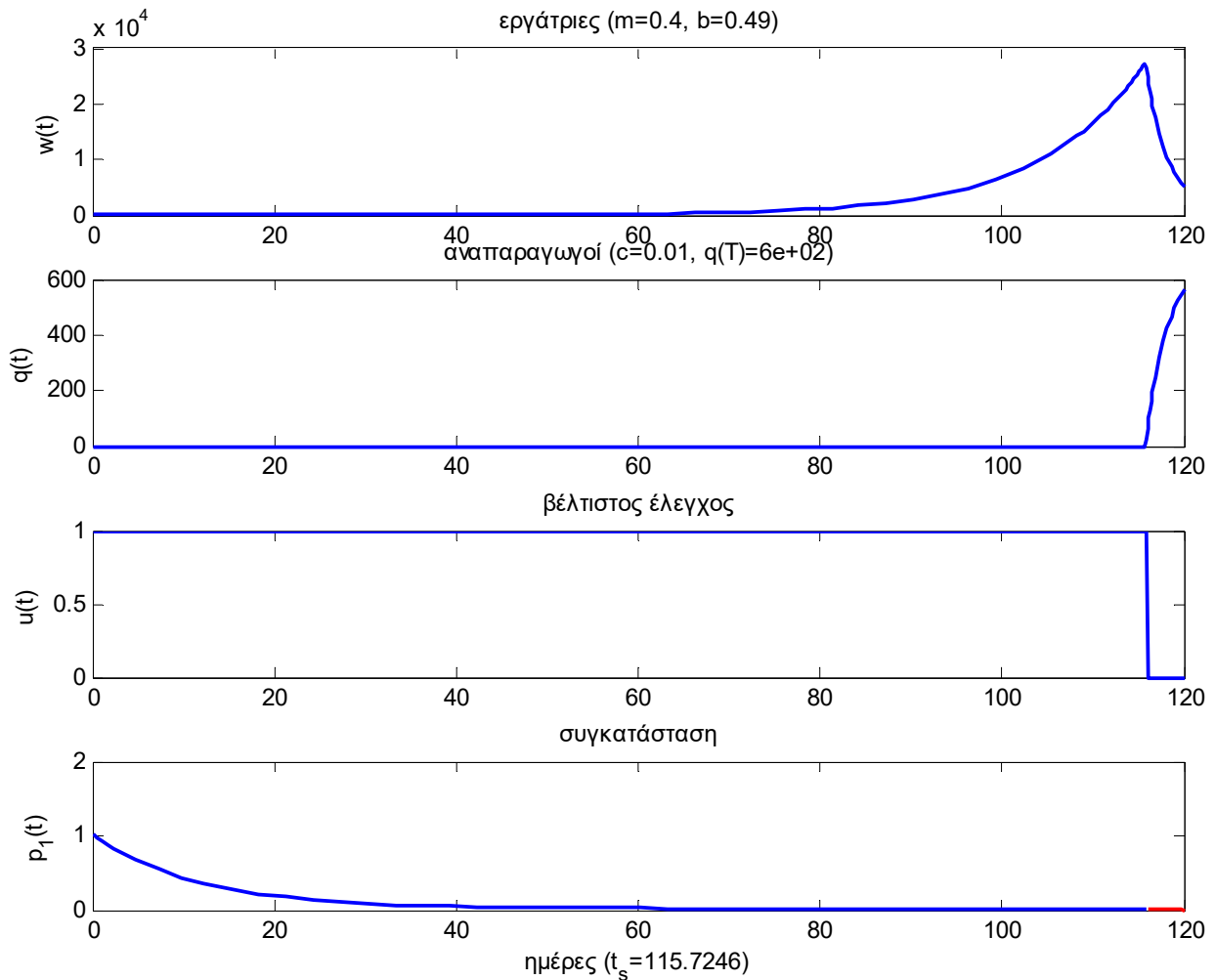
Η χρονική στιγμή t_s βρίσκεται από την (4.43), λύνοντας,

$$\frac{c}{\mu} \left(1 - e^{\mu(t_s-T)}\right) = \frac{c}{b} \Rightarrow t_s = T + \frac{1}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu}{b}\right) \quad (4.45)$$

ενώ ο δείκτης απόδοσης είναι,

$$q^*(T) = \frac{c}{b} e^{(b-\mu)t_s} = \frac{c}{b} e^{(b-\mu) \left[T + \frac{1}{\mu} \ln \left(1 - \frac{\mu}{b}\right) \right]} \quad (4.46)$$

Στο Σχ. 4.11 φαίνονται οι τροχιές των καταστάσεων, ελέγχου και συγκατάστασης για μία περίπτωση με $\mu=0,4$, $b=0,49$, $c=0,01$ και $T=120$ ημέρες.



Σχήμα 4.11 Αποτελέσματα προσομοίωσης για το πρόβλημα των μελισσών

Το παράδειγμα αυτό, προφανώς, δεν αντικατοπτρίζει πλήρως τη πραγματικότητα. Πάντως ο συγγραφέας υποστηρίζει ότι η πραγματική συμπεριφορά των μελισσών δεν απέχει πολύ από το θεωρητικό βέλτιστο. Αν αυτό είναι πράγματι έτσι, τότε η φυσική επιλογή επιλύει το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου ! Η παρατήρηση αυτή έχει οδηγήσει στην ανάπτυξη αλγορίθμων (γενετικών, σμηνών κ.ά.) που εκμεταλλεύονται το μηχανισμό αυτό για να λύσουν πολύπλοκα προβλήματα βελτιστοποίησης.

Μία τελευταία παρατήρηση: αν είναι έτσι τα πράγματα, με ποιο μηχανισμό καθορίζουν οι μέλισσες τι απόγονος θα παραχθεί; Μέχρι πρότινος πιστευόταν ότι η διαφοροποίηση επιτυγχανόταν μέσω του διαφορετικού μεγέθους που έχουν τα κελλιά επώασης (5mm για τις εργάτριες, 6mm για τα αρσενικά, μεγαλύτερα για τις βασίλισσες). Πρόσφατες μελέτες όμως δείχνουν ότι και η βασίλισσα μπορεί να αποφασίσει το ποσοστό της κάθε κατηγορίας.

4.3 Βέλτιστος έλεγχος με φραγμένο έλεγχο και διάνυση κατάστασης

4.4 Ειδικές περιπτώσεις

4.4.1 Προβλήματα LQ (γραμμικό σύστημα - τετραγωνικό κόστος): Παρακολούθηση

Τα προβλήματα αυτά παρουσιάζονται, μεταξύ άλλων, σε περιπτώσεις όπου η κατάσταση ενός γραμμικού συστήματος πρέπει να ακολουθήσει συγκεκριμένη τροχιά με μικρή κατανάλωση ενέργειας. Τα προβλήματα αυτά έχουν ενδιαφέρον γιατί προκύπτουν ωραίες αναλυτικές λύσεις που μπορούν να υλοποιηθούν εύκολα. Το γεγονός ότι μη γραμμικά συστήματα μπορούν να γραμμικοποιηθούν γύρω από τα σημεία ισορροπίας τους, επιτρέπει στα αποτελέσματα αυτά να έχουν και γενικότερη εφαρμογή. Το γενικότερο μαθηματικό πρότυπο του προβλήματος αυτού είναι:

$$\min_{u(t)} J[u(t)] = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left\{ \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}(t)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 \right\} dt \quad (4.47)$$

$$\text{όταν} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (4.48)$$

Η συνάρτηση $\mathbf{r}(t)$ είναι η επιθυμητή τροχιά, ο t_f είναι δεδομένος, η $\mathbf{x}(t_f)$ ελεύθερη και δεν υπάρχει φραγμός στον έλεγχο. Οι πίνακες \mathbf{H} και \mathbf{Q} είναι συμμετρικοί, θετικά ημιορισμένοι ενώ ο \mathbf{R} συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Για να μη μπλέξουμε παραπάνω απ' ότι χρειάζεται μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι πίνακες είναι χρονικά αμετάβλητοι. Τα αποτελέσματα επεκτείνονται αυτούσια και στην περίπτωση που οι πίνακες είναι χρονικά μεταβαλλόμενοι.

Η Χαμιλτονιανή είναι:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}}^2 + \frac{1}{2} \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}}^2 + \mathbf{p}^T(t)(\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)) \quad (4.49)$$

Επομένως οι αναγκαίες συνθήκες είναι,

$$\mathbf{0} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u}^*(t) + \mathbf{B}^T \mathbf{p}^*(t) \Rightarrow \mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{p}^*(t) \quad (4.50)$$

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}} = -\mathbf{Q}\mathbf{x}^*(t) - \mathbf{A}^T \mathbf{p}^*(t) + \mathbf{Q}\mathbf{r}(t) \quad (4.51)$$

συν τις συνοριακές συνθήκες (t_f δεδομένο, άρα $\delta t_f = 0$):

$$\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f = 0 \Rightarrow \mathbf{p}^*(t_f) = \mathbf{H}\mathbf{x}^*(t_f) - \mathbf{H}\mathbf{r}(t_f) \quad (4.52)$$

Αντικαθιστώντας το \mathbf{u}^* από την (4.50) στην (4.48) και χρησιμοποιώντας και την (4.51), παίρνουμε την επιμερισμένη μορφή του συνόλου των $2n$ διαφορικών που πρέπει να ικανοποιούνται:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}^*(t) \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & -\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{Q} & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\mathbf{r}(t) \end{bmatrix} \quad (4.53)$$

Το σύστημα αυτό είναι μη-ομογενές και η λύση του στο οποιοδήποτε σημείο t_f είναι:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t_f) \\ \mathbf{p}(t_f) \end{bmatrix} &= \Phi(t_f, t) \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix} + \int_t^{t_f} \Phi(t_f, \tau) \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}\mathbf{r}(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\ &= \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t_f, t) & \Phi_{12}(t_f, t) \\ \Phi_{21}(t_f, t) & \Phi_{22}(t_f, t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^*(t) \\ \mathbf{p}^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1(t) \\ \mathbf{f}_2(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.54)$$

όπου $\Phi(t_f, t)$ είναι ο πίνακας μετάβασης του συστήματος. Αντικαθιστώντας την συνοριακή συνθήκη για την $\mathbf{p}^*(t_f)$ από την (4.52) και την $\mathbf{x}^*(t_f)$ μέσω της πρώτης των (4.54) δίνει:

$$\mathbf{H}[\Phi_{11}(t_f, t)\mathbf{x}^*(t) + \Phi_{12}(t_f, t)\mathbf{p}^*(t) + \mathbf{f}_1(t)] - \mathbf{H}\mathbf{r}(t_f) = \Phi_{21}(t_f, t)\mathbf{x}^*(t) + \Phi_{22}(t_f, t)\mathbf{p}^*(t) + \mathbf{f}_2(t)$$

οπότε λύνοντας για την \mathbf{p}^* δίνει:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^*(t) &= [\Phi_{22}(t_f, t) - \mathbf{H}\Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [\mathbf{H}\Phi_{11}(t_f, t) - \Phi_{21}(t_f, t)] \mathbf{x}^*(t) + \\
&\quad + [\Phi_{22}(t_f, t) - \mathbf{H}\Phi_{12}(t_f, t)]^{-1} [\mathbf{H}\mathbf{f}_1(t) - \mathbf{f}_2(t) - \mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)] \\
&= \mathbf{K}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{s}(t)
\end{aligned} \tag{4.55}$$

όπου ο ορισμός των $\mathbf{K}(t)$, $\mathbf{s}(t)$ είναι προφανής. Επομένως ο βέλτιστος έλεγχος είναι:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}^*(t) - \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{s}(t) \\
&\underline{\underline{=}} \mathbf{F}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{v}(t)
\end{aligned}$$

Ο πίνακας $\mathbf{F}(t)$ καλείται **πίνακας ανάδρασης**. Τα μέχρι τώρα αποτελέσματα, αν και όχι τελικά (αφού απομένει ο υπολογισμός του Φ), επιτρέπουν ορισμένες παρατηρήσεις:

1. Ο βέλτιστος έλεγχος εκφράζεται σε μορφή ανάδρασης ή κλειστού βρόχου και όχι ανοικτού, με όλα τα πλεονεκτήματα που έχει η μορφή αυτή.
2. Ακόμη και για χρονικά αμετάβλητα συστήματα, ο έλεγχος είναι χρονικά μεταβαλλόμενος. Παρακάτω θα δούμε πώς μπορεί να υλοποιηθεί ένας υποβέλτιστος αλλά χρονικά αμετάβλητος έλεγχος (προσέξτε την διαφορά μεταξύ σταθερού και χρονικά αμετάβλητου!).
3. Η $\mathbf{v}(t)$ εξαρτάται από τις μελλοντικές τιμές της $\mathbf{r}(t)$, δηλαδή ο βέλτιστος έλεγχος έχει προβλεπτική ικανότητα. Αυτό βέβαια είναι εφικτό όταν το μέλλον, δηλαδή η $\mathbf{r}(t)$, είναι γνωστή. Σε αντίθετη περίπτωση ο βέλτιστος έλεγχος δεν είναι υλοποιήσιμος.

Ας επανέλθουμε στον υπολογισμό του πίνακα μεταφοράς. Παραγωγίζοντας την λύση \mathbf{p}^* ,

$$\dot{\mathbf{p}}^*(t) = \dot{\mathbf{K}}(t) \mathbf{x}^*(t) + \mathbf{K}(t) \dot{\mathbf{x}}^*(t) + \dot{\mathbf{s}}(t)$$

Αντικαθιστώντας τις παραγώγους μέσω των διαφορικών (4.53) και απαλείφοντας την \mathbf{p}^* χρησιμοποιώντας την (4.55) δίνει,

$$\begin{aligned}
& \left[\dot{\mathbf{K}}(t) + \mathbf{Q} + \mathbf{K}(t) \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \mathbf{K}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \right] \mathbf{x}^*(t) + \\
& + \left[\dot{\mathbf{s}}(t) + \mathbf{A}^T \mathbf{s}(t) - \mathbf{K}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{s}(t) - \mathbf{Q} \mathbf{r}(t) \right] = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Η εξίσωση αυτή πρέπει να ισχύει για όλες τις \mathbf{x}^* , \mathbf{r} , οπότε ο κάθε όρος πρέπει να μη-

δενίζεται:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{K}}(t) &= -\mathbf{Q} - \mathbf{K}(t)\mathbf{A} - \mathbf{A}^\top \mathbf{K}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top \mathbf{K}(t) \\ \dot{\mathbf{s}}(t) &= -\left[\mathbf{A}^\top - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^\top\right]\mathbf{s}(t) + \mathbf{Q}\mathbf{r}(t)\end{aligned}\quad (4.56)$$

Η εξίσωση για τον \mathbf{K} είναι η γνωστή μητρική *διαφορική εξίσωση Riccati*, που παρουσιάζεται σε πολλά προβλήματα της θεωρίας του αυτομάτου ελέγχου. Ο \mathbf{K} μπορεί να αποδειχθεί ότι είναι συμμετρικός (άσκηση για λύση;) και επομένως η Riccati είναι ένα σύστημα $n(n+1)/2$ διαφορικών εξισώσεων με συνοριακές συνθήκες που προκύπτουν από τις (4.52), (4.55):

$$\begin{aligned}\mathbf{p}^*(t_f) &= \mathbf{H}\mathbf{x}^*(t_f) - \mathbf{H}\mathbf{r}(t_f) \\ &= \mathbf{K}(t_f)\mathbf{x}^*(t_f) + \mathbf{s}(t_f) \Rightarrow \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H} \text{ και } \mathbf{s}(t_f) = -\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)\end{aligned}\quad (4.57)$$

Σε συνοπτική μορφή,

Πίνακας 4.1

Πρόβλημα παρακολούθησης γραμμικού συστήματος

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}(t)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 \right] dt$$

Περιορισμοί: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$

Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), t_0, t_f, \mathbf{H}, \mathbf{Q} \geq \mathbf{0}, \mathbf{R} > \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^\top(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{K}(t); \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H}$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = -\left[\mathbf{A}^\top(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\right]\mathbf{s}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t_f) = -\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{s}(t)$$

Για να λύσουμε λοιπόν το πρόβλημα, επιλύουμε εκ των προτέρων για τις $\mathbf{K}(t)$ και $\mathbf{s}(t)$ λύνοντας τις αντίστοιχες διαφορικές *ανάποδα* από τα συνηθισμένα αφού οι συνοριακές συνθήκες είναι στον τελικό χρόνο. Οι τιμές τους αποθηκεύονται και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του \mathbf{u}^* . Η διαδικασία αυτή γίνεται πιο προσιτή για διακριτά συστήματα, αφού στα συνεχή, θεωρητικά τουλάχιστον, απαιτούνται άπειρες τιμές.

Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbf{r}(t) \equiv \mathbf{0}$, έχουμε το πρόβλημα της *ρύθμισης*. Στην πε-

ρίπτωση αυτή, τα αποτελέσματα είναι, προφανώς, παρόμοια με την διαφορά ότι δεν εμφανίζεται ο όρος $r(t)$ και συνεπώς και η διαφορική εξίσωση για την $s(t)$.

Παράδειγμα 4.1 Να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος που διατηρεί το σύστημα,

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2x_1(t) - x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

κοντά στο $[0, 0]$ με ελάχιστο κόπο ελέγχου. Το συναρτησιακό υπό ελαχιστοποίηση είναι το,

$$J[u(t)] = \int_0^{15} \left[x_1^2(t) + \frac{1}{2} x_2^2(t) + \frac{1}{4} u^2(t) \right] dt$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι $x(0) = [-4 \ 4]^T$.

Η αντιστοίχιση των παραμέτρων δίνει:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, R = 1/2, H = 0$$

Έτσι η εξίσωση Riccati είναι,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{k}_{11}(t) & \dot{k}_{12}(t) \\ \dot{k}_{21}(t) & \dot{k}_{22}(t) \end{bmatrix} &= - \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ & \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

με τελικές συνθήκες,

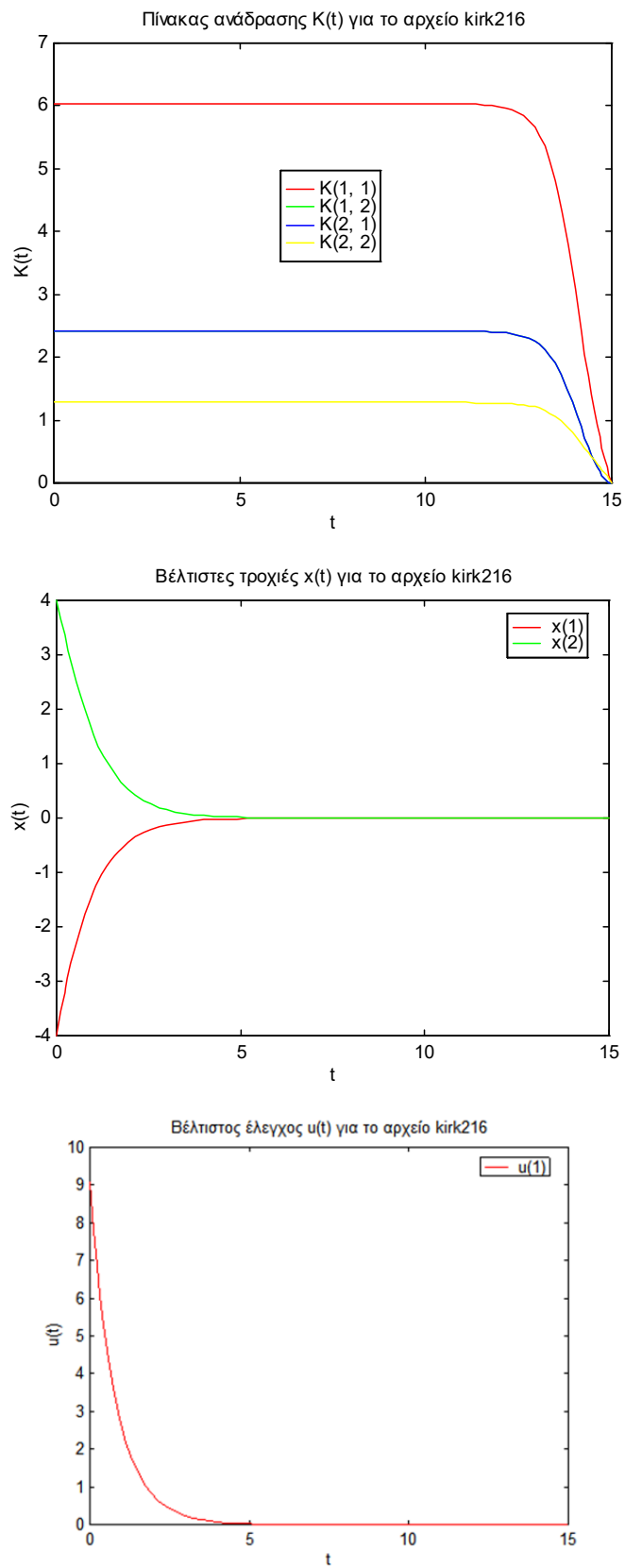
$$\begin{bmatrix} k_{11}(15) & k_{12}(15) \\ k_{21}(15) & k_{22}(15) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ενώ ο βέλτιστος έλεγχος,

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) \end{bmatrix} x(t) \\ &= -2k_{12}(t)x_1(t) - 2k_{22}(t)x_2(t) \end{aligned}$$

Η Riccati λύνεται εύκολα στο περιβάλλον *MATLAB*, ιδιαίτερα στις εκδόσεις 5 και μετά, όπου υπάρχει η δυνατότητα ορισμού πινάκων με περισσότερες από δύο διαστάσεις όπως απαιτείται για την αποθήκευση του $\mathbf{K}(t)$ (2 για τον πίνακα και μία για το t). Οι κατάλληλες ρουτίνες φαίνονται στο Παράρτημα Ι ενώ τα αποτελέσματα στο Σχ. 4.12.

© Α. Πουλιέζος



Σχήμα 4.12 Βέλτιστος έλεγχος και τροχιές

4.4.1.1 Άπειρος ορίζοντας

Στα προβλήματα ρύθμισης υπάρχει ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα όταν $t_f \rightarrow \infty$, και οι σχετικοί πίνακες είναι χρονικά αμετάβλητοι, δηλαδή το πρόβλημα είναι,

$$\min_{u(t)} J = \int_0^{\infty} \left(\|x(t)\|_Q^2 + \|u(t)\|_R^2 \right) dt \quad (4.58)$$

Για την ανάλυση της κατάστασης αυτής χρειαζόμαστε τις έννοιες της **σταθεροποιησιμότητας** (stabilizability) και **ανιχνευσιμότητας** (detectability):

Θεώρημα 4.1 Το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ είναι σταθεροποιήσιμο αν και μόνον αν υπάρχει πίνακας K έτσι ώστε ο πίνακας $(A + BK)$ να είναι ευσταθής (δηλαδή τα πραγματικά μέρη των ιδιοτιμών του να είναι αρνητικά).

Θεώρημα 4.2 Το σύστημα $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$, $y(t) = Dx(t)$, είναι ανιχνεύσιμο αν και μόνον αν το μη παρατηρήσιμο τμήμα του είναι ευσταθές.

Αν θέσουμε, $Q = DD^T$, τότε προκύπτουν οι παρακάτω συνθήκες:

Θεώρημα 4.3 Αν (A, B) είναι σταθεροποιήσιμο ζευγάρι, (D, A) ανιχνεύσιμο και $R > 0$ τότε ορ $K(t) \rightarrow K$ [Wonham, 1974].
 $t \rightarrow \infty$

Ο πίνακας K βρίσκεται και από την εξίσωση (4.56) θέτοντας $\dot{K}(t) = 0$,

$$0 = -KA - A^T K - Q + KBR^{-1}B^T K$$

που είναι η μητρική αλγεβρική εξίσωση Riccati. Ο πίνακας αυτός αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός, συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.

4.4.1.2 LQR άπειρου ορίζοντα με μικτό όρο

Σε κάποια προβλήματα (π.χ. έλεγχο ενεργούς ανάρτησης) η συνάρτηση κόστους (4.58) περιέχει το μικτό όρο xu , είναι δηλαδή της μορφής,

$$\min_{u(t)} J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2x^T(t) S u(t) \right\} dt \quad (4.59)$$

Τα προβλήματα αυτά μπορούν να μετασχηματισθούν έτσι ώστε να λυθούν μέσω των

εξισώσεων που ισχύουν για το απλούστερο πρόβλημα.

Για να μετασχηματίσουμε τη (4.59) χρησιμοποιούμε τη διανυσματική εκδοχή της τεχνικής της συμπλήρωσης τετραγώνων,

$$\begin{aligned} x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t) + 2x^T(t)Su(t) &= \\ &= (u(t) + R^{-1}S^T x)^T R(u(t) + R^{-1}S^T x) + x^T(Q - SR^{-1}S^T)x \end{aligned} \quad (4.60)$$

Στη συνέχεια ας γράψουμε την αρχική διαφορική ως,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (A - BR^{-1}S^T)x(t) + B(u(t) + R^{-1}S^T x(t)) = (A - BR^{-1}S^T)x(t) + B\tilde{u}(t) \\ \tilde{u}(t) &= u(t) + R^{-1}S^T x(t) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Παρατηρώντας τις (4.60), (4.61) βλέπουμε ότι η (4.59) γράφεται ως,

$$\min_{u(t)} J = \frac{1}{2} \int_0^\infty \left\{ x^T(t) \left[Q - SR^{-1}S^T \right] x(t) + \tilde{u}^T(t) R \tilde{u}(t) \right\} dt \quad (4.62)$$

Οι (4.61), (4.58) συνιστούν ένα πρόβλημα σε τυπική μορφή, του οποίου η λύση φαίνεται στον Πίν. 4.2.

Πίνακας 4.2

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= A - BR^{-1}S^T \\ \tilde{Q} &= Q - SR^{-1}S^T \\ \mathbf{0} &= -K\tilde{A} - \tilde{A}^T K - \tilde{Q} + KBR^{-1}B^T K \\ \tilde{u}^*(t) &= -R^{-1}B^T Kx(t) \\ u^*(t) &= \tilde{u}^*(t) - R^{-1}S^T x(t) = -R^{-1} \left[B^T K + S^T \right] x(t) \end{aligned}$$

4.4.1.3 Επιλογή των Q , R , S

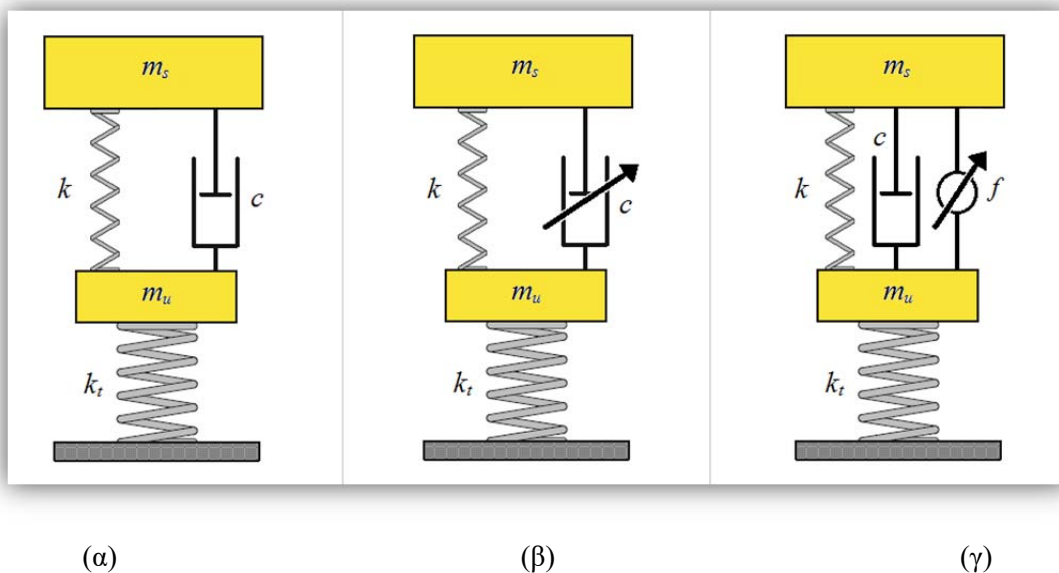
Η επιλογή των τιμών για τους πίνακες βαρών Q , R , S , παρ' όλο εν πολλοίς αυθαίρετη, εν τούτοις μπορεί να γίνει με μία απλή διαδικασία.

Κατ' αρχάς και οι τρεις πίνακες είναι σχεδόν πάντα διαγώνιοι. Στη συνέχεια η επιλογή των τιμών έχει δύο βήματα:

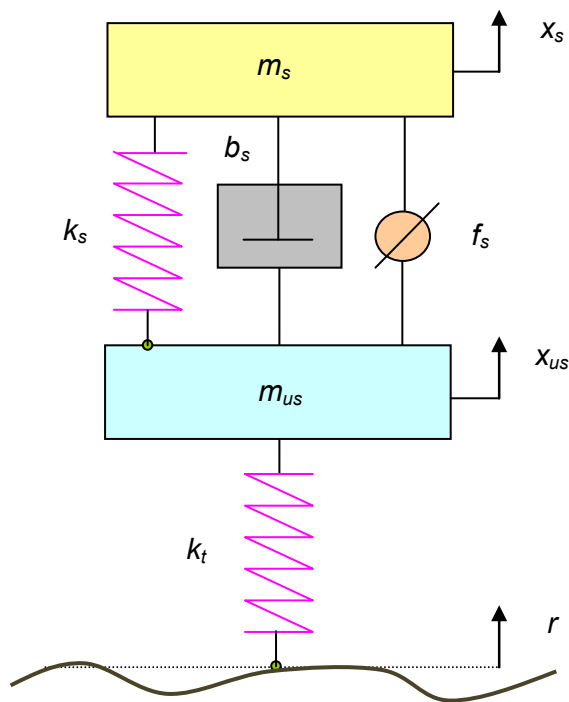
1. Στο πρώτο βήμα τα (διαγώνια) στοιχεία επιλέγονται έτσι ώστε όλοι οι όροι να έχουν την ίδια προσδοκώμενη τάξη. Δηλαδή αν το σήμα ελέγχου είναι της τάξης του 10^2 και η κατάσταση της τάξης του 10^{-2} , τότε $q_1=10^4$, $r_1=1$.
2. Στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε τους πίνακες που βρέθηκαν από το πρώτο βήμα, με ένα επιθυμητό συντελεστή βαρύτητας α, β, γ , όπου $\alpha+\beta+\gamma=1$.

Η διαδικασία αυτή δεν είναι αυστηρός κανόνας, γλυτώνει όμως τον σχεδιαστή από αχρείαστες επαναλαμβανόμενες εικασίες.

4.4.1.4 Παράδειγμα 4.2 Βέλτιστος έλεγχος ενεργούς ανάρτησης σε υπόδειγμα $\frac{1}{4}$



Σχήμα 4.13 Σχεδιαγράμματα διαφόρων ειδών αναρτήσεων



Σχήμα 4.14

Στο υπόδειγμα αυτό το m_s παριστάνει την μάζα του ταλαντευόμενου μέρους του αυτοκινήτου (σασί), m_{us} την μάζα του σταθερού τμήματος (σύστημα τροχών), k_s και b_s περιγράφουν την σταθερά παθητικού ελατηρίου και αποσβεστήρα που είναι τοποθετημένα μεταξύ του ταλαντευόμενου και σταθερού τμήματος του αυτοκινήτου και τέλος το k_t αναπαριστά την συμπίεσιτικότητα των ελαστικών. Οι μεταβλητές x_s , x_{us} και r συμβολίζουν την (κάθετη) μετατόπιση του σώματος του αυτοκινήτου, την μετατόπιση των τροχών και την μορφή του οδοστρώματος (διαταραχή) αντίστοιχα. Η δύναμη f_s εφαρμόζεται μεταξύ του ταλαντευόμενου και σταθερού τμήματος και είναι το ενεργητικό τμήμα του συστήματος ανάρτησης. Η δύναμη αυτή υπολογίζεται από το σύστημα ελέγχου που εφαρμόζεται.

Το μαθηματικό υπόδειγμα είναι,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_{us}} & \frac{b_s}{m_{us}} & -\frac{k_s + k_t}{m_{us}} & -\frac{b_s}{m_{us}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} \end{bmatrix} r(t) \quad (4.63)$$

με,

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s(t) \\ \frac{dx_s(t)}{dt} \\ x_{us}(t) \\ \frac{dx_{us}(t)}{dt} \end{bmatrix}, \quad u(t) = f_s(t) \quad (4.64)$$

Το σύνηθες κριτήριο απόδοσης που χρησιμοποιείται στη σχεδίαση των αναρτήσεων είναι «πολυδιάστατο» και συναποτελείται από:

1. **Κριτήριο ευστάθειας (κρατήματος):** διατήρηση του αυτοκινήτου σε παράλληλη ως προς το δρόμο θέση, και,
2. **Κριτήριο άνεσης:** ελαχιστοποίηση κατακόρυφων επιταχύνσεων εξαιτίας της γεωμετρίας του δρόμου.

Επιπλέον θα μπορούσε να προστεθεί και το,

3. **Κριτήριο εξοικονόμησης ενέργειας:** ελαχιστοποίηση κόστους ελέγχου.

Η μαθηματική περιγραφή των παραπάνω κριτηρίων είναι:

$$1. \quad \min_u J_1 = (x_s(t) - r(t))^2 \quad (4.65)$$

Η μορφή αυτή (4.65) όμως απαιτεί γνώση του r , δηλαδή της μορφολογίας του δρόμου, πράγμα προς το παρόν αδύνατο με εύκολο και φτηνό τρόπο. Έτσι, ένα τροποποιημένο κριτήριο είναι το,

$$1\alpha. \quad \min_u J_{1a} = x_s^2(t)$$

ή,

$$1\alpha. \quad \min_u J_{1a} = x^T(t) \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) \quad (4.66)$$

$$2. \quad \min_u J_2 = q_2 \dot{x}_s^2(t) \quad (4.67)$$

Και αυτό το κριτήριο έχει ένα προβληματάκι καθώς η επιτάχυνση δεν είναι μέρος του διανύσματος κατάστασης x . Όμως από την (4.63),

$$2. \quad \dot{x}_2(t) = \dot{x}_s(t) = \begin{bmatrix} -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} \end{bmatrix} x(t) + \frac{1}{m_s} u(t) \quad (4.68)$$

και η (4.67) γίνεται,

$$2. \quad \begin{aligned} \min_u J_2 &= [A_2 x(t) + b_2 u(t)]^T q_2 [A_2 x(t) + b_2 u(t)] = \\ &= x^T(t) A_2^T q_2 A_2 x(t) + q_2 b_2^2 u^2(t) + 2x^T(t) A_2^T q_2 b_2 u(t) \end{aligned} \quad (4.69)$$

Τέλος,

$$3. \quad \min_u J_3 = r u^2(t) \quad (4.70)$$

Συνδυάζοντας τις (4.66), (4.69), (4.70), το πρόβλημα βελτιστοποίησης είναι,

$$\min_{u(t)} J = \int_0^\infty \{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) + 2x^T(t) S u(t) \} dt \quad (4.71)$$

με,

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + A_2^T q_2 A_2, \quad R = q_2 b_2^2 + r, \quad S = A_2^T q_2 b_2$$

και q_1, q_2, r βάρη.

Έστω οι εξής τιμές:

Πίνακας 4.3 Τιμές παραμέτρων ενεργούς ανάρτησης

παράμετρος	μονάδα	τιμή
m_s	kg	1.460
m_{us}	kg	40
b_s	N·s/m	980
k_s	N/m	17.000
k_t	N/m	180.000

Για τις τιμές των q_1, q_2, r σκεφτόμαστε ως εξής:

Η τάξη μεγέθους του x_s^2 είναι 5×10^{-4} (m/s), του \ddot{x}_s^2 50×10^{-4} (m/s²) και του u^2 10^6 (N). Επομένως για τη σωστή κλίμακα $q_1=(1/5) \times 10^4, q_2=(1/50) \times 10^4, r=10^{-6}$. Αν θεωρήσουμε τους 3 όρους της ίδιας σημασίας μπορούμε ν' αφήσουμε τα q_1, q_2, r ως έχουν.

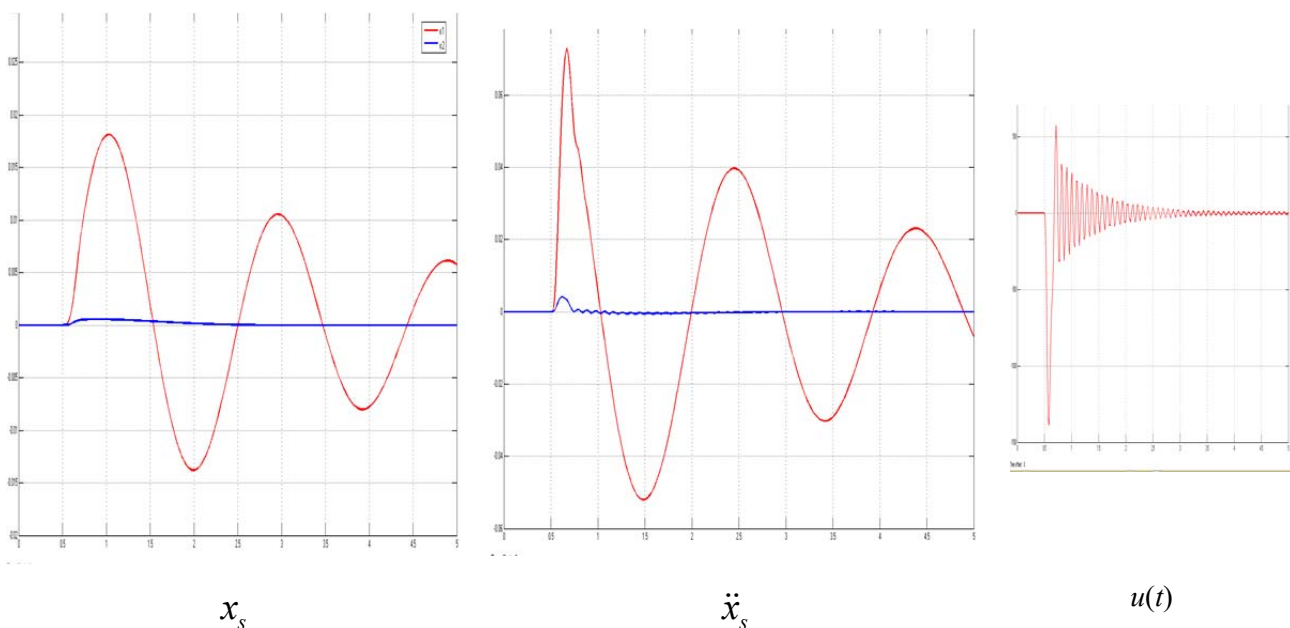
Με τις τιμές αυτές η εντολή $K = LQR(A, B, Q, R, S)$ δίνει,

$$K = 10^4 \times [-1,2087 \quad 0,2737 \quad 1,6556 \quad 0,0876]$$

ενώ τα αποτελέσματα της προσομοίωσης για,

$$r(t) = \begin{cases} 0,025 \times (1 - 8\sin\pi t), & 0,5 < t < 0,75 \\ 0, & t \leq 0,5, \quad t \geq 0,75 \end{cases}$$

φαίνονται στο Σχ. 4.15.



Σχήμα 4.15

4.4.2 Προβλήματα ελαχίστου χρόνου

Στα προβλήματα αυτά ο στόχος είναι να μετακινηθεί το σύστημα από μία αρχική θέση σε μία (δεδομένη) τελική σε ελάχιστο χρόνο. Μαθηματικά, το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t)$$

πρέπει να μετακινηθεί από το \mathbf{x}_0 στο $\mathcal{S}(t)$ με ελαχιστοποίηση του,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \int_{t_0}^{t_f} dt = t_f - t_0$$

Επίσης, το διάνυσμα ελέγχου φράζεται,

$$M_{i-} \leq u_i(t) \leq M_{i+}, i = 1, 2, \dots, m, t \in [t_0, t_f^*]$$

Όπως παρατηρούμε το σύστημα δίνεται σε μια ειδική μορφή που αποτελεί το πιο περίπλοκο σύστημα για το οποίο μπορούμε να εξάγουμε κάποια αναλυτικά αποτελέσματα. Για την λύση του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του μεγίστου. Η Χαμιλτονιανή είναι,

$$\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = 1 + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t), t)\mathbf{u}(t)]$$

Η αρχή του ελαχίστου επιβάλλει,

$$1 + \mathbf{p}^{*\Gamma}(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t)\mathbf{u}^*(t)] \leq 1 + \mathbf{p}^{*\Gamma}(t)[\mathbf{a}(\mathbf{x}^*(t), t) + \mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t)\mathbf{u}(t)] \Rightarrow \\ \mathbf{p}^{*\Gamma}(t)\mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t)\mathbf{u}^*(t) \leq \mathbf{p}^{*\Gamma}(t)\mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t)\mathbf{u}(t)$$

Επιμερίζοντας τον \mathbf{B} ,

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t) = [\mathbf{b}_1(\mathbf{x}^*(t), t) \quad \mathbf{b}_2(\mathbf{x}^*(t), t) \quad \dots \quad \mathbf{b}_m(\mathbf{x}^*(t), t)]$$

οπότε,

$$\mathbf{p}^{*\Gamma}(t)\mathbf{B}(\mathbf{x}^*(t), t)\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^m \mathbf{p}^{*\Gamma}(t)[\mathbf{b}_i(\mathbf{x}^*(t), t)]u_i(t)$$

Επομένως, υποθέτοντας ότι τα στοιχεία του \mathbf{u} είναι ανεξάρτητα, πρέπει να ελαχιστοποιηθεί κάθε όρος του αθροίσματος χωριστά. Αυτό επιτυγχάνεται με την εξής λογι-

κή:

$$\left. \begin{aligned} p^{*\top}(t)[b_i(x^*(t),t)] < 0 &\Rightarrow u_i^*(t) = M_{i+} \\ p^{*\top}(t)[b_i(x^*(t),t)] > 0 &\Rightarrow u_i^*(t) = M_{i-} \\ p^{*\top}(t)[b_i(x^*(t),t)] = 0 &\Rightarrow u_i^*(t), \text{ απροσδιόριστο} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, m \quad (4.72)$$

Όπως βλέπουμε, υπάρχει πρόβλημα αν η $p^{*\top}(t)[b_i(x^*(t),t)]$ είναι μηδέν για κάποιο πεπερασμένο χρονικό διάστημα. Η περίπτωση αυτή ονομάζεται **ιδιόμορφη συνθήκη**. Στο παρόν θα υποθέσουμε ότι τέτοια ενδεχόμενα δεν υφίστανται, έχουμε δηλαδή κανονικές συνθήκες.

Η λογική που εξάγαμε ονομάζεται έλεγχος **bang-bang**.

Στην περίπτωση που το σύστημα είναι γραμμικά αμετάβλητο,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

το ακόλουθο πρόβλημα καταλήγει σε περαιτέρω αναλυτικά αποτελέσματα:

Αν το διάνυσμα ελέγχου είναι φραγμένο, $|u_i(t)| \leq 1, i = 1, 2, \dots, m$ και το σύστημα είναι απολύτως ελέγξιμο και κανονικό, να βρεθεί ο βέλτιστος έλεγχος που μεταφέρει το σύστημα από την θέση x_0 στην θέση $x_f = 0$ σε ελάχιστο χρόνο. Το πρόβλημα αυτό καλείται **πρόβλημα ελαχίστου χρόνου του γραμμικού ρυθμιστή**. Στην περίπτωση αυτή αποδεικνύεται ότι ισχύουν τα ακόλουθα (Pontryagin, 1962):

Θεώρημα 4.4 Αν όλες οι ιδιοτιμές του A έχουν μη θετικά πραγματικά μέρη, τότε ο βέλτιστος έλεγχος υπάρχει και είναι μοναδικός (με άλλα λόγια η αρχή του μεγίστου είναι αναγκαία και ικανή συνθήκη στην περίπτωση αυτή).

Θεώρημα 4.5 Αν οι ιδιοτιμές του A είναι πραγματικές, και ο βέλτιστος έλεγχος υπάρχει, τότε κάθε στοιχείο του διανύσματος ελέγχου αλλάζει πρόσημο το πολύ $(n-1)$ φορές.

Παράδειγμα 4.3 Για ένα σύστημα που κινείται με βάση τη Νευτώνια μηχανική ισχύει,

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t)$$

όπου η x_1 είναι το ύψος (θετικό προς τα άνω), x_2 η ταχύτητα και u ο έλεγχος (επιτά-

χυνση, $|u(t)| \leq 1$). Ας απαιτήσουμε,

$$x_1(t_f^*) = 0, x_2(t_f^*) = 0$$

από οποιοσδήποτε αρχικές συνθήκες $x_1(t_0), x_2(t_0)$.

Οι πίνακες A, B είναι,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Οι ιδιοτιμές του A βρίσκονται από την εξίσωση $\det(\lambda I - A) = 0$ και είναι και οι δύο μηδέν, επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις των θεωρημάτων 4.4 και 4.5. Αυτό σημαίνει ότι, βάσει και της (4.72), ο βέλτιστος έλεγχος αλλάζει τιμή το πολύ μία φορά. Αυτό μπορεί να φανεί και από τις αναγκαίες συνθήκες για ελάχιστο. Η (4.72) λοιπόν δίνει,

$$\left. \begin{array}{l} p_2^*(t) < 0 \Rightarrow u^*(t) = 1 \\ p_2^*(t) > 0 \Rightarrow u^*(t) = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow u^*(t) = -\operatorname{sgn}(p_2^*(t))$$

Η Χαμιλτονιανή είναι,

$$\mathcal{H}(x(t), u(t), p(t), t) = 1 + p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t)$$

Οι εξισώσεις κατάστασης βρίσκονται από την (4.11),

$$\left. \begin{array}{l} \dot{p}_1^*(t) = 0 \\ \dot{p}_2^*(t) = -p_1^*(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} p_1^*(t) = c_1 \\ p_2^*(t) = -c_1 t + c_2 \end{array}$$

Η p_2 είναι γραμμική και επομένως αλλάζει πρόσημο το πολύ μία φορά, ανάλογα με τις τιμές του t και των σταθερών, επιβεβαιώνοντας έτσι την θεωρία.

Επειδή ο βέλτιστος έλεγχος μπορεί να αλλάξει πρόσημο το πολύ μία φορά, οι δυνατοί συνδυασμοί είναι,

$$u^*(t) = \begin{cases} +1, \forall t \in [t_0, t^*] \\ -1, \forall t \in [t_0, t^*] \\ +1, t \in [t_0, t_1] \text{ και } -1, t \in [t_1, t^*] \\ -1, t \in [t_0, t_1] \text{ και } +1, t \in [t_1, t^*] \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στις εξισώσεις κατάστασης και ολοκληρώνοντας λαμβάνουμε για τις τροχιές,

$$x_2(t) = \pm t + c_3 \tag{4.73}$$

$$x_1(t) = \pm \frac{1}{2} t^2 + c_3 t + c_4$$

ή χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες σε $t_0=0$,

$$x_2(t) = \pm t + x_2(0) \quad (4.74)$$

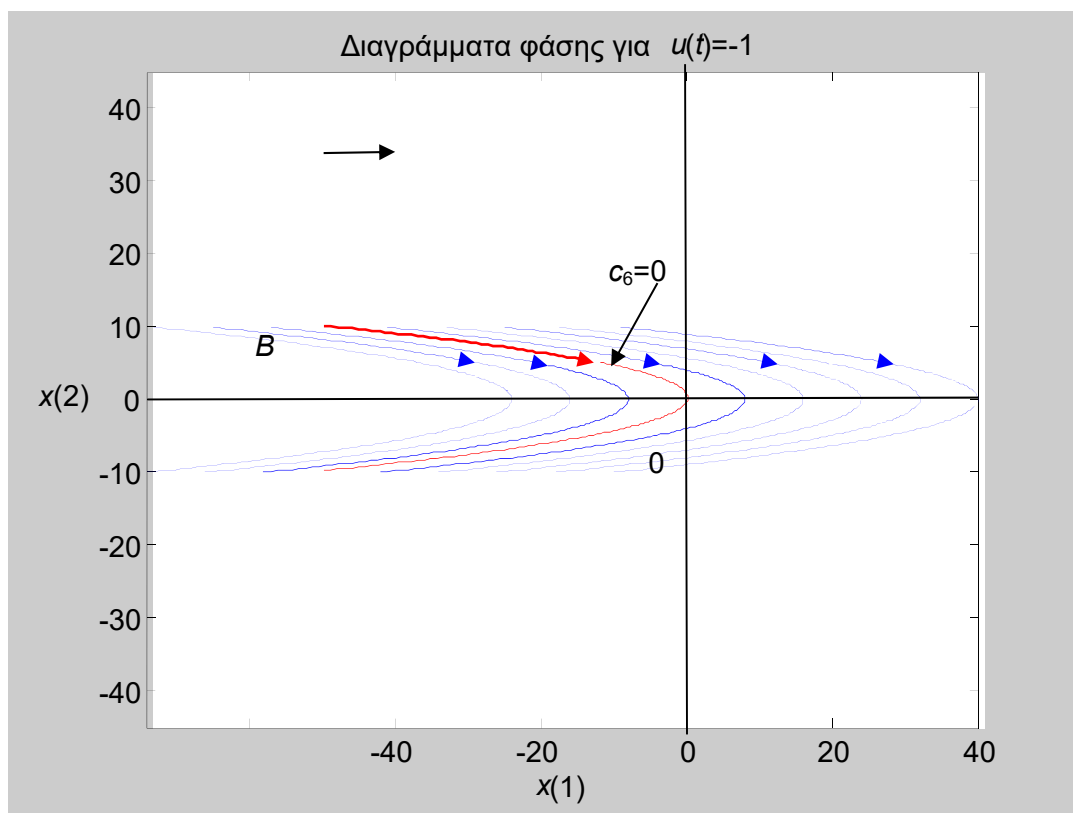
$$x_1(t) = \pm \frac{1}{2} t^2 + x_2(0)t + x_1(0)$$

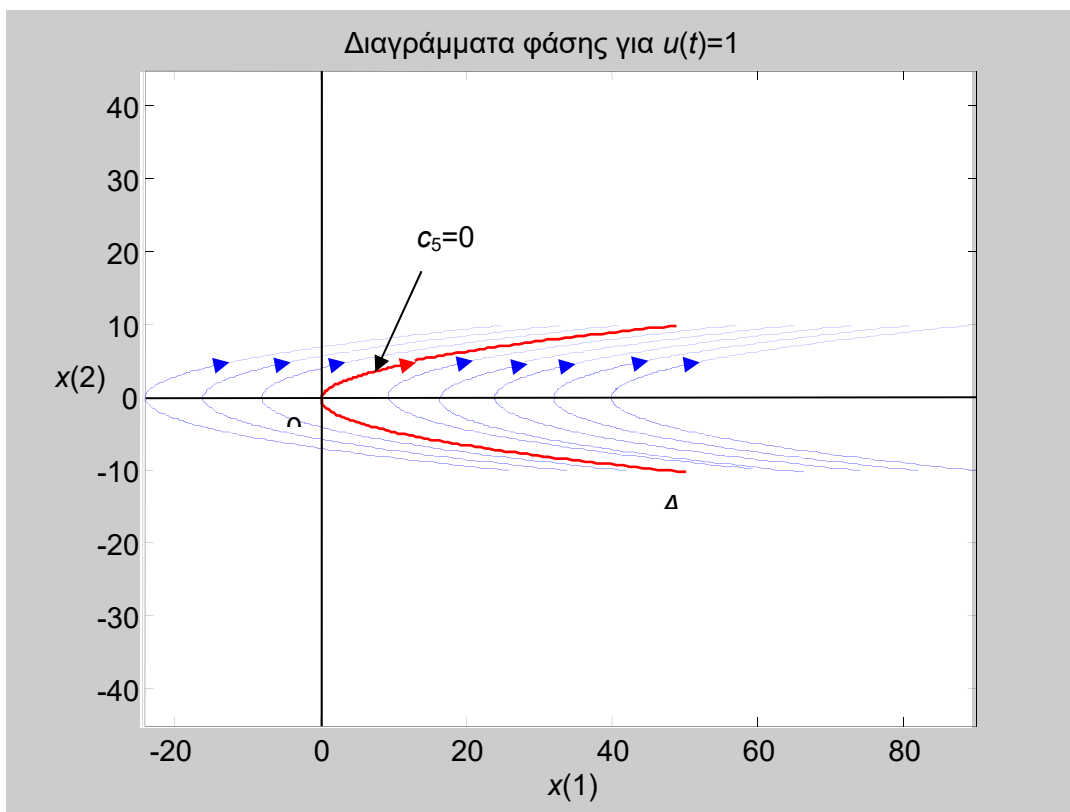
Αν απαλείψουμε το χρόνο από την (4.73), λαμβάνουμε τις **εξισώσεις φάσης**,

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t) + c_5, u^*(t) = +1 \quad (4.75)$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t) + c_6, u^*(t) = -1$$

Οι (4.75) ορίζουν παραβολές. Ενδεικτικές οικογένειες καμπυλών για διάφορα c_5, c_6 φαίνονται στο Σχ. 4.16.





Σχήμα 4.16 Διαγράμματα φάσης για το πρόβλημα ελάχιστου χρόνου

Για να προχωρήσουμε πρέπει να λάβουμε υπ’ όψη μας τις αρχικές συνθήκες. Παρατηρώντας προσεκτικά τα σχήματα 4.16, βλέπουμε ότι υπάρχουν δύο ιδιαίτερες καμπύλες, που έχουμε ονομάσει A0, B0 (που προκύπτουν όταν c_5 ή $c_6=0$). Αν η αρχική συνθήκη $x(t_0)$ τυχαίνει να κείται επί μίας των καμπυλών αυτών, τότε ο έλεγχος $u^*(t)=1$ ή $u^*(t)=-1$ αντίστοιχα θα μας οδηγήσει στο κέντρο των αξόνων. Αν η αρχική συνθήκη $x(t_0)$ τυχαίνει να κείται πάνω ή κάτω από τη καμπύλη A0B, τότε ξεκινάμε με τον έλεγχο $u^*(t)=-1$ ή $u^*(t)=1$ αντίστοιχα, μέχρι να συναντήσουμε την A0B, οπότε μεταπηδάμε στον έλεγχο $u^*(t)=1$ ή $u^*(t)=-1$ αντίστοιχα. Για το λόγο αυτό η καμπύλη A0B καλείται **καμπύλη μεταπήδησης (switching curve)**. Χρησιμοποιώντας τις 4.73 βρίσκουμε ότι,

$$x_1(t) = \frac{1}{2} x_2^2(t), u^*(t) = +1$$

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2^2(t), u^*(t) = -1$$

ή,

$$x_1(t) = -\frac{1}{2} x_2(t)|x_2(t)| \tag{4.76}$$

που είναι η εξίσωση της καμπύλης μεταπήδησης.

Για να βρούμε το χρόνο μεταπήδησης t_1 , πρέπει να υπολογίσουμε πότε η κατάσταση βρίσκεται επί της καμπύλης μεταπήδησης αντικαθιστώντας την 4.76 στις 4.73. Ας δούμε ένα συγκεκριμένο παράδειγμα.

Έστω $t_0=0$, $x(0)=[10 \ 10]^T$. Το σημείο αυτό βρίσκεται πάνω από τη καμπύλη μεταπήδησης αφού,

$$x_1(t) = 10 > -\frac{1}{2}x_2(t) \mid x_2(t) = -50$$

επομένως ξεκινάμε με $u^*(t)=-1$. Η (4.74) για τον έλεγχο αυτό δίνει,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{1}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0) \\x_2(t) &= -t + x_2(0)\end{aligned}$$

Επί της καμπύλης μεταπήδησης,

$$x_1(t) = -\frac{1}{2}x_2^2(t)$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}t^2 + x_2(0)t + x_1(0) &= -\frac{1}{2}(-t + x_2(0))^2 \\ \Rightarrow t^2 - 2x_2(0)t + \frac{1}{2}x_2^2(0) - x_1(0) &= 0 \\ \Rightarrow t = x_2(0) + \sqrt{x_1(0) + \frac{1}{2}x_2^2(0)}\end{aligned}$$

(η τελευταία αυτή εξίσωση ισχύει βέβαια γενικότερα).

Αντικαθιστώντας τις αρχικές τιμές βρίσκουμε,

$$t_1 \approx 17,75$$

Ας βρούμε και τον ελάχιστο (τελικό) χρόνο t_f^* . Στο χρόνο t_1 ισχύει,

$$x_2(t_1) = -t_1 + x_2(0)$$

ενώ στο χρόνο t_f^* επίσης,

$$0 = (t_f^* - t_1) + x_2(t_1) \Rightarrow t_f^* = 2t_1 - x_2(t_1)$$

(εδώ $u^*(t)=1$!). Αντικαθιστώντας,

$$t_f^* \approx 25,49$$

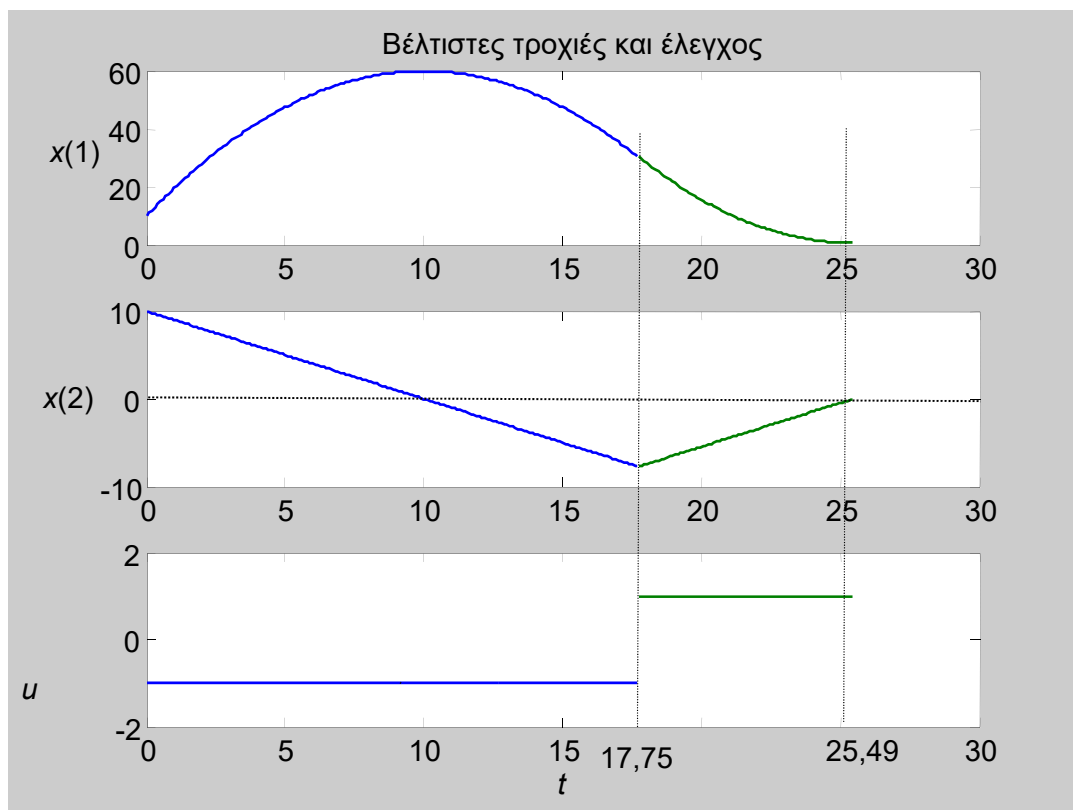
Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται ως εξής:

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & 0 < t < 17,75 \\ 1 & 17,75 < t < 25,49 \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = u^*(t)t^2 + 10t + 10$$

$$x_2^*(t) = u^*(t)t + 10$$

Στο Σχ. 4.17 φαίνονται τα αντίστοιχα γραφήματα.



Σχήμα 4.17 Διαγράμματα κατάστασης και ελέγχου για το πρόβλημα ελάχιστου χρόνου

Σημείωση: Κατά τη προσομοίωση του δεύτερου τμήματος των τροχιών, αρχίζουμε με $t=0$, αρχικές τιμές τις τελικές του πρώτου τμήματος, αλλά στο γράφημα παραμένει ο τρέχων χρόνος.

5 Στοχαστικά συστήματα

5.1 Διατύπωση του προβλήματος

Το πρόβλημα του βέλτιστου ελέγχου (για στοχαστικά συστήματα): Να βρεθεί ένας έλεγχος,

$$\mathbf{u}^*(t) \in U \quad (5.1)$$

που να αναγκάζει το σύστημα,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{v}(t), t), \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (5.2)$$

να ακολουθήσει μία αποδεκτή τροχιά,

$$\mathbf{x}^*(t) \in X \quad (5.3)$$

που ελαχιστοποιεί ή μεγιστοποιεί το κριτήριο απόδοσης,

$$J[\mathbf{u}(t)] = \mathbb{E} \left\{ h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \right\} \quad (5.4)$$

Δύο είναι οι διαφορές σε σχέση με τις (1.1)-(1.4). Πρώτον η ύπαρξη του όρου $\mathbf{v}(t)$ στην (5.2) και δεύτερον ο τελεστής της προσδοκώμενης τιμής στην (5.4). Ο όρος $\mathbf{v}(t)$ αντιπροσωπεύει εξωτερικές διαταραχές που δεν μπορούμε να επηρεάσουμε, και μαθηματικά περιγράφεται από μία **στοχαστική διαδικασία**.

Στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με την εξής ειδικότερη (και ευκολότερη) περίπτωση:

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J[\mathbf{u}(t)] = \mathbb{E} \left\{ \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_f)\|_H^2 + \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\{ \|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_R^2 \right\} dt \right\} \quad (5.5)$$

όπου το $\mathbf{x}(t)$ είναι η λύση του στοχαστικού διαφορικού συστήματος,

$$d\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)dt + \mathbf{C}d\mathbf{v}(t); \mathbf{x}(t_0) \sim \mathcal{N}\{\mathbf{m}_{t_0}, \mathbf{P}_{t_0}\} \quad (5.6)$$

Η στοχαστική διαδικασία $\{\mathbf{v}(t)\}$ είναι μία τυπική διανυσματική κίνηση Brown (δηλαδή με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαίο πίνακα συνδιασποράς). Ουσιαστικά η

(5.6) είναι το αντίστοιχο σύστημα (4.48) με τη πρόσθεση λευκού θορύβου. Λόγοι μαθηματικής αυστηρότητας επιβάλλουν όμως την έκφραση (5.6). Συνοπτικά αυτό συμβαίνει επειδή, ο λευκός θόρυβος δεν μπορεί να «σταθεί» μαθηματικά από μόνος του αλλά μόνο σε μορφή ολοκληρώματος της κίνησης Brown [Davis].

Το πρόβλημα αυτό στη σχετική βιβλιογραφία καλείται πρόβλημα **LQG**, από τα αρχικά **L**(inear) **Q**(uadratic) **G**(aussian), δηλαδή έχουμε να λύσουμε το πρόβλημα της εύρεσης του βέλτιστου ρυθμιστή για γραμμικά στοχαστικά συστήματα με λευκό θόρυβο και τετραγωνικές συναρτήσεις κόστους. Η λύση βασίζεται στην **Αρχή του Διαχωρισμού** [Davis].

Θεώρημα 5.1 Ο βέλτιστος έλεγχος του συστήματος (5.5)-(5.6) δίνεται από τον τύπο,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{K}}(t) &= -\mathbf{K}(t) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{K}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t); \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι εντυπωσιακό δεδομένου ότι ισοδυναμεί με την διαπίστωση ότι ο θόρυβος ουδόλως επηρεάζει τη βέλτιστη στρατηγική. Το μόνο που επηρεάζεται είναι το βέλτιστο κόστος, που στη περίπτωση αυτή είναι (για $t_0=0$),

$$J[\mathbf{u}^*] = \int_0^{t_f} \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{K}(s) \mathbf{C}) ds + \mathbf{m}^T(0) \mathbf{K}(0) \mathbf{m}(0) + \text{tr}(\mathbf{P}(0) \mathbf{K}(0))$$

(Προφανώς το αιτιοκρατικό ανάλογο είναι, $J[\mathbf{u}^*] = \mathbf{x}^T(0) \mathbf{K}(0) \mathbf{x}(0)$).

Ενδιαφέρον όμως παρουσιάζει η περίπτωση όπου δεν έχουμε πλήρεις μετρήσεις, δηλαδή οι μετρήσεις μας δίνονται από τη σχέση,

$$d\mathbf{y}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t)dt + \mathbf{G}d\mathbf{w}(t) \quad (5.7)$$

όπου η στοχαστική διαδικασία $\{\mathbf{w}(t)\}$ είναι παρόμοια με την $\{\mathbf{v}(t)\}$, και οι $\{\mathbf{w}(t)\}$, $\{\mathbf{v}(t)\}$, $\mathbf{x}(0)$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους για $\forall t \in [0, t_f]$. Στη περίπτωση αυτή,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t) \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\mathbf{K}}(t) &= -\mathbf{K}(t) \mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{K}(t) - \mathbf{Q} + \mathbf{K}(t) \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{K}(t); \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H} \end{aligned}$$

και το $\hat{\mathbf{x}}(t)$ είναι η γραμμική εκτιμήτρια ελαχίστων τετραγώνων του $\mathbf{x}(t)$ δεδομένων των μετρήσεων $\{\mathbf{y}(s), s \leq t\}$, ικανοποιεί δε την ακόλουθη στοχαστική διαφορική εξίσωση,

$$\begin{aligned} d\hat{x}(t) &= \left(A - P(t)H^T H(GG^T)^{-1} \right) \hat{x}(t)dt + P(t)H^T(GG^T)^{-1} dy(t) + Bu(t)dt \\ \hat{x}(0) &= m_0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

όπου ο πίνακας $P(t)$ ικανοποιεί με τη σειρά του την ακόλουθη μητρική διαφορική εξίσωση Riccati,

$$\begin{aligned} \dot{P}(t) &= CC^T - P(t)H(GG^T)^{-1}H^T P(t) + AP(t) + P(t)A^T \\ P(0) &= \text{cov}(x(0)) = P_0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

Οι εξισώσεις (5.8) και (5.9) συνιστούν το φημισμένο *φίλτρο Kalman*.

© Α. Πουλιέζος

Πίνακας 5.1 ΒΕΛΤΙΣΤΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ - «ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ»

1. Βελτιστοποίηση συναρτησιακών

Πρόβλημα ακρότατου	Παραδοχές εμπλεκόμενων συναρτήσεων	Αναγκαίες συνθήκες
$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$ <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f$</p>	<p>Η $\mathbf{x}(t)$ είναι συνεχής διανυσματική συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους.</p> <p>Η g είναι βαθμωτή συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές της.</p>	<p>Εξίσωση Euler-Lagrange</p> $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) \right] = \mathbf{0}$

<p>$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$</p> <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), t_0$.</p> <p>$\mathbf{x}(t_f), t_f$ ελεύθερα.</p>	<p>Η $\mathbf{x}(t)$ είναι συνεχής διανυσματική συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους.</p> <p>Η g είναι βαθμωτή συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές της.</p>	<p>Εξίσωση Euler-Lagrange</p> $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) \right] = \mathbf{0}$ <p>ΚΑΙ συνοριακές συνθήκες</p> $\left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[g(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_f), \dot{\mathbf{x}}^*(t_f), t_f) \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_f) \right] \delta t_f = 0$
<p>$J(\mathbf{x}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), t) dt$</p> <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f$</p>	<p>Η $\mathbf{x}(t)$ είναι συνεχής διανυσματική συνάρτηση και έχει <i>τμηματικά</i> συνεχείς πρώτες παραγώγους.</p> <p>Η g είναι βαθμωτή συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές της.</p>	<p>Εξίσωση Euler-Lagrange</p> $\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t), \dot{\mathbf{x}}^*(t), t) \right] = \mathbf{0}$ <p>ΚΑΙ συνθήκες γωνιών Weierstrass-Erdman</p> $\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1) = \frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1)$ $g(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-), t_1) \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^-) = g(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1) - \left[\frac{\partial g}{\partial \dot{\mathbf{x}}}(\mathbf{x}^*(t_1), \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+), t_1) \right]^T \dot{\mathbf{x}}^*(t_1^+)$

$J(\mathbf{w}) = \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) dt$ $\mathbf{w}_{(n+m) \times 1}(t) = [\mathbf{x}_{n \times 1}^T(t) \quad \mathbf{u}_{m \times 1}^T(t)]^T$ <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), \mathbf{x}(t_f), t_0, t_f$</p> <p>Περιορισμοί: $\mathbf{f}_{n \times 1}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) = \mathbf{0}$</p>	<p>Η $\mathbf{w}(t)$ είναι συνεχής διανυσματική συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες παραγώγους (ομαλή).</p> <p>Η g είναι βαθμωτή συνάρτηση και έχει συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές της.</p>	<p>Επαυξημένη συνάρτηση</p> $g_a(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) + \mathbf{p}^T(t)[\mathbf{f}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t)]$ <p>Euler-Lagrange επαυξημένης συνάρτησης</p> $\frac{\partial g_a}{\partial \mathbf{w}}(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial g_a}{\partial \dot{\mathbf{w}}}(\mathbf{w}^*(t), \dot{\mathbf{w}}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \right] = \mathbf{0}$ <p>ΚΑΙ εξισώσεις περιορισμών $\mathbf{f}_{n \times 1}(\mathbf{w}(t), \dot{\mathbf{w}}(t), t) = \mathbf{0}$</p>
--	---	---

© Α. Πουλιέζος

2. Βελτιστοποίηση συστημάτων

<p>$J(\mathbf{u}) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$</p> <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), t_0$</p> <p>Περιορισμοί: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)$</p>	<p>Οι $\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)$ είναι συνεχείς διανυσματικές συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες παραγώγους (ομαλές). Επιπλέον δεν είναι φραγμένες.</p> <p>Οι g, h είναι βαθμωτές συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές τους.</p>	<p>Χαμιλτονιανή:</p> $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t) [\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)]$ $\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \\ \mathbf{0} &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \end{aligned} \right\} \forall t \in [t_0, t_f]$ <p>ΚΑΙ συνοριακές συνθήκες</p> $\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[H(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$
--	--	---

$J(\mathbf{u}) = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt$ <p>Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), t_0$</p> <p>Περιορισμοί: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t),$ $\mathbf{u} \in U$</p>	<p>Οι g, h είναι βαθμωτές συναρτήσεις με συνεχείς πρώτες και δεύτερες μερικές παραγώγους ως προς όλες τις μεταβλητές τους.</p>	<p>Χαμιλτονιανή:</p> $\mathcal{H}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \mathbf{p}^T(t) [\mathbf{a}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t)]$ $\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}^*(t) &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \\ \dot{\mathbf{p}}^*(t) &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \end{aligned} \right\} \forall t \in [t_0, t_f]$ $\mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{p}^*(t), t) \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}^*(t), t), \forall \mathbf{u} \in U$ <p>ΚΑΙ συνοριακές συνθήκες</p> $\left[\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) - \mathbf{p}^*(t_f) \right]^T \delta \mathbf{x}_f + \left[H(\mathbf{x}^*(t_f), \mathbf{u}^*(t_f), \mathbf{p}^*(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}^*(t_f), t_f) \right] \delta t_f = 0$
--	---	--

Πρόβλημα παρακολούθησης γραμμικού συστήματος

$$\min_{\mathbf{u}(t)} J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{r}(t_f)\|_{\mathbf{H}}^2 + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \left[\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{r}(t)\|_{\mathbf{Q}(t)}^2 + \|\mathbf{u}(t)\|_{\mathbf{R}(t)}^2 \right] dt$$

Περιορισμοί: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t)$

Δεδομένα: $\mathbf{x}(t_0), t_0, t_f, \mathbf{H}, \mathbf{Q} \geq \mathbf{0}, \mathbf{R} > \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{K}}(t) = -\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^\top(t)\mathbf{K}(t) - \mathbf{Q}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{K}(t); \mathbf{K}(t_f) = \mathbf{H}$$

$$\dot{\mathbf{s}}(t) = -\left[\mathbf{A}^\top(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t) \right] \mathbf{s}(t) + \mathbf{Q}(t)\mathbf{r}(t), \mathbf{s}(t_f) = -\mathbf{H}\mathbf{r}(t_f)$$

$$\mathbf{u}^*(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}(t) - \mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^\top(t)\mathbf{s}(t)$$

© Α. Πουλιέζος

Παράρτημα Ι

Λίστες προγραμμάτων MATLAB (4.2)

Πρόγραμμα OPREGLIC

```

function flag = opreglic(InFil)
%
%   Calling syntax: opreglic('InFil')
%
%   Simulation of optimal linear regulator problem
%   Uses routines:
%   ricattic: Ricatti equation in LTI continuous form
%   steqlic: State equation in LTI continuous form.
%   ode45b:   modified ode45 to work if initial conditions are given
%             at final time
%   ode45c:   modified ode45 to accept control values as inputs
%   InFil:    Name of m file (without the .m extension) that contains
%             user supplied data. Its structure is best understood by
%             looking at an existing file e.g. Kirk216.m

global A AT Q RB BRB n r tk K KKT

%   Read input data file
eval(InFil);
[n,r] = size(B);
%   Speed-up operations
RB = -inv(R)*B';
BRB = -B*RB;
AT = A';

%   Γραφήματα
%   Σβήσε όλα τα γραφήματα
h = get(0,'Children');
for i = h';
    close
end
%   get figure handle

```



```

fig1 = figure;
% Αν το background χρώμα είναι μαύρο άλλαξέ το σε άσπρο
DFC = get(fig1,'Color');
if DFC == [0 0 0]
    whitebg;
end

% Solution of Ricatti equation with final conditions KT
% Transform final value matrix into column vector
KTCol = H(:);
[tk, K] = ode45b('ricattic', FinalT, InitialT, KTCol);
plot (tk, K);
title(['Πίνακας ανάδρασης K(t) για το αρχείο ', InFil]);
xlabel('t');
ylabel('K(t)')
% legend
jj = 0;
for i = 1: sqrt(size(K,2))
    for j = 1: sqrt(size(K,2))
        jj = jj + 1;
        lg(jj, :) = [ 'K(', num2str(i), ', ', num2str(j), ') '];
    end
end
end
h = legend(lg);
axes(h);
refresh;

% Solution of state equation with initial condition x0
[t,x,u] = ode45c('steqlc',InitialT,FinalT,x0);
fig = figure;
plot (t,x)
title(['Τροχιές κατάστασης x(t) για το αρχείο ', InFil]);
xlabel('t');
ylabel('x(t)');
% legend
jj = 0;
clear lg
for i = 1: size(x,2)
    jj = jj + 1;

```

```

        lg(jj, :) = [' x(', num2str(i), ') '];
    end
    h = legend(lg);
    axes(h);
    refresh;

    fig = figure;
    plot (t,u)
    title(['Βέλτιστος έλεγχος u(t) για το αρχείο ', InFil]);
    xlabel('t');
    ylabel('u(t)')
%    legend
    jj = 0;
    clear lg
    for i = 1: size(u,2)
        jj = jj + 1;
        lg(jj, :) = [' u(', num2str(i), ') '];
    end
    h = legend(lg);
    axes(h);
    refresh;

```

Πρόγραμμα RICATTIC

```

%    File ricattic.m for solving Ricatti equation in LTI ontinuous form

function KDot = ricattic(t, KCol)
global A AT Q RB BRB n r tk K KKT

%    Reshape column vector into nxn matrix
K = reshape(KCol, n, n);

%    Ricatti
KD = -K*A - AT*K - Q + K*BRB*K;

%    Transfrom matrix answer back to column vector
KDot = KD(:);

```

Πρόγραμμα STEQLIC

```

%    File steqlic.m for solving state equation for LTI continuous systems
%    with optimal control for regulation

```

```

function xDot = steqlc(t, x)
global A AT Q RB BRB n r tk K KKT

% extract continuous value for K from discrete solution
i = 1;
while (t < tk(i))
    i = i + 1;
end
KK = K(i, :);

KKT = reshape(KK, n, n);
xDot = (A - BRB * KKT) * x;

```

Πρόγραμμα ODE45

```

function [tout, yout] = ode45b(yprfun, t0, tfinal, y0, tol, trace)
%
% ODE45B Solve differential equations backwards
% Is based on ODE45
%
% Higher order method.
% ODE45B integrates a system of ordinary differential equations using
% 4th and 5th order Runge-Kutta formulas.
% [T,Y] = ODE45B('yprime', T0, Tfinal, Y0) integrates the system of
% ordinary differential equations described by the M-file YPRIME.M,
% over the interval T0 to Tfinal, with final conditions Y0.
% [T, Y] = ODE45(F, T0, Tfinal, Y0, TOL, 1) uses tolerance TOL
% and displays status while the integration proceeds.
%
% INPUT:
% F - String containing name of user-supplied problem description.
% Call: yprime = fun(t,y) where F = 'fun'.
% t - Time (scalar).
% y - Solution column-vector.
% yprime - Returned derivative column-vector; yprime(i) = dy(i)/dt.
% t0 - Initial value of t.
% tfinal- Final value of t.
% y0 - Final value column-vector.
% tol - The desired accuracy. (Default: tol = 1.e-6).

```

```

% trace - If nonzero, each step is printed. (Default: trace = 0).
%
% OUTPUT:
% T - Returned integration time points (column-vector).
% Y - Returned solution, one solution column-vector per tout-value.
%
% The result can be displayed by: plot(tout, yout).
%

% A. Pouliezos 10/94
% C.B. Moler, 3-25-87, 8-26-91, 9-08-92.
% Copyright (c) 1984-93 by The MathWorks, Inc.

% The Fehlberg coefficients:
alpha = [1/4 3/8 12/13 1 1/2]';
beta = [ [ 1 0 0 0 0 0 ]/4
         [ 3 9 0 0 0 0 ]/32
         [ 1932 -7200 7296 0 0 0 ]/2197
         [ 8341 -32832 29440 -845 0 0 ]/4104
         [-6080 41040 -28352 9295 -5643 0 ]/20520 ]';
gamma = [ [902880 0 3953664 3855735 -1371249 277020]/7618050
          [-2090 0 22528 21970 -15048 -27360]/752400 ]';

pow = 1/5;
if nargin < 5, tol = 1.e-6; end
if nargin < 6, trace = 0; end

% Initialization
t = t0;
% negative
hmax = (t - tfinal)/16;
h = hmax/8;
y = y0(:);
f = zeros(length(y),6);
chunk = 128;
tout = zeros(chunk,1);
yout = zeros(chunk,length(y));
k = 1;
tout(k) = t;

```

```

yout(k,:) = y.';

if trace
    clc, t, h, y
end

% The main loop

while (t > tfinal) & (t - h < t)
    if t - h < tfinal, h = t - tfinal; end

    % Compute the slopes
    temp = feval(yfun,t,y);
    f(:,1) = temp(:);
    for j = 1:5
        temp = feval(yfun, t-alpha(j)*h, y-h*f*beta(:,j));
        f(:,j+1) = temp(:);
    end

    % Estimate the error and the acceptable error
    delta = norm(h*f*gamma(:,2),'inf');
    tau = tol*max(norm(y,'inf'),1.0);

    % Update the solution only if the error is acceptable
    if delta <= tau
        t = t - h;
        y = y - h*f*gamma(:,1);
        k = k+1;
        if k > length(tout)
            tout = [tout; zeros(chunk,1)];
            yout = [yout; zeros(chunk,length(y))];
        end
        tout(k) = t;
        yout(k,:) = y.';
    end
end
if trace
    home, t, h, y
end
end

```

```

% Update the step size
if delta ~= 0.0
    h = min(hmax, 0.8*h*(tau/delta)^pow);
end
end

if (t < tfinal)
    disp('Singularity likely.')
    t
end

tout = tout(1:k);
yout = yout(1:k,:);

```

Αρχείο δεδομένων για το πρόβλημα kirk216

```

% Data file for optimal control problem Kirk216.m
% (Kirk p.216, Example 5.2-2)
%
% To define a new problem just edit the numbers and save under a
% new name with extension .m

% A matrix
A = [0 1; 2 -1];
% B matrix
B = [0; 1];
% Q matrix
Q = [2 0; 0 1];
% R matrix
R = .5;
% H matrix
H = [0 0; 0 0];
% Initial state vector x0
x0 = [-4; 4];
% Initial time t0
InitialT = 0;
% Final time tf
FinalT=15;

```

© Α. Πουλιέζος

Βιογραφίες



Ερνέστος ZERMELO (1871-1953). Γερμανός μαθηματικός, από τους σπουδαιότερους του 20^{ου} αιώνα. Ξεκίνησε μελετώντας θέματα του Λογισμού των Μεταβολών, ενώ στη συνέχεια ασχολήθηκε με την αξιωματική θεμελίωση της συνολοθεωρίας. Προσπαθώντας ν' αποδείξει την «Υπόθεση του Συνεχούς» του Cantor, πρότεινε το «Αξίωμα της επιλογής» και ένα σύνολο από επτά αξιώματα που θεμελιώναν, χωρίς απόδειξη, την Θεωρία Συνόλων. Τα επτά αυτά αξιώματα, συν τρία νέα, χρησιμοποιούνται ακόμη και σήμερα. Το 1935 παραιτήθηκε από την τιμητική έδρα του στο Freiburg im Breisgau σαν ένδειξη διαμαρτυρίας προς το καθεστώς του Χίτλερ, θέση που επανέκτησε το 1946.



Jacopo RICCATI (1676-1754). Ιταλός μαθηματικός που ασχολήθηκε κυρίως με την επίλυση διαφορικών εξισώσεων. Το όνομά του δόθηκε στην,

$$\frac{dy(x)}{dx} = P(x)y^2(x) + Q(x)y(x) + R(x)$$

(μη γραμμική ως προς y). Κάνοντας τον μετασχηματισμό,

$$y(x) = -\frac{1}{P(x)z(x)} \frac{dz(x)}{dx}$$

αυτή μετασχηματίζεται στην,

$$\frac{d^2z(x)}{dx^2} - \left(Q(x) + \frac{1}{P(x)} \frac{dP(x)}{dx} \right) \frac{dz(x)}{dx} + P(x)R(x)z(x) = 0$$

που είναι πλέον γραμμική ως προς z .

Βιβλιογραφία

- Καραμπετάκης Ν. (2009). Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.
- Παρασκευόπουλος Π.Ν. (1989). Βέλτιστος και στοχαστικός έλεγχος. Αυτοέκδοση, Αθήνα.
- Adby P.R. and M.A.H. Dempster (1974). Introduction to optimization methods. Chapman and Hall, London.
- Barnett S. (1975). Introduction to mathematical control theory. Oxford University Press, Oxford.
- Berkovitz L.D. (1974). Optimal control. Springer-Verlag.
- Davis M.H.A. (1977). Linear estimation and stochastic control. Chapman & Hall.
- Elsgolts L. (1970). Differential equations and the calculus of variations. MIR Publishers, Moscow.
- Gelfand I.M. and S.V. Fomin (1963). Calculus of variations. Prentice-Hall, Inc.
- Goldstein H. (1971). Classical mechanics. Addison-Wesley.
- Kalman R.E. (1960). “Contributions to the theory of optimal control”, *Bol. Soc. Mat. Mex.*, 102-119.
- Kirk D.E. (1970). Optimal control theory - An introduction. Prentice-Hall, Inc.
- Kwakernaak H. and R. Sivan (1972). Linear optimal control systems. Wiley.
- Lewis F.L. and V.L. Syrmos (1995). Optimal control. Wiley, 2nd ed.
- Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. and E.F. Mishchenko (1962). The mathematical theory of optimal processes. Interscience Publishers, Inc., New York.
- Sage A.P. and C.C. White III (1977). Optimum systems control (2nd ed.). Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- Vincent T. and J. Grantham (2001). Μη γραμμικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου και βέλτιστος έλεγχος. Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη.
- Whittle P. (1996). Optimal control. Wiley.

Εκδογροφία

1.15: διόρθωση εξίσωσης πριν την (3.2)

1.19: βελτίωση βραχιστόχρονου

2.1: διόρθωση Διδούς

© Α. Πουλιέζος