Ueber die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

1.

Auf Veranlassung meines verehrten Collegen, Herrn A. Stodola, beschäftigte ich mich vor einiger Zeit mit der Frage, wann eine Gleichung n^{ten} Grades mit reellen Coefficienten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

nur solche Wurzeln besitzt, deren reelle Bestandtheile negativ sind. Wenn auch die Erledigung dieser Frage nach den Methoden von Sturm, Liouville, Cauchy und Hermite keine principielle Schwierigkeit bietet, so erlaube ich mir doch das Resultat, zu welchem ich gelangt bin, hier mitzutheilen, weil dasselbe wegen seiner einfachen, für die Anwendungen brauchbaren Gestalt vielleicht einiges Interesse verdient*).

Die Herleitung des Resultates giebt mir zugleich Gelegenheit, die Methode von Hermite-Jacobi in einer Form darzustellen, in welcher sie eine Verallgemeinerung nach verschiedenen Richtungen zulässt.

Man darf sich, was hier geschehen soll, offenbar auf den Fall beschränken, wo der Coefficient a_0 positiv ist. Denn andernfalls kann man die linke Seite der Gleichung mit dem Factor -1 multipliciren. Man bilde nun die Determinante

---

*) Herr Stodola benutzt mein Resultat in seiner Abhandlung über „die Regulirung von Turbinen“ (Schweiz. Bauzeitung, Bd. 23, Nr. 17, 18), deren Ergebnisse bei der Turbinenanlage des Badeortes Davos mit glänzendem Erfolge Anwendung gefunden haben. — Die obige Frage wird auch, worauf mich Herr Stodola aufmerksam machte, in Thomson und Tait's Natural Philosophy (1886. Theil I, pag. 390) aufgeworfen und ihre Erledigung als wünschenswerth bezeichnet.

$$(1) \qquad \Delta_\lambda = \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & \dots & a_{2\lambda-1} \\ a_0, & a_2, & a_4, & \dots & a_{2\lambda-2} \\ 0, & a_1, & a_3, & \dots & a_{2\lambda-3} \\ . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & a_\lambda \end{vmatrix}$$

nach der Maassgabe, dass die Indices in der ersten Horizontalreihe immer um zwei Einheiten wachsen, in jeder Verticalreihe immer um eine Einheit abnehmen. Dabei ist allgemein $a_\varkappa = 0$ zu setzen, wenn der Index $\varkappa$ negativ oder grösser als n ist.

Dies vorausgeschickt, gilt der Satz:

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung

$$(2) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

in welcher der Coefficient a_0 positiv vorausgesetzt wird, nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, ist die, dass die Werthe der Determinanten

$$(3) \qquad \Delta_1 = a_1, \ \Delta_2, \ \Delta_3, \dots \Delta_n$$

sämmtlich positiv sind.

Zu diesem Satze ist noch folgendes zu bemerken. Die Determinante Δ_n ist, wie man leicht erkennt, indem man sie nach den Elementen der letzten Verticalreihe entwickelt, gleich $a_n \cdot \Delta_{n-1}$.

Daher ist die Forderung, dass Δ_{n-1} und Δ_n positiv sein sollen, gleichbedeutend mit der anderen, dass Δ_{n-1} und a_n positiv sein sollen. Der obige Satz bleibt also richtig, wenn a_n an Stelle von Δ_n gesetzt wird. Eine andere Bemerkung ist diese:

Betrachtet man die Reihe der Determinanten

$$(4) \qquad \Delta_1, \ \Delta_2, \ \Delta_3, \ \Delta_4, \dots,$$

so verschwinden die Glieder dieser Reihe vom $(n+1)^{\text{sten}}$ ab identisch, d. h. für unbestimmt gedachte Werthe von $a_0, a_1, \dots a_n$. Denn die Elemente der letzten Verticalreihe von Δ_λ sind für $\lambda > n$ sämmtlich Null. Die Bedingung des Satzes kann also auch dahin ausgesprochen werden, dass die nicht identisch verschwindenden Glieder der Reihe (4) sämmtlich positiv sein müssen. Die Glieder dieser Reihe sind ausführlich geschrieben diese:

$$a_1, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ a_0, & a_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5 \\ a_0, & a_2, & a_4 \\ 0, & a_1, & a_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & a_5, & a_7 \\ a_0, & a_2, & a_4, & a_6 \\ 0, & a_1, & a_3, & a_5 \\ 0, & a_0, & a_2, & a_4 \end{vmatrix}, \dots,$$

und man bildet hiernach ohne Weiteres die Bedingungen für jeden speciellen Werth von n.

Beispielsweise lauten die Bedingungen für die Gleichung 4^{ten} Grades $(n = 4)$:

$$a_1 > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3 \\ a_0, & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_1, & a_3, & 0 \\ a_0, & a_2, & a_4 \\ 0, & a_1, & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad a_4 > 0.$$

Herr Stodola hat bemerkt, dass eine *nothwendige* Bedingung dafür, dass die Gleichung (2) nur Wurzeln mit negativen reellen Bestandtheilen besitzt, die ist, dass sämmtliche Coefficienten $a_0, a_1, \ldots a_n$ positiv sind. In der That: wenn die reellen Bestandtheile aller Wurzeln der Gleichung (2) negativ sind, so hat jeder reelle Linearfactor der linken Seite der Gleichung die Form $x+p$ und jeder reelle quadratische Factor die Form $(x+p_1)^2 + p_2^2 = x^2 + p'x + p''$, wo p, p_1, p_2, p', p'' positive Grössen bezeichnen. Da aber das Product von ganzen Functionen mit positiven Coefficienten ebenfalls positive Coefficienten besitzt, so wird auch die linke Seite der Gleichung (2) nur positive Coefficienten aufweisen.

2.

Die ganze rationale Function $f(x)$, deren Coefficienten zunächst auch complexe Werthe besitzen können, möge der einen Bedingung unterworfen sein, dass sie für keinen rein imaginären Werth von x verschwindet. Bezeichnen dann N bez. P die Anzahlen der Nullstellen von $f(x)$, die negativen bez. positiven reellen Theil besitzen, so ist

$$N + P = n, \tag{5}$$

unter n den Grad von $f(x)$ verstanden. Es sei nun c eine beliebige (complexe) Constante und

$$cf(x) = \varrho \cdot e^{i\pi\varphi}, \tag{6}$$

so dass ϱ den absoluten Betrag und $\pi\varphi$ das Argument von $cf(x)$ bezeichnet. Der Winkel φ ändert sich stetig mit dem Werthe von x und nimmt insbesondere um

$$N - P = \Delta \tag{7}$$

Einheiten ab, wenn x die rein imaginären Zahlen von $+i\infty$ bis $-i\infty$ durchläuft. Man erkennt dies unmittelbar, wenn man, unter Benutzung der üblichen geometrischen Darstellung der complexen Zahlen, die Aenderung des Argumentes des einzelnen Linearfactors von $f(x)$ verfolgt. Nach (5) und (7) ist nun

$$N = \frac{n+\Delta}{2}, \quad P = \frac{n-\Delta}{2}. \tag{8}$$

Die Bestimmung von Δ wird jetzt in bekannter Weise auf die eines Cauchy'chen Index*) zurückgeführt. Allgemein hat man unter dem Index einer Grösse R, die in jedem Punkte einer in bestimmtem Sinne zu durchlaufenden Linie L einen bestimmten reellen Werth besitzt, die folgendermassen zu bildende Zahl zu verstehen. Man ordne jedem Punkte von L, in welchem R unendlich wird, die Zahl 0, oder $+1$ oder -1 zu, je nachdem R beim Ueberschreiten des Punktes das Zeichen nicht wechselt oder von negativen zu positiven oder von positiven zu negativen Werthen übergeht. Der Index von R bezüglich der Linie L ist dann die Summe aller den Unendlichkeitspunkten von R zugeordneten Zahlen. Man setzt hierbei stillschweigend voraus, dass R nur in einer endlichen Zahl von Punkten unendlich werdend das Zeichen wechselt, und dass $\frac{1}{R}$ in der Umgebung dieser Punkte stetig ist.

Dies in Erinnerung gebracht, sei z eine reelle Veränderliche und

$$cf(-iz) = U + iV, \tag{9}$$

wo U und V ganze Functionen von z mit reellen Coefficienten bezeichnen. Wird nun

$$\frac{V}{U} = R(z) \tag{10}$$

gesetzt, so hat man

$$\varphi = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} R(z),$$

und aus dieser Gleichung folgt, dass Δ übereinstimmt mit dem Index von $R(z)$ bezüglich der im Sinne der wachsenden z zu durchlaufenden reellen z-Axe (die als eine im Unendlichen geschlossene Linie anzusehen ist). Im Folgenden nehme ich an, dass $R(z)$ für $z = \infty$ nicht unendlich wird, was offenbar gestattet ist, da man über die Constante c willkürlich verfügen kann.

3.

Es sei jetzt $R(z)$ irgend eine rationale Function von z mit reellen Coefficienten, die für $z = \infty$ endlich bleibt.

Der Index von $R(z)$ (bezüglich der im Sinne der wachsenden z zu durchlaufenden Axe der reellen Zahlen) lässt sich bekanntlich durch das Sturm'sche Divisionsverfahren oder nach Hermite durch Aufstellung einer quadratischen Form bestimmen, deren Signatur mit dem gesuchten Index übereinstimmt. Unter „Signatur" einer quadratischen Form mit reellen Coefficienten verstehe ich dabei mit Hrn. Frobenius**)

*) Journal de l'école polytechnique, XV. (1837). Der Cauchy'sche Index ist als specieller Fall in dem von Kronecker eingeführten Begriff der Charakteristik von Functionensystemen (Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1869) enthalten.

**) Ueber das Trägheitsgesetz der quadratischen Formen. (Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften. 1894).

die Differenz zwischen der Zahl der positiven und der negativen Quadrate, die bei der Darstellung der Form durch ein Aggregat von möglichst wenigen Quadraten reeller Linearfunctionen auftreten.

Man wird zu dieser Hermite'schen Bestimmungsweise des Index von $R(z)$ auf folgendem Wege geführt. Bezeichnet

$$\Theta(z) = y_0 + y_1 z + y_2 z^2 + \cdots + y_{m-1} z^{m-1} \tag{11}$$

eine ganze rationale Function von z, deren Coefficienten als willkürliche Parameter angesehen werden, so stellt das Integral

$$F_m = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,[\Theta(z)]^2\,dz, \tag{12}$$

erstreckt durch eine alle Pole von $R(z)$ einschliessende Curve, eine quadratische Form der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ dar, die als Coefficient von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung von $R(z)[\Theta(z)]^2$ nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{z}$ leicht gebildet werden kann*). Andererseits ist das Integral gleich der Summe der Residuen von $R(z)[\Theta(z)]^2$, die den Polen von $R(z)$ entsprechen. Es sei $z = a$ ein einfacher Pol von $R(z)$ und

$$R(a+t) = \frac{c}{t} + c_1 + c_2 t + \cdots. \tag{13}$$

dann ist das auf $z = a$ bezügliche Residuum

$$c \cdot [\Theta(a)]^2.$$

Wenn a reell ist, so liefert der Pol $z = a$ den Beitrag $+1$ oder -1 zu dem Index von $R(z)$ je nachdem c positiv oder negativ ist. Wenn a imaginär ist und $\bar{a}$ den zu a conjugirten Pol bezeichnet, so ist die Summe der auf a und $\bar{a}$ bezüglichen Residuen

$$c[\Theta(a)]^2 + \bar{c}[\Theta(\bar{a})]^2 = (P + iQ)^2 + (P - iQ)^2 = 2P^2 - 2Q^2,$$

wo P und Q reelle Linearfunctionen sind. Hieraus folgt — zunächst unter der Voraussetzung, dass $R(z)$ nur einfache Pole besitzt — der Satz:

Bezeichnet n die Zahl der Pole von $R(z)$, so lässt sich die quadratische Form F_m als ein Aggregat von n Quadraten darstellen, wobei

---

*) An Stelle des Integrales (2) kann man mit gleichem Erfolge auch das Integral $\frac{1}{2\pi i}\int R(z)\cdot\frac{[\Theta(z)]^2}{(z-\alpha)^{2m}}\,dz$, erstreckt um die Stelle $z = \alpha$, betrachten, unter α einen reellen Werth verstanden, für welchen $R(z)$ endlich bleibt. Für dieses Integral spielt $z = \alpha$ dieselbe Rolle, wie $z = \infty$ für das Integral (12). Im Zusammenhange hiermit steht die unmittelbar einleuchtende Thatsache, dass der Index von $R\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$ gleich ist dem Index von $R(z)$, falls a, b, c, d reelle Constanten bedeuten, deren Determinante $ad - bc$ positiv ist.

zugleich die Differenz zwischen der Zahl der positiven und der Zahl der negativen Quadrate gleich dem Index von $R(z)$ ist.

Dieser Satz gilt aber auch für den Fall, dass $R(z)$ Pole von beliebiger Multiplicität besitzt, wo dann unter n die Zahl der Pole, jeder mit seiner Multiplicität gezählt, zu verstehen ist*). Es sei, um dies zu beweisen, $z = a$ ein λ-facher Pol von $R(z)$ und

$$R(a+t) = \frac{c}{t^\lambda} + \frac{c_1}{t^{\lambda-1}} + \cdots + \frac{c_{\lambda-1}}{t} + \cdots,$$

$$\Theta(a+t) = \Theta_0(a) + \Theta_1(a)t + \Theta_2(a)t^2 + \cdots,$$

wo $\Theta_0(a)$, $\Theta_1(a), \ldots$ lineare Formen der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ bezeichnen. Das $z = a$ entsprechende Residuum lautet dann:

$$c_{\lambda-1}\Theta_0^2 + 2c_{\lambda-2}\Theta_0\Theta_1 + \cdots + c(2\Theta_0\Theta_{\lambda-1} + 2\Theta_1\Theta_{\lambda-2} + \cdots).$$

Je nachdem nun λ gerade oder ungerade ist, lässt sich dieses Residuum in die Gestalt

$$\Theta_0\psi_0 + \Theta_1\psi_1 + \cdots + \Theta_{\mu-1}\psi_{\mu-1} \qquad (\lambda = 2\mu)$$

oder

$$\Theta_0\psi_0 + \Theta_1\psi_1 + \cdots + \Theta_{\mu-1}\psi_{\mu-1} + c\Theta_\mu^2 \quad (\lambda = 2\mu+1)$$

setzen, wo $\psi_0, \psi_1, \ldots$ lineare Functionen der Parameter bedeuten.

Ist a reell, so sind die Coefficienten von $\Theta_0, \Theta_1, \ldots \psi_0, \psi_1, \ldots$ ebenfalls reell und das Residuum kann in die Form

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\psi_0)\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\psi_0)\right]^2 + \cdots + \left[\tfrac{1}{2}\Theta_{\mu-1} + \psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$- \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1} - \psi_{\mu-1})\right]^2 \quad (\lambda = 2\mu)$$

oder

$$\left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0+\psi_0)\right]^2 - \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_0-\psi_0)\right]^2 + \cdots + \left[\tfrac{1}{2}\Theta_{\mu-1} + \psi_{\mu-1})\right]^2$$
$$- \left[\tfrac{1}{2}(\Theta_{\mu-1} - \psi_{\mu-1})\right]^2 + c\Theta_\mu^2 \quad (\lambda = 2\mu+1)$$

gebracht werden, in welcher es als Aggregat von λ Quadraten reeller Linearformen erscheint.

Dabei treten, wenn λ gerade ist, genau so viele positive wie negative Quadrate auf; dagegen tritt, wenn λ ungerade ist, ein positives oder ein negatives Quadrat mehr auf, je nachdem c positiv oder

---

*) Dass die auf die Sturm'schen Reihen bezüglichen Deductionen mit den geeigneten Modificationen auch noch gültig bleiben, wenn die in Betracht kommenden ganzen Functionen mehrfache Linearfactoren besitzen, bemerkt Kronecker in seiner Abhandlung: Zur Theorie der Elimination einer Variabeln aus zwei algebraischen Gleichungen (Monatsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften, 1881).

negativ ist. Die Discussion des Falles, wo $z = a$ complex ist, ist in ähnlicher Weise zu erledigen, und man erkennt so die allgemeine Gültigkeit des obigen Satzes.

4.

Ist $m > n$, so besitzt die quadratische Form F_m eine verschwindende Determinante, da sich die Form als Aggregat von n Quadraten, also als eine Form von weniger als m linearen Verbindungen der Parameter $y_0, y_1, \ldots y_{m-1}$ darstellen lässt. Hingegen ist die Determinante der Form F_n von Null verschieden. Man kann dies entweder dadurch beweisen, dass man die Uebereinstimmung dieser Determinante mit der Resultante von Zähler und Nenner der in reducirter Form geschriebenen rationalen Function $R(z)$ zeigt (vgl. unten Nr. 6), oder auch auf folgendem Wege:

Würde die Determinante von F_n verschwinden, so könnte man solche nicht sämmtlich verschwindende Werthe von $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ finden, für welche $\frac{\partial F_n}{\partial y_0}, \frac{\partial F_n}{\partial y_1}, \ldots \frac{\partial F_n}{\partial y_{n-1}}$, d. h. also die Integrale

$$(14) \qquad \frac{1}{2\pi i}\int R(z) \,.\, \Theta(z) \,.\, z^\lambda \, dz \quad (\lambda = 0, 1, \ldots n-1)$$

sämmtlich Null sind. Wenn nun

$$(15) \qquad R(z) \,.\, \Theta(z) = G(z) + R_1(z)$$

ist, wo $G(z)$ eine ganze rationale Function von z und

$$(16) \qquad R_1(z) = R(z) \cdot \Theta(z) - G(z) = \frac{k'}{z} + \frac{k''}{z^2} + \cdots$$

eine für $z = \infty$ verschwindende rationale Function bezeichnet, so ist für das Verschwinden jener Integrale erforderlich, dass

$$k' = k'' = \cdots = k^{(n)} = 0$$

ist, dass also $R_1(z)$ mindestens von der $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung für $z = \infty$ verschwindet. Da aber $R_1(z)$ nur an den Polen von $R(z)$, also höchstens n Mal unendlich werden kann, so muss $R_1(z)$ identisch verschwinden. Die hieraus folgende Gleichung $R(z) \,.\, \Theta(z) = G(z)$ ist aber unmöglich, da $\Theta(z)$ höchstens vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade ist und $R(z)$ n Pole besitzt.

5.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun folgendes Verfahren zur Bestimmung des Index von $R(z)$:

Es sei

$$(17) \qquad R(z) = c + \frac{c_0}{z} + \frac{c_1}{z^2} + \frac{c_2}{z^3} + \cdots$$

die Entwicklung von $R(z)$ in der Umgebung von $z=\infty$. Der Factor von $\frac{1}{z}$ in der Entwicklung des Productes aus $R(z)$ und

(18)
$$[\Theta(z)]^2=\sum_{i,k} y_i y_k z^{i+k} \quad (i,k=0,1\dots m-1)$$

ist dann

(19)
$$F_m=\sum_{i,k} c_{i+k} y_i y_k \quad (i,k=0,1,\dots m-1),$$

und die Determinante der Form F_m stellt sich dar in der Gestalt:

(20)
$$D_m=\begin{vmatrix} c_0, & c_1, & \dots & c_{m-1} \\ c_1, & c_2, & \dots & c_m \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m-1}, & c_m, & \dots & c_{2m-2} \end{vmatrix}.$$

In der Reihe der Determinanten

(21)
$$D_1,\ D_2,\ D_3,\ \dots$$

sind nun alle Glieder von einem bestimmten, etwa D_{n+1}, ab gleich Null, während D_n von Null verschieden ist. Es giebt dann n die Zahl der Pole von $R(z)$ an, und der Index von $R(z)$ ist gleich der Signatur der Form F_n.

Die Signatur der Form F_n kann man in jedem Falle aus den Vorzeichen der nicht verschwindenden unter den Determinanten D_1, D_2, ... D_{n-1} ablesen.*) In dem Falle, wo keine dieser Determinanten verschwindet, lässt sich F_n, wie bekannt und übrigens leicht zu zeigen ist, in der Form

$$F_n=D_1 u_0^2+\frac{D_2}{D_1}u_1^2+\dots+\frac{D_n}{D_{n-1}}u_{n-1}^2$$

darstellen, wo u_i eine reelle Linearform von $y_i, y_{i+1}, \dots y_{n-1}$ ist. Der Index von $R(z)$ ist dann also gleich der Differenz zwischen der Zahl der positiven und der Zahl der negativen Glieder der Reihe

$$D_1,\ \frac{D_2}{D_1},\ \frac{D_3}{D_2},\ \dots\ \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

Dieser Fall tritt insbesondere ein, wenn der Index von $R(z)$ seinen Maximalwerth n besitzt. Denn es ist dann F_n eine definite positive Form und ebenso F_{n-1}, F_{n-2}, ... F_1, da die letzteren Formen durch Nullsetzen einiger der Parameter $y_0, y_1, \dots y_{n-1}$ aus F_n entstehen. Die

*) Frobenius, l. c. pag. 410.

Determinante einer definiten positiven Form ist aber stets positiv. Es gilt hiernach der Satz:

Der Index von $R(z)$ hat stets und nur dann seinen Maximalwerth n, wenn die Determinanten $D_1, D_2, \ldots D_n$ positiv sind.

6.

Es sei jetzt $R(z)$ in der Gestalt gegeben

$$R(z) = \frac{b_0 z^\nu + b_1 z^{\nu-1} + \cdots + b_\nu}{a_0 z^\nu + a_1 z^{\nu-1} + \cdots + a_\nu}, \tag{22}$$

wo der Coefficient a_0 von Null verschieden vorausgesetzt wird. Der Grad ν des Nenners von $R(z)$ ist grösser oder gleich n, je nachdem Zähler und Nenner von $R(z)$ einen gemeinsamen Theiler haben oder nicht. Man kann nun die Determinante D_m (20) umformen in eine Determinante, in welcher die Coefficienten $a_0, \ldots a_\nu$, $b_0, \ldots b_\nu$ die Elemente bilden. Diese Umformung lässt sich mit Hülfe des folgenden Satzes ausführen, den man leicht aus dem Multiplicationstheorem der Determinanten ableitet.

Es seien

$$\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_m, \ldots \tag{23}$$

gewöhnliche Potenzreihen von z, die durch Multiplication mit

$$\mathfrak{P} = k + k_1 z + k_2 z^2 + \cdots \tag{24}$$

in die neuen Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots, \mathfrak{P}_m', \ldots \tag{25}$$

übergehen mögen, so dass also allgemein $\mathfrak{P}_m' = \mathfrak{P} \,.\, \mathfrak{P}_m$ ist. Trennt man dann von jeder der Reihen $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots \mathfrak{P}_m$ (bez. $\mathfrak{P}_1', \mathfrak{P}_2', \ldots \mathfrak{P}_m'$) die ersten m Glieder ab und bezeichnet mit Δ_m (bez. Δ_m') die Determinante der so entstehenden m ganzen Functionen $(m-1)^{\text{ten}}$ Grades von z, so ist

$$\Delta_m' = k^m \,.\, \Delta_m. \tag{26}$$

Diesen Satz wende ich nun auf folgenden Fall an. Es sei

$$\frac{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots}{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots} = c + c_0 z + c_1 z^2 + \cdots,$$

und die Reihen (23) mögen, wie folgt, angenommen werden:

$$\mathfrak{P}_1 = 1,\ \mathfrak{P}_2 = c + c_0 z + c_1 z^2 + \cdots,\quad \mathfrak{P}_{2\lambda+1} = z^\lambda \mathfrak{P}_1,\ \mathfrak{P}_{2\lambda+2} = z^\lambda \mathfrak{P}_2$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots),$$

während die Reihe (24) mit

$$\mathfrak{P} = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

identificirt werden soll. Die Reihen (25) lauten dann:

$$\mathfrak{P}_1' = \mathfrak{P},\ \mathfrak{P}_2' = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots,\quad \mathfrak{P}_{2\lambda+1}' = z^\lambda \mathfrak{P}_1'.\ \mathfrak{P}_{2\lambda+2}' = z^\lambda \mathfrak{P}_2'$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots).$$

Ersetzt man noch in der Gleichung (26) den Index m durch $2m$, so giebt nun diese Gleichung die gewünschte Umformung der Determinante D_m. Es kommt nämlich:

$$(27) \qquad a_0^{2m} \,.\, D_m = R_m,$$

wo R_m die Determinante

$$(28) \qquad R_m = \begin{vmatrix} a_0, & a_1, & \ldots & a_{2m-1} \\ b_0, & b_1, & \ldots & b_{2m-1} \\ 0, & a_0, & \ldots & a_{2m-2} \\ 0, & b_0, & \ldots & b_{2m-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & a_m \\ 0 & 0 & \ldots & b_m \end{vmatrix}$$

bedeutet. Diese verschwindet sicher, sobald $m > \nu$ ist, da dann die Elemente der letzten Verticalreihe sämmtlich Null sind. Man hat hiernach zur Bestimmung des Index (und zugleich der Zahl n der Pole) der rationalen Function (22) so zu verfahren: Man bildet die Reihe der Determinanten

$$R_1, R_2, \ldots R_\nu.$$

Wenn R_n das letzte nicht verschwindende Glied dieser Reihe ist, so giebt n die Zahl der Pole, oder, was dasselbe ist, den Grad des Nenners von $R(z)$ an, wenn $R(z)$ in reducirter Gestalt geschrieben wird. Der Index von $R(z)$ wird sodann aus den Vorzeichen der nicht verschwindenden Glieder der Reihe $R_1, R_2, \ldots R_n$ abgeleitet.

7.

Insbesondere ergiebt sich jetzt leicht der unter Nr. 1 angegebene Satz. Es sei

$$(29) \qquad f(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

eine Gleichung mit reellen Coefficienten. Dann ist

$$(30) \quad i^n f(-iz) = (a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \cdots) + i(a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \cdots)$$

und die in Nr. 2 mit Δ bezeichnete Zahl ist der Index von

$$(31) \qquad R(z) = \frac{a_1 z^{n-1} - a_3 z^{n-3} + \cdots}{a_0 z^n - a_2 z^{n-2} + \cdots}.$$

Die Gleichung (29) hat nun, wie aus (8) in Nr. 2 hervorgeht, stets und nur dann ausschliesslich Wurzeln mit negativen reellen Theilen, wenn $\Delta = n$ ist. Hieraus folgt, dass Zähler und Nenner von $R(z)$ theilerfremd sein müssen. Denn andernfalls würde $R(z)$ dargestellt werden können als ein Quotient, dessen Nenner vom Grade $n' < n$ ist und der Index von $R(z)$ wäre höchstens gleich n'.

Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die Gleichung (29) nur Wurzeln mit negativen reellen Theilen besitzt, ist also die, dass die Form

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int R(z)\,[\Theta(z)]^2\,dz \tag{32}$$

eine definite positive Form von $y_0, y_1, \ldots y_{n-1}$ ist. In Folge des Umstandes, dass $R(z)$ eine ungerade Function von z ist, lässt sich F_n in zwei Formen zerlegen, von denen die eine nur die Parameter $y_0, y_2, y_4, \ldots$, die andere nur die Parameter $y_1, y_3, y_5, \ldots$ enthält. In der That sei

$$H(z) = \frac{a_1 z^{\lambda-1} - a_3 z^{\lambda-2} + \cdots}{a_0 z^{\lambda} - a_2 z^{\lambda-1} + \cdots} \quad \left(\lambda = \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n+1}{2}, \text{ je nachdem } n \text{ gerade oder ungerade ist}\right), \tag{33}$$

so ist offenbar

$$R(z) = z\,.\,H(z^2).$$

Ferner fasse man in $\Theta(z)$ die Glieder mit geraden und die mit ungeraden Potenzen von z zusammen, setze also

$$\Theta(z) = \Theta_0(z^2) + z\Theta_1(z^2).$$

Führt man nun in dem Integral (32) $z^2 = \zeta$ als neue Integrationsvariable ein und schreibt dann wieder z an Stelle von ζ, so findet man die in Rede stehende Zerlegung

$$F_n = \frac{1}{2\pi i}\int H(z)\,[\Theta_0(z)]^2\,dz + \frac{1}{2\pi i}\int z H(z)\,[\Theta_1(z)]^2\,dz. \tag{34}$$

Die hierin enthaltene Thatsache, dass der Index von $R(z)$ gleich der Summe der Indices von $H(z)$ und $zH(z)$ ist, lässt sich übrigens, beiläufig bemerkt, auch unmittelbar aus dem Begriff des Index ableiten. Stellt man jetzt nach Nr. 5 und 6 die Bedingung auf, dass F_n oder was auf dasselbe hinauskommt, jedes der beiden Integrale (34) eine positive definite Form darstellt, so wird man nach einer leichten Umformung der zu bildenden Determinanten auf den Satz von Nr. 1 geführt.

8.

Durch die Gleichung (8) von Nr. 2 und die in Nr. 6 entwickelte Methode zur Bestimmung des Index einer rationalen Function ist allgemein die Aufgabe gelöst, die Anzahl derjenigen Wurzeln einer Gleichung $f(x) = 0$ zu bestimmen, die einen negativen reellen Theil besitzen, unter der Voraussetzung, dass die Gleichung durch keinen rein imaginären Werth von x befriedigt wird. (Die letztere Beschränkung kann man übrigens fallen lassen, wenn man festsetzt, dass jede rein imaginäre Wurzel mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ sowohl als

Wurzel mit negativem wie mit positivem Theil gezählt werden soll.) Diese Aufgabe ist, wie die Substitution von $-ix$ an Stelle von x zeigt, nicht wesentlich verschieden von der anderen, die Zahl der Wurzeln einer Gleichung n^{ten} Grades

$$f_1(x) + if_2(x) = 0, \tag{35}$$

wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ganze Functionen mit reellen Coefficienten bezeichnen, zu bestimmen, welche einen positiv-imaginären Bestandtheil besitzen. Diese Zahl wird ebenfalls durch die erste Formel (8) also durch $\frac{n+\Delta}{2}$ angegeben, unter Δ den Index von $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ verstanden.

Mit der letzteren Aufgabe beschäftigt sich Herr Hermite in zwei Abhandlungen*), auf die ich hier verweise. Zum Schluss bemerke ich noch Folgendes: Aus dem Begriff des Index geht unmittelbar hervor, dass eine rationale Function $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ stets und nur dann den Index $\pm n$ besitzt, wenn der Nenner $f_1(x)$ in n Punkten der reellen Axe verschwindet (wobei $x=\infty$ als Nullstelle von $f(x)$ anzusehen ist, falls $f_1(x)$ nur den $(n-1)^{\text{ten}}$ Grad erreicht) und wenn zugleich $f_2(x)$ in je zwei aufeinanderfolgenden dieser Punkte Werthe von entgegengesetztem Vorzeichen annimmt. Hieraus folgert man weiter, dass der Maximalwerth $\pm n$ des Index von $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$ stets und nur dann eintritt, wenn jede der Gleichungen $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ n reelle von einander verschiedene Wurzeln besitzt und zugleich die Wurzeln der einen Gleichung durch die der anderen getrennt werden. Insbesondere haben also die n Wurzeln der Gleichung (35) stets und nur dann sämmtlich positiv-imaginären oder sämmtlich negativ-imaginären Bestandtheil, wenn die Wurzeln der Gleichungen $f_1(x)=0$, $f_2(x)=0$ die eben erwähnte Beschaffenheit besitzen**).

Zürich, den 12. December 1894.

---

*) Crelle's Journal Bd. 52, pag. 39, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 7, pag. 128.

**) Vgl. Biehler, Crelle's Journal Bd. 87, pag. 350, Laguerre, ib. Bd. 89, pag. 339.