

# ΠΕΡΙ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ

- ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΟΝ ΕΛΕΓΧΟΥ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΝΟΡΜΑΣ -

Αναστάσιος Δ. Πουλιέζος

Πολυτεχνείον Κρήτης  
Χανιά

Εκδοχή 1.3, Σεπτέμβριος 2008

© Α. Πουλιέζος

Σε ό,τι πολυτιμότερο απέκτησα:

© Α. Πουλιέζος  
τον Ερμή, την Ίριδα και την Κρυσταλλένια.

© Α. Πουλιέζος

## Περιεχόμενα

<b>Συμβολισμοί .....</b>	<b>7</b>
<b>Πρόλογος.....</b>	<b>8</b>
<b>Κεφάλαιο 0 .....</b>	<b>10</b>
<b>Γενική τοποθέτηση.....</b>	<b>10</b>
<b>0.1 Μεθοδολογία.....</b>	<b>10</b>
<b>0.2 Στόχοι .....</b>	<b>12</b>
<b>Κεφάλαιο 1 .....</b>	<b>14</b>
<b>Αναπαράσταση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.....</b>	<b>14</b>
<b>1.1 Μαθηματική αναπαράσταση.....</b>	<b>14</b>
1.1.1 Αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου .....	14
1.1.2 Αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας .....	17
1.1.2.1 Πόλοι και μηδενικά.....	19
1.1.3 Μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου.....	21
<b>1.2 Διαγραμματική αναπαράσταση.....</b>	<b>22</b>
<b>Κεφάλαιο 2 .....</b>	<b>27</b>
<b>Δυναμικά συστήματα .....</b>	<b>27</b>
<b>2.1 Μετασχηματισμοί κατάστασης.....</b>	<b>27</b>
2.1.1 Διαγώνιος μετασχηματισμός.....	28
<b>2.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων.....</b>	<b>30</b>
2.2.1 Γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα .....	30
2.2.2 Γραμμικά εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα .....	35
<b>2.3 Ιδιότητες συστημάτων .....</b>	<b>36</b>
2.3.1 Ελεγχιμότητα .....	36
2.3.2 Παρατηρησιμότητα .....	36
2.3.3 Ελάχιστες πραγματώσεις.....	37
2.3.4 Ευστάθεια.....	40
2.3.5 Σταθεροποιησιμότητα .....	43
2.3.6 Εντοπισιμότητα .....	44
<b>2.4 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων.....</b>	<b>45</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3.....</b>	<b>48</b>
<b>Παράμετροι σχεδίασης.....</b>	<b>48</b>
<b>3.1 Στόχοι απόδοσης.....</b>	<b>48</b>
<b>3.2 Ονομαστική απόδοση.....</b>	<b>48</b>
<b>3.3 Πως επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου.....</b>	<b>51</b>
<b>3.4 Στιβαρή απόδοση .....</b>	<b>68</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4.....</b>	<b>70</b>
<b>Ονομαστική απόδοση.....</b>	<b>70</b>
<b>4.1 Ανάλυση .....</b>	<b>70</b>
4.1.1 Διατύπωση του προβλήματος .....	70
4.1.2 Εσωτερική ευστάθεια.....	72
4.1.3 Σταθεροποίηση.....	75

<b>4.2</b>	<b>Σύνθεση</b> .....	<b>75</b>
4.2.1	Διατύπωση του προβλήματος .....	76
4.2.2	Ερμηνεία του κριτηρίου $H_\infty$ .....	76
4.2.3	Λύση προβλήματος .....	77
4.2.4	Μορφοποίηση προβλημάτων ελέγχου σε διάγραμμα δύο θυρών .....	79
4.2.5	Ερμηνεία της μέγιστης ιδιόμορφης τιμής .....	92
4.2.6	Επιλογή συναρτήσεων βαρών .....	97
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5</b> .....		<b>102</b>
<b>Στιβαρή απόδοση</b> .....		<b>102</b>
<b>5.1</b>	<b>Εισαγωγή</b> .....	<b>102</b>
<b>5.2</b>	<b>Μαθηματικό υπόδειγμα για την επίλυση του προβλήματος</b> .....	<b>102</b>
5.2.1	Δομημένη αβεβαιότητα .....	105
5.2.2	Αδόμητη αβεβαιότητα .....	110
<b>5.3</b>	<b>Ανάλυση</b> .....	<b>113</b>
5.3.1	Βασικά θεωρήματα .....	113
5.3.2	Αδόμητη αβεβαιότητα (νορμικά φραγμένη) .....	116
5.3.3	Δομημένη αβεβαιότητα .....	120
5.3.4	Υπολογισμός του $\mu$ .....	122
5.3.5	Ανακεφαλαίωση συνθηκών .....	124
5.3.6	Παραδείγματα .....	125
<b>5.4</b>	<b>Σύνθεση</b> .....	<b>127</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6</b> .....		<b>129</b>
<b>Παραδείγματα εφαρμογών</b> .....		<b>129</b>
<b>6.1</b>	<b>Σύστημα ενεργητικής ανάρτησης αυτοκινήτου (1/4)</b> .....	<b>129</b>
6.1.1	Ονομαστική σχεδίαση .....	131
6.1.2	Στιβαρή σχεδίαση .....	138
<b>Επιμύθιο</b> .....		<b>141</b>
<b>Βιβλιογραφία</b> .....		<b>143</b>
<b>Βιβλία</b> .....		<b>143</b>
<b>Περιοδικά</b> .....		<b>144</b>
<b>Ελληνική (ενδεικτική)</b> .....		<b>144</b>
<b>Ιστορικό εκδοχών</b> .....		<b>146</b>

## Συμβολισμοί

Στο σύγγραμμα αυτό δεν χρησιμοποιώ την έντονη γραφή (boldface) για να υποδηλώσω διανύσματα ή πίνακες. Αυτό αφήνεται να εννοηθεί από το περιεχόμενο.

Κεφαλαία πλάγια λατινικά,  $A, B, C$ , δηλώνουν πίνακες σταθερούς ή συναρτήσεις κάποιας μεταβλητής (συνήθως πίνακες μεταφοράς).

Πεζά πλάγια λατινικά  $a, b, c$ , δηλώνουν διανύσματα σταθερά ή συναρτήσεις κάποιας μεταβλητής.

Πεζά πλάγια ελληνικά  $\alpha, \beta, \gamma$  συνήθως δηλώνουν σταθερά βαθμωτά μεγέθη.

Οι υπερσυνδέσεις εμφανίζονται με υπογράμμιση (όπως και οι υπερσυνδέσεις που έχουν ακολουθηθεί).

Διάφορα άλλα χρώματα χρησιμοποιούνται για να τονιστούν οι ορισμοί, τα θεωρήματα, τα παραδείγματα και οι διάφορες έννοιες.

Η αρίθμηση των Σχεδίων και των Εξισώσεων είναι της μορφής  $x.y$  όπου  $x$  είναι ο αριθμός κεφαλαίου και  $y$  ο αύξων αριθμός. Η αρίθμηση, καθώς και οι αναφορές στο κείμενο έχουν γίνει μέσω των αυτόματων δυνατοτήτων του Word.

© Α. Πουλιέζος

## Πρόλογος

Με το (ηλεκτρονικό) αυτό σύγγραμμα προσπαθώ να παρουσιάσω με τρόπο σαφή και κατανοητό την χρήση των σύγχρονων αλγορίθμων των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου. Η απόπειρα αυτή βασίζεται στην εμπειρία που απέκτησα διδάσκοντας διάφορες πτυχές των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου σε προπτυχιακούς και μεταπτυχιακούς φοιτητές του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης του Πολυτεχνείου Κρήτης από το 1986. Για το τμήμα αυτό τα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου δεν μπορεί να θεωρηθεί ότι ανήκουν στον βασικό πυρήνα μαθημάτων και έτσι χρήζουν ιδιαίτερης προσέγγισης στην διδακτική τους. Το ίδιο ισχύει και για άλλες περιοχές μηχανικών, όπως για παράδειγμα για τους Μηχανικούς Περιβάλλοντος (που επίσης αποφοιτούν από το Πολυτεχνείο Κρήτης) ή τους Μηχανικούς Βιοϊατρικής ή ακόμη και για μη Μηχανικούς όπως είναι οι Οικονομολόγοι και γιατί όχι και οι Ιατροί. Η πρώτη καινοτομία λοιπόν είναι ο προσανατολισμός του συγγράμματος προς ένα κοινό για το οποίο η συγκεκριμένη επιστήμη δεν αποτελεί βασικό συστατικό των σπουδών του. Αυτό βέβαια δεν σημαίνει ότι είναι ακατάλληλο για άλλες κατηγορίες μηχανικών, όπως οι Ηλεκτρολόγοι Μηχανικοί, Μηχανολόγοι Μηχανικοί, Αεροναυπηγοί κλπ. Ιδιαίτερα για τους αλγόριθμους που παρουσιάζονται στο σύγγραμμα αυτό, η θεωρητική δυσκολία τους έχει αποτρέψει την μεγάλη πλειοψηφία των μηχανικών από την πρακτική υλοποίηση τους. Πιστεύω λοιπόν ότι ένα βιβλίο προσανατολισμένο περισσότερο στην πρακτική εφαρμογή της θεωρίας και λιγότερο στην αυστηρή μαθηματική απόδειξη των επιμέρους θεωρημάτων είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην παρούσα φάση της εξέλιξης της θεωρίας των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.

Υπάρχουν πολλά βιβλία για Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου, ελληνικά και αγγλικά, τα οποία λίγο πολύ μοιάζουν μεταξύ τους είτε στην ύλη είτε στα παραδείγματα που παρατίθενται για την κατανόηση της θεωρίας. Ευελπιστώ να αποκλίνω από τον κανόνα αυτό με τους εξής τρόπους:

- Δίνοντας βάρος στο κυρίως σώμα του συγγράμματος, στην **πρακτική** των Συστημάτων Ελέγχου, αφήνοντας τα θεωρητικά σημεία (μαθηματικά κυρίως) σε ξεχωριστά κεφάλαια, όπου ο αναγνώστης μπορεί να εντρυφήσει αν θέλει.
- Παραθέτοντας παραδείγματα από σύγχρονα συστήματα, διαφορετικών επιστημών και κατά το δυνατόν γνωστά στο ευρύ κοινό.
- Χρησιμοποιώντας μόνο ελληνική ορολογία (και παραθέτοντας αυτόνομο γλωσσάριο).
- Υλοποιώντας το σύγγραμμα σ' ένα διαδραστικό περιβάλλον όπου μέσω τεχνολογιών Java και προγραμμάτων MATLAB, ο χρήστης έχει την δυνατότητα να πειραματισθεί με διαφορετικές παραμέτρους και να δει αμέσως τις διαφορετικές αποκρίσεις. Με την τεχνολογία εικονικής πραγματικότητας, ο χρήστης θα έχει



επίσης την δυνατότητα να δει το σύστημα σαν εικόνα και όχι σαν γράφημα κάποιας μαθηματικής συνάρτησης (όχι στην παρούσα έκδοση).

- Έχοντας ιστορικά/βιογραφικά στοιχεία για τους κυριότερους συντελεστές της διαμόρφωσης της θεωρίας των Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου.

Το σύγγραμμα αυτό ολοκληρώθηκε κατά την διάρκεια της εκπαιδευτικής μου άδειας, Σεπτέμβριος 2003-Φεβρουάριος 2005, αν και αρκετό υλικό υπήρχε από τις μέχρι τότε σημειώσεις. Για τον λόγο αυτό ευχαριστώ την Γενική Συνέλευση του τμήματος Μηχανικών Παραγωγής και Διοίκησης που μου ενέκρινε την άδεια αυτή..

© Α. Πουλιέζος

## Κεφάλαιο 0

### Γενική τοποθέτηση

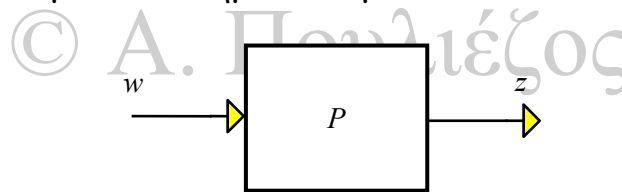
#### 0.1 Μεθοδολογία

Στο σύγγραμμα αυτό θα παρουσιασθεί ο τρόπος με τον οποίο μπορούμε να υλοποιήσουμε τα τελευταία αποτελέσματα από την θεωρία του Ελέγχου Συστημάτων. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε το γενικό πλαίσιο στο οποίο θα κινηθούμε. Αν ο αναγνώστης δεν είναι εξοικειωμένος με κάποιες από τις έννοιες, ας μην αποθαρρυνθεί. Οι έννοιες αυτές θα αναλυθούν διεξοδικά στην συνέχεια.

Σαν «σύστημα» θα θεωρήσουμε μαθηματικές αναπαραστάσεις φυσικών διαδικασιών. Συγκεκριμένα θα θεωρήσουμε ότι το σύστημα είναι μία απεικόνιση  $P$ , που συσχετίζει μία συνάρτηση εισόδου  $w(t)$  με μία συνάρτηση εξόδου  $z(t)$ :

$$z(t) = P[w(t)]$$

Σχηματικά θα εκφράσουμε το σύστημα αυτό με το ακόλουθο δομικό διάγραμμα:

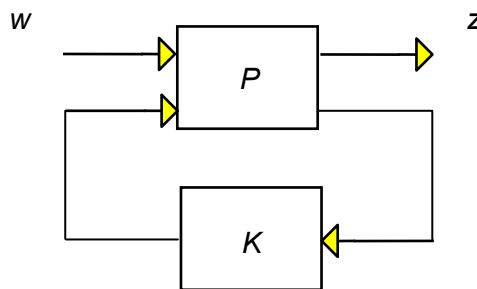


Σχήμα 0.1

Μεταξύ των πολλών κατηγοριών απεικονίσεων (συστημάτων) και συναρτήσεων εισόδου-εξόδου θα περιοριστούμε σε,

- Γραμμικά, αιτιατά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα πεπερασμένης διάστασης. Τα συστήματα αυτά αναπαρίστανται στο πεδίο της συχνότητας με τελεστές που ανήκουν στον χώρο  $\mathcal{RH}_2$  των ρητών, αυστηρά πρεπουσών συναρτήσεων μεταφοράς.
- Σήματα πεπερασμένης ενέργειας ή σήματα  $\mathcal{L}_2$ .

Με τον όρο «έλεγχος» ή «αντιστάθμιση» εννοούμε ένα άλλο (υπο)σύστημα  $K$  το οποίο συνδεδεμένο κατάλληλα με το  $P$  θα ελαχιστοποιεί μία νόρμα του συνολικού συστήματος ( $P$  και  $K$ ). Στο Σχ. 0.2 βλέπουμε το δομικό διάγραμμα της προκύπτουσας αρχιτεκτονικής.



Σχήμα 0.2

Για να έχει μία τέτοια προσέγγιση νόημα το  $z$  θα πρέπει να αναπαριστά μεταβλητές που πρέπει να διατηρηθούν «μικρές».

Στην θεωρία που θ' ακολουθήσει θα υιοθετήσουμε την νόρμα  $\mathcal{H}_\infty$ . Η νόρμα αυτή προκύπτει σαν η επαγόμενη νόρμα όταν τα σήματα  $z$ ,  $w$  ανήκουν στο χώρο  $\mathcal{L}_2$ , είναι δηλαδή σήματα με πεπερασμένη ενέργεια. Η επιλογή αυτή υπονοεί τα ακόλουθα:

- Ελαχιστοποίηση της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της μέγιστης απολαβής του συστήματος (ως προς την ενέργεια).
- Αν το  $w$  είναι οποιοδήποτε  $\mathcal{L}_2$  σήμα, τότε ελαχιστοποίηση της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της χειρότερης επίδρασης του επί της ενέργειας του  $z$ .

Από τα παραπάνω φαίνεται ότι η επιλογή της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  είναι κατάλληλη όταν η γνώση των φασματικών χαρακτηριστικών του σήματος εισόδου  $w$  είναι περιορισμένη. Υπάρχει όμως και ένας άλλος, πιο θεμελιώδης λόγος: η επιλογή μίας επαγόμενης νόρμας (σημ.: η νόρμα  $\mathcal{H}_2$  δεν είναι επαγόμενη και δεν υπακούει στην υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι είναι μικρότερη από την μονάδα, εξασφαλίζει την ισχύ του «θεωρήματος της μικρής απολαβής». Το θεώρημα αυτό είναι η βάση για την ανάλυση και σύνθεση συστημάτων με αβεβαιότητα.

Είναι προφανές ότι κάποια συστήματα (ίσως τα περισσότερα) δεν πληρούν τις προαναφερόμενες προϋποθέσεις. Στις περιπτώσεις αυτές, το πρόβλημα θα πρέπει να αναδιατυπωθεί, ίσως μέσω κατάλληλων μετασχηματισμών ή συναρτήσεων βαρών, έτσι ώστε να μπορεί να επιλυθεί στο πλαίσιο του ελέγχου  $\mathcal{H}_\infty$ .

Τέλος αξ σημειωθεί ότι η προσέγγιση αυτή (που δεν είναι φυσικά μοναδική) προσπαθεί να απαντήσει καλύτερα από τις προηγούμενες στο μόνιμο ερώτημα που θέτει η θεωρία αυτομάτου ελέγχου: πως δηλαδή θα σχεδιάσουμε ένα σύστημα που θα λει-

τουργεί ικανοποιητικά στο περιβάλλον για το οποίο έχει κατασκευασθεί. Ίσως αυτό να ακούγεται απλό, αλλά δεν είναι όπως σύντομα θ' αντιληφθούμε.

## 0.2 Στόχοι

Στο σύγγραμμα αυτό θα μελετήσουμε μία μαθηματική προσέγγιση που στοχεύει στη διαχείριση πολύπλοκων φυσικών συστημάτων που είναι συζευγμένα σε δομή ανατροφοδότησης. Η μεθοδολογία που θα υιοθετηθεί βασίζεται σε δύο σχετιζόμενες παρατηρήσεις αναφορικά με τα υποδείγματα πολύπλοκων φυσικών συστημάτων:

- Η πρώτη είναι ότι τα αναλυτικά ή υπολογιστικά υποδείγματα που περιγράφουν επαρκώς φυσικά συστήματα, είναι δύσκολο ή αδύνατο να χαρακτηρισθούν ή να προσομοιωθούν. Σαν επακόλουθο, αναγκαζόμαστε να χρησιμοποιούμε απλοποιημένα υποδείγματα.
- Η δεύτερη είναι ότι ένα υπόδειγμα, όσο λεπτομερές και να είναι, δεν είναι ποτέ μία ακριβής αναπαράσταση του φυσικού συστήματος. Επομένως, τα υποδείγματα μας είναι ούτως ή άλλως ανακριβή.

Στο σύγγραμμα αυτό και οι δύο αυτές πλευρές θα ορισθούν ως **αβεβαιότητα** του υποδείματος, και ο πρωταρχικός στόχος θα είναι να παρουσιασθούν οι συστηματικές τεχνικές και τα εργαλεία για την ανάλυση και σύνθεση αβέβαιων συστημάτων. Η κυρίαρχη ιδέα που θα χρησιμοποιηθεί για την αντιμετώπιση της αβεβαιότητας ή μη προβλεψιμότητας είναι αυτή της **ανατροφοδότησης**.

Οι τρεις κύριες πηγές αβεβαιότητας που θα θεωρήσουμε είναι οι εξής:

- Οι αρχικές συνθήκες του συστήματος δεν είναι επακριβώς γνωστές.
- Το σύστημα υπόκειται σε διαταραχές από το περιβάλλον του και η εκάστοτε επιθυμητή κατάσταση του δεν είναι γενικά γνωστή εκ των προτέρων.
- Υπάρχει αβεβαιότητα στο ίδιο το μαθηματικό υπόδειγμα.

Λεκτικά λοιπόν μπορούμε να προσδιορίσουμε τον στόχο μας ως:

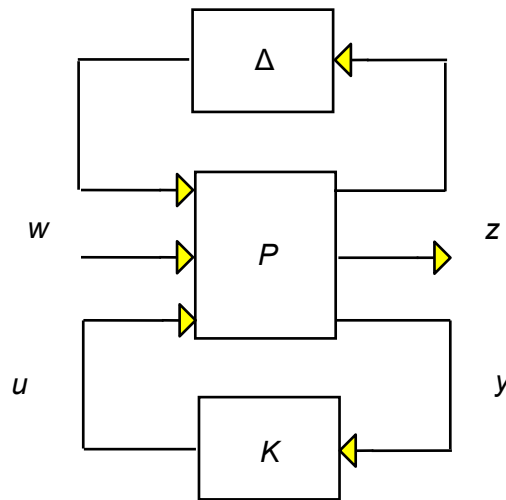
Να βρεθεί ένας αντισταθμιστής ανατροφοδότησης τέτοιος ώστε να ελαχιστοποιούνται η επίδραση των άγνωστων αρχικών συνθηκών και των εξωτερικών διαταραχών στην συμπεριφορά του συστήματος, υπό τον περιορισμό της μη ακριβούς αναπαράστασης του συστήματος.

Στη πορεία της λύσης θ' ασχοληθούμε με δύο είδη προβλημάτων:

- **Πρόβλημα ανάλυσης:** δοθέντος του ελεγκτή, να εκτιμηθεί αν τα υπό ρύθμιση σήματα (σφάλμα, έλεγχος) ικανοποιούν τις επιθυμητές ιδιότητες για κάθε αποδεκτή διαταραχή και αβεβαιότητα.
- **Πρόβλημα σύνθεσης:** σχεδίαση ενός ελεγκτή τέτοιου ώστε τα υπό ρύθμιση σήματα να ικανοποιούν τις επιθυμητές ιδιότητες για κάθε αποδεκτή διαταραχή

και αβεβαιότητα.

Για την επίλυση των προβλημάτων αυτών θα χρησιμοποιήσουμε το ενοποιημένο πλαίσιο των *γραμμικών κλασματικών μετασχηματισμών* (LFT) που μας επιτρέπει να εκφράσουμε τα συστήματα μας στη μορφή του διαγράμματος του Σχ. 0.3.



Σχήμα 0.3 Διάγραμμα δύο θυρών

Πιο τυπικά: ας εκφράσουμε τον πίνακα συνάρτησης μεταφοράς από την είσοδο  $w$  στην έξοδο  $z$ , ως  $T_{zw}$ , και ας υποθέσουμε ότι η αποδεκτή αβεβαιότητα  $\Delta$  ικανοποιεί την  $\bar{\sigma}(\Delta) < 1/\gamma_u$  για κάποιο  $\gamma_u > 0$ . Τότε το πρόβλημα της ανάλυσης είναι: δοθέντος του  $K$ , να απαντηθεί αν το σύστημα κλειστού βρόχου είναι ευσταθές για όλες τις αποδεκτές  $\Delta$  και  $\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma_p$  για κάποιο προδιαγεγραμμένο  $\gamma_p$ . Το πρόβλημα της σύνθεσης είναι η εύρεση του αντισταθμιστή  $K$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προαναφερθείσες απαιτήσεις.

Τέλος θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη ορολογία:

**Ονομαστική απόδοση:** Το σύστημα ικανοποιεί τις προδιαγραφές απόδοσης θεωρώντας το μαθηματικό υπόδειγμα ακριβές. Κατ' ακολουθία ορίζεται και η **ονομαστική ευστάθεια**.

**Στιβαρή απόδοση:** Το σύστημα ικανοποιεί τις προδιαγραφές απόδοσης για κάθε αποδεκτή αβέβαιη εγκατάσταση.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, το πλαίσιο του ελέγχου  $\mathcal{H}_{\infty}$  ενοποιεί την επίλυση των δύο αυτών προβλημάτων.

## Κεφάλαιο 1

### Αναπαράσταση Συστημάτων Αυτομάτου Ελέγχου

#### 1.1 Μαθηματική αναπαράσταση

##### 1.1.1 Αναπαράσταση στο πεδίο του χρόνου

Στο σύγγραμμα αυτό θα μελετήσουμε συστήματα που αναπαρίστανται από συνήθεις, γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με σταθερούς συντελεστές. Τα συστήματα αυτά καλούνται **γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα**<sup>1</sup>.

Αν το σύστημα είναι μίας εισόδου-μίας εξόδου τότε αναπαρίσταται από τη γνωστή μη ομογενή συνήθη διαφορική εξίσωση  $n$ -οστής τάξης με σταθερούς συντελεστές,

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + \dots + b_0 r(t) \quad (1.1)$$

με τις αντίστοιχες  $n$  αρχικές συνθήκες της  $y$  και  $m$  αρχικές συνθήκες της  $r$ ,

$$y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_{n-1}, r(0) = r_0, \dot{r}(0) = r_1, \dots, r^{(m-1)}(0) = r_{m-1}$$

Στην μορφή αυτή η  $y(t)$  καλείται **έξοδος** του συστήματος, ενώ η  $r(t)$  **είσοδος**.

Αν το σύστημα είναι πολλών εισόδων-πολλών εξόδων το σύστημα αναπαρίσταται από μία διανυσματική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης και μία αλγεβρική εξίσωση της μορφής,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3)$$

όπου λόγω του χρονικά αμετάβλητου έχει θεωρηθεί χωρίς βλάβη γενικότητας ότι  $t_0=0$ . Στη μορφή αυτή η διανυσματική συνάρτηση,

<sup>1</sup> Συστήματα LTI: linear time invariant.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

καλείται **κατάσταση** του συστήματος, η

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

είναι η (διανυσματική) **είσοδος** στο σύστημα και η,

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}$$

η (διανυσματική) **έξοδος**.

Οι πίνακες  $A$  ( $n \times n$ ),  $B$  ( $n \times r$ ),  $C$  ( $m \times n$ ),  $D$  ( $m \times r$ ) καλούνται **πίνακες του χώρου κατάστασης**, ενώ η διάσταση  $n$  καλείται (δυναμική) **τάξη** του συστήματος.

Το σύστημα (1.2)-(1.3) είναι ειδική μορφή του γενικότερου συστήματος,

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (1.4)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t) \quad (1.5)$$

το οποίο είναι ένα **γραμμικό, χρονικά μεταβαλλόμενο δυναμικό σύστημα συνεχούς χρόνου**. Πολλά από τα θεωρήματα που θα παρουσιασθούν στη συνέχεια, επεκτείνονται ευθέως και στα χρονικά μεταβαλλόμενα συστήματα, όμως στη πράξη αυτά απαντώνται σπανιότητα. Για το λόγο αυτό, και για αποφυγή αχρείασιτης πολυπλοκότητας, θα ασχοληθούμε μόνο με τα χρονικά αμετάβλητα συστήματα.

Το σύστημα (1.2)-(1.3) περιγράφεται επίσης σε μορφή **συσκευασμένου πίνακα** ως,

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \quad (1.6)$$

Ένα σύστημα μίας εισόδου-μίας εξόδου στη μορφή (1.1) εύκολα (;) μετασχηματίζεται σε αναπαράσταση χώρου κατάστασης {(1.2)-(1.3)} αν θέσουμε,

$$x(t) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} & 1 \\ a_2 & a_3 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} \\ \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 & -b_3 & \cdots & -b_m \\ -b_2 & -b_3 & \cdots & -b_m & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -b_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \frac{du}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d^m u}{dt^m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Το προκύπτον σύστημα είναι,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} r(t)$$

$$y(t) = [0 \ 0 \ \cdots \ 1]x(t) + 0 \cdot r(t)$$

Η επιλογή των μεταβλητών κατάστασης είναι σημαντική για την σωστή αναπαράσταση του συστήματος, καθώς θα πρέπει να επιλεγούν έτσι ώστε το σύστημα να προσδιορίζεται εντελώς κάθε χρονική στιγμή  $t$  όταν ξέρουμε την ιστορία των εισόδων  $\{u(\tau), 0 \leq \tau \leq t\}$  και την τωρινή και αρχική τιμή των μεταβλητών καταστάσεων  $x(0)$  και  $x(t)$ . Η ενδιαμέση μετεξέλιξη του συστήματος την περίοδο  $0 < \tau < t$  έχει καταγραφεί στις μεταβλητές κατάστασης. Πιο συγκεκριμένα μπορούμε να διατυπώσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 1.1** Οι μεταβλητές κατάστασης  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$  ενός συστήματος ορίζονται ως ένας (ελάχιστος) αριθμός μεταβλητών τέτοιων ώστε αν γνωρίζουμε τις τιμές τους για οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t_0$ , την συνάρτηση εισόδου που εφαρμόζεται στο σύστημα για  $t > t_0$ , και τον μαθηματικό νόμο που συνδέει την είσοδο, τις μεταβλητές κατάστασης και το σύστημα, τότε καθίσταται δυνατός ο προσδιορισμός της κατάστασης του συστήματος για οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t > t_0$ .

Η κατάστρωση των εξισώσεων (1.2)-(1.3) απαιτεί γνώση των φυσικών νόμων που διέπουν τις διαδικασίες του συστήματος, γνώση που δεν είναι πάντα διαθέσιμη στον μηχανικό Αυτομάτου Ελέγχου. Για το λόγο αυτό είναι απαραίτητη η διεπιστημονική προσέγγιση στο στάδιο της κατάστρωσης του μαθηματικού υποδείγματος. Μια μικρή ιδέα της διαδικασίας αυτής μπορούμε να πάρουμε με τα παραδείγματα που πα-



ρατίζονται στο ειδικό κεφάλαιο.

### 1.1.2 Αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας

Οι εξισώσεις (1.1) και (1.2)-(1.3) εκφράζουν το μαθηματικό υπόδειγμα των συστημάτων στο πεδίο του χρόνου. Στα Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου είναι εξίσου σημαντική και η αναπαράσταση τους στο πεδίο της συχνότητας καθώς τα σήματα που τα διατρέχουν εμφανίζονται σε διαφορετικές συχνότητες. Η μετάβαση από την μία μορφή στην άλλη είναι σχετικά απλή μέσω του γνωστού μετασχηματισμού Laplace.

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της (1.1) παίρνουμε,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{b(s)}{a(s)}R(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \\ &= G(s)R(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \end{aligned} \quad (1.7)$$

όπου η

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad (1.8)$$

καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος. Αν οι αρχικές συνθήκες του συστήματος είναι μηδενικές, ο όρος  $c(s)$  είναι μηδενικός, οπότε η (1.7) καταλήγει στην,

$$Y(s) = G(s)R(s) \quad (1.9)$$

Το πολυμεταβλητό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = 0$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

μπορεί να μετασχηματιστεί κατά Laplace παρόμοια. Η μόνη διαφορά είναι ότι στη θέση της βαθμωτής συνάρτησης μεταφοράς προκύπτει ένας πίνακας συναρτήσεων μεταφοράς.

Θεωρώντας λοιπόν μηδενικές αρχικές συνθήκες, ο μετασχηματισμός Laplace των (1.2)-(1.3) δίνει,

$$(sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow X(s) = (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

υποθέτοντας ότι ο  $(sI - A)$  είναι αντιστρέψιμος. Επομένως, αντικαθιστώντας την  $X(s)$

παίρνουμε,

$$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s) \quad (1.10)$$

όπου ο **πίνακας μεταφοράς (transfer matrix)** είναι,

$$G(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D] \quad (1.11)$$

Η διάσταση του  $G(s)$  είναι  $m \times r$ .

Η μορφή του  $G(s)$  είναι,

$$G(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & \cdots & g_{1r}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{m1}(s) & \cdots & g_{mr}(s) \end{bmatrix}$$

όπου τα  $g_{ij}(s)$  είναι βαθμωτές συναρτήσεις της μορφής,

$$g_{ij}(s) = \frac{b_{m_{ij}}s^{m_{ij}-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^{n_{ij}} + a_{n_{ij}-1}s^{n_{ij}-1} + \cdots + a_0}, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$$

**Ορισμός 1.2** Η βαθμωτή συνάρτηση μεταφοράς  $g_{ij}(s)$  καλείται **ρητή πραγματική συνάρτηση**. Περαιτέρω αν  $n_{ij} \geq m_{ij}$  η συνάρτηση καλείται **πρέπουσα** ενώ αν  $n_{ij} > m_{ij}$  καλείται **αυστηρά πρέπουσα**. Παρόμοια ο πίνακας μεταφοράς  $G(s)$  καλείται ρητός πραγματικός αν όλες οι  $g_{ij}(s)$  είναι ρητές πραγματικές, και πρέπων ή αυστηρά πρέπων αν όλες οι  $g_{ij}(s)$  είναι πρέπουσες ή αυστηρά πρέπουσες.

Από τον ορισμό προκύπτει ευθέως ότι αν μία βαθμωτή συνάρτηση είναι πρέπουσα, τότε το,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) \text{ υπάρχει στο } \mathbb{C}$$

ενώ αν είναι αυστηρά πρέπουσα,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$$

Λόγω της (1.11) κάθε πίνακας συνάρτησης μεταφοράς είναι ρητός πραγματικός και πρέπων, αφού,

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A)$$

και ο πίνακας  $\text{adj}(sI-A)$  αποτελείται από πραγματικές συναρτήσεις βαθμού  $<n$ , ενώ  $\text{βαθμός}[\det(sI-A)]=n$ .

### 1.1.2.1 Πόλοι και μηδενικά

Πόλοι και μηδενικά καλούνται στην ορολογία των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου οι ρίζες του αριθμητή και του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Στην περίπτωση συστημάτων μίας εισόδου-μίας εξόδου ο ορισμός αυτός είναι προφανής, αλλά για τα πολυμεταβλητά συστήματα όπου έχουμε να κάνουμε με πίνακες μεταφοράς χρειαζόμαστε έναν επιπλέον μηχανισμό, την μορφή **Smith-McMillan**.

Έστω λοιπόν ο πίνακας μεταφοράς  $G(s)_{m \times r}$  και έστω  $d(s)$  το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο μονικό πολυώνυμο των παρανομαστών της  $G(s)$ . Δηλαδή,

$$G(s) = N(s)/d(s) \quad (1.12)$$

όπου ο πολυωνυμικός πίνακας  $N(s)$  μπορεί να γραφτεί σαν,

$$N(s) = \begin{bmatrix} \Lambda(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

με,

$$\Lambda(s) = \text{διαγ}(\lambda_1(s), \dots, \lambda_n(s))$$

$$n = \text{βαθμός}(N(s))$$

= ο μέγιστος δυνατός βαθμός του  $N(s)$  για τουλάχιστον έναν μιγαδικό  $s$

Τα πολυώνυμα  $\lambda_i(s)$  είναι μοναδικά μονικά πολυώνυμα, τέτοια ώστε,

$$(i) \quad \lambda_i(s) | \lambda_{i+1}(s) \text{ για } i=1, \dots, n-1.$$

$$(ii) \quad \lambda_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)} \text{ για } i=1, \dots, n-1, \text{ όπου } D_i(s) \text{ είναι ο μονικός μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των μη μηδενικών υποριζουσών τάξης } i \text{ του } N(s) \text{ με } D_0(s)=1.$$

Αντικαθιστώντας την (1.12) στην (1.13) παίρνουμε,

$$G(s) = \frac{S_N(s)}{d(s)} = \begin{bmatrix} \Lambda_d(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $\Lambda_d(s) = \text{διαγ}\left(\frac{\varepsilon_i(s)}{\psi_i(s)}\right)$ , έχοντας κάνει τις σχετικές απαλοιφές των κοινών όρων.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε τους ακόλουθους ορισμούς:

**Ορισμός 1.3** Το **χαρακτηριστικό πολυώνυμο**  $\chi(s)$  του πίνακα συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  ορίζεται ως,

$$\chi(s) = \psi_1(s) \psi_2(s) \dots \psi_n(s)$$

όπου τα  $\psi_i(s)$  είναι τα πολυώνυμα των παρανομαστών της μορφής Smith-McMillan.

**Ορισμός 1.4** Ο αριθμός  $\sum_i \text{βαθμός}(\psi_i(s))$  καλείται **βαθμός McMillan** του  $G(s)$ .

**Ορισμός 1.5** Οι **πόλοι** του πίνακα συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυώνυμου.

**Ορισμός 1.6** Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πολυώνυμο των  $e_i(s)$ ,  $p_z(s)$ , καλείται **μηδενικό πολυώνυμο** του  $G(s)$ .

**Ορισμός 1.7** Οι ρίζες του μηδενικού πολυώνυμου καλούνται **μηδενικά μετάδοσης** (transmission zeros) του  $G(s)$ .

**Ορισμός 1.8** Ένας μιγαδικός αριθμός  $z_0$  καλείται **μηδενικό φραγής** (blocking zero) αν  $G(z_0) = 0$ .

Από τους παραπάνω ορισμούς βλέπουμε ότι υπάρχει μία διαφορά σε ότι αφορά στα μηδενικά ανάμεσα στα βαθμωτά και πολυμεταβλητά συστήματα. Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι ένας μιγαδικός αριθμός  $z_0$  είναι μηδενικό μετάδοσης αν και μόνον αν υπάρχει  $u_0 \neq 0$  τέτοιο ώστε  $G(z_0)u_0 = 0$ .

**Παράδειγμα 1.1** Έστω,

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{(s+1)^2(s+2)^2} & \frac{s}{(s+2)^2} \\ \frac{2s}{(s+2)^2} & \frac{-s}{(s+2)^2} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} \begin{bmatrix} s & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{bmatrix} = \frac{S_N(s)}{d(s)}$$

Ας θέσουμε τον  $S_N(s)$  σε μορφή Smith,

$$D_0(s) = 1$$

$$D_1(s) = \mu.κ.δ. \{s, s(s+1)^2, 2s(s+1)^2, -s(s+1)^2\} = s$$

$$D_2(s) = \mu \cdot \kappa \cdot \delta \cdot \left( \begin{array}{cc} s & s(s+1)^2 \\ 2s(s+1)^2 & -s(s+1)^2 \end{array} \right) = s^2(s+1)^2$$

Επομένως τα  $\lambda_i(s)$  είναι,

$$\lambda_1(s) = \frac{D_1(s)}{D_0(s)} = s$$

$$\lambda_2(s) = \frac{D_2(s)}{D_1(s)} = \frac{s^2(s+1)^2}{s} = s(s+1)^2$$

και τέλος η μορφή Smith-McMillan υπολογίζεται ως,

$$\begin{aligned} G_M(s) &= \text{διαγ} \left[ \frac{\lambda_i(s)}{d(s)} \right] = \\ &= \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)^2} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{(s+1)^2(s+2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{s}{(s+2)^2} \end{array} \right] = \\ &= \text{διαγ} \left[ \begin{array}{c} \varepsilon_i(s) \\ \psi_i(s) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Οι πόλοι της  $G(s)$  είναι οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου,

$$\chi(s) = \psi_1(s)\psi_2(s) = (s+1)^2(s+2)^4$$

δηλαδή δύο πόλοι στο  $-1$  και τέσσερις πόλοι στο  $-2$ , ενώ υπάρχει και ένα μηδενικό μεταφοράς στο  $0$  (μηδενικό πολυώνυμο  $p_z(s) = \varepsilon_1(s)\varepsilon_2(s) = s$ ).

### 1.1.3 Μετάβαση από το πεδίο της συχνότητας στο πεδίο του χρόνου

Δοθείσης της αναπαράστασης του χώρου κατάστασης στο πεδίο του χρόνου, (1.2)-(1.3), είναι θεωρητικά απλό να μεταβούμε στην αναπαράσταση στο πεδίο της συχνότητας (1.10) (αν και η αντιστροφή του  $(sI-A)$  δεν είναι υπολογιστικά εύκολη – ως όπεται το MATLAB). Η αντίστροφη διαδικασία δεν είναι όμως προφανής, ιδιαίτερα όταν επιθυμούμε οι προκύπτοντες πίνακες να έχουν συγκεκριμένη δομή, για παραδειγμα να είναι ελάχιστης πραγμάτωσης. Αυτό θα το περιγράψουμε στην ενότητα 2.3.3. Προς το παρόν θα περιγραφεί μία μέθοδος που υπολογίζει μία «ικανοποιητική» δομή.

Ας γράψουμε την  $G(s)$  σε μορφή στηλών ως,

$$G(s)=[g_1(s), g_2(s), \dots, g_r(s)]$$

όπου κάθε στήλη εκφράζεται ως,

$$g_i(s) = \frac{n_i(s)}{d_i(s)} + \delta_i$$

όπου  $d_i(s)$  είναι το κοινό (μονικό) πολυώνυμο των παρανομαστών του  $g_i(s)$ ,

$$d_i(s) = s^{k_i} + d_i^1 s^{k_i-1} + \dots + d_i^{k_i}$$

$n_i(s)$  είναι ένα διάνυσμα πολυωνύμων, με βαθμούς μικρότερους των  $k_i$ , και  $\delta_i$  ένα διάνυσμα σταθερών. Έστω το  $j$ -στό στοιχείο του  $n_i(s)$ ,

$$v_{ji}(s) = v_{ji}^1 s^{k_i-1} + v_{ji}^2 s^{k_i-2} + \dots + v_{ji}^{k_i}$$

Στη συνέχεια σχηματίζουμε τους ακόλουθους πίνακες:

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -d_i^{k_i} & -d_i^{k_i-1} & -d_i^{k_i-2} & \dots & -d_i \end{bmatrix}, \quad B_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C_i = \begin{bmatrix} v_{1i}^{k_i} & v_{1i}^{k_i-1} & \dots & v_{1i} \\ v_{2i}^{k_i} & v_{2i}^{k_i-1} & \dots & v_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{mi}^{k_i} & v_{mi}^{k_i-1} & \dots & v_{mi} \end{bmatrix}$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η τετράδα  $(A_i, B_i, C_i, \delta_i)$  είναι μία πραγμάτωση της  $g_i(s)$ . Συνεπάγεται ότι μία πραγμάτωση του  $G(s)$  δίνεται από την τετράδα  $(A, B, C, D)$  όπου,

$$A = \text{διαγ}\{A_1, A_2, \dots, A_r\}, \quad B = \text{διαγ}\{B_1, B_2, \dots, B_r\}$$

$$C = \text{διαγ}\{C_1, C_2, \dots, C_r\}, \quad D = \text{διαγ}\{\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_r\}$$

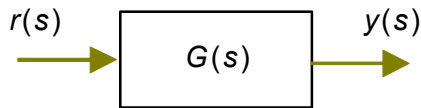
## 1.2 Διαγραμματική αναπαράσταση

Η μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου επικουρείται από **δομικά διαγράμμα-**

**τα**, δηλαδή σχηματικές αναπαραστάσεις των μαθηματικών εξαρτήσεων αλλά και της ροής της πληροφορίας (δηλ. των σημάτων).

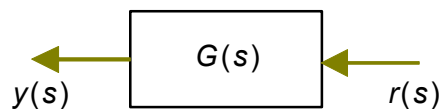
Το στοιχειώδες τμήμα ενός δομικού διαγράμματος φαίνεται στο Σχ. 1.4, και δεν είναι τιποτ' άλλο από την σχηματική εκδοχή της εξίσωσης (1.9),

$$y(s) = G(s)r(s)$$



Σχήμα 1.4 Στοιχειώδες δομικό διάγραμμα συνάρτησης μεταφοράς

Κάποιοι συγγραφείς σχεδιάζουν το Σχ. 1.4 με αντίστροφη φορά βελών, δηλαδή,

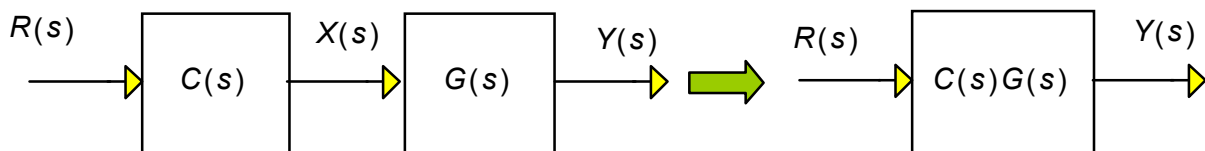


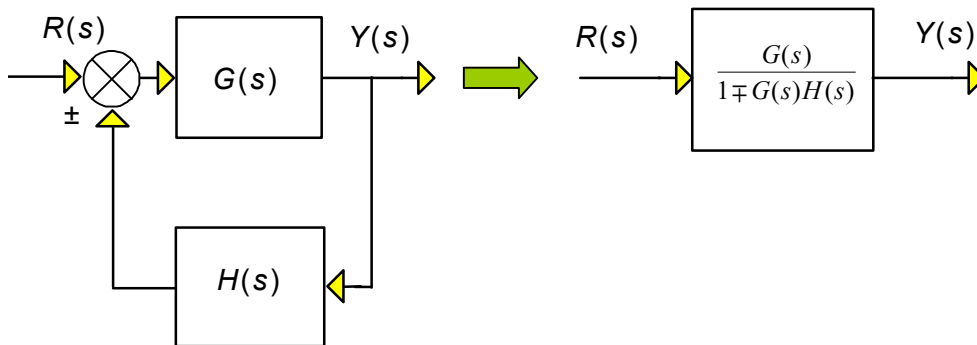
Σχήμα 1.5 Εναλλακτικό στοιχειώδες δομικό διάγραμμα

Ο λόγος είναι ότι επειδή ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι αντιμεταθετικός, δηλαδή,  $G(s)r(s) \neq r(s)G(s)$  (όταν και οι δύο πολλαπλασιασμοί επιτρέπονται από τις διαστάσεις των  $G, r$ ), το Σχ. 1.5 δηλώνει την πράξη  $y(s) = G(s)r(s)$  (η  $G(s)$  εκ δεξιών του  $r(s)$ ) ενώ το Σχ. 1.4 την  $y(s) = r(s)G(s)$  (η  $G(s)$  εκ δεξιών του  $r(s)$ ). Επειδή στην θεωρία που πραγματευόμαστε η δεύτερη περίπτωση απαντάται σπανίως, και επίσης υπάρχει και η παράδοση του Σχ. 1.4, θα χρησιμοποιήσουμε την μορφή αυτή.

Πιο πολύπλοκες συνδέσεις κατασκευάζονται με τη σύνδεση στοιχειωδών τμημάτων είτε σε σειρά είτε σε διάταξη ανατροφοδότησης:

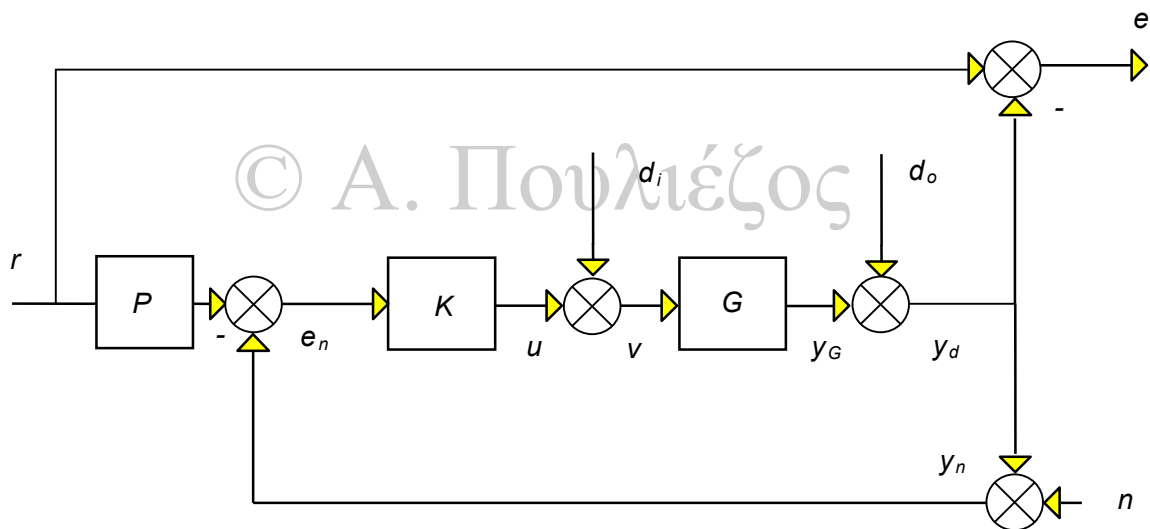
#### (α) Σύνδεση σε σειρά



**(β) Σύνδεση σε διάταξη ανατροφοδότησης**

Σχήμα 1.6

Στη μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου χρησιμοποιούμε τυποποιημένα διαγράμματα, τα οποία αναπαριστούν κάθε δυνατό φυσικό σύστημα που περιγράφεται από τις εξισώσεις (1.1) και (1.2)-(1.3). Το «κλασσικό» διάγραμμα φαίνεται στο Σχ. 1.7.



Σχήμα 1.7 Κλασσικό σύστημα ρύθμισης δύο βαθμών ελευθερίας (μη σταθμισμένο).

Στο σχήμα αυτό απεικονίζονται όλα τα συστατικά ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου.

**Γνωστά δεδομένα:**

Η συνάρτηση  $G(s)$ , που είναι το μαθηματικό υπόδειγμα της υπό έλεγχο διαδικασίας.  
Η είσοδος  $r(s)$  που συμβολίζει την επιθυμητή συμπεριφορά της  $G$ .

**Μερικώς γνωστά ή άγνωστα δεδομένα:**

Ο θόρυβος των μετρήσεων  $n(s)$  (είσοδος).

Οι διαταραχές στην είσοδο (δηλαδή στον επενεργητή, που θεωρούμε τμήμα της ε-



γκατάστασης) και έξοδο της εγκατάστασης,  $d_i(s)$ ,  $d_o(s)$  (είσοδοι).

### Ζητούμενα:

Ο ελεγκτής  $K(s)$ , έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι προδιαγραφές λειτουργίας (κυρίως), και δευτερευόντως ο προελεγκτής  $P(s)$  (για τη ρύθμιση του σφάλματος σταθερής κατάστασης).

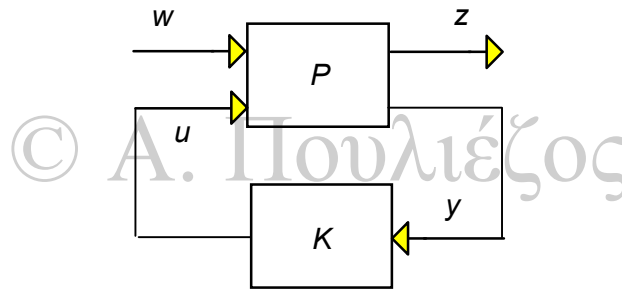
Είναι σχετικά απλό να υπολογίσουμε ότι το Σχ. 1.7 είναι το διαγραμματικό ισοδύναμο των σχέσεων,

$$e = (I + GK)^{-1} [I + GK(I - P)]r - (I + GK)^{-1} d_o - (I + GK)^{-1} G d_i - (I + GK)^{-1} GK n$$

$$u = (I + KG)^{-1} KPr - (I + KG)^{-1} K d_o - (I + KG)^{-1} KG d_i - (I + KG)^{-1} Kn$$

(λεπτομέρειες στην Ενότητα 3.1).

Στον έλεγχο ελάχιστης νόρμας (για συστήματα χωρίς αβεβαιότητα) χρησιμοποιούμε ένα εναλλακτικό, ισοδύναμο διάγραμμα, που απεικονίζει καλύτερα την φιλοσοφία της συγκεκριμένης προσέγγισης, **το διάγραμμα δύο θυρών** (Σχ. 1.8).



Σχήμα 1.8 Δομικό διάγραμμα δύο θυρών

όπου,

$$z = \begin{bmatrix} u \\ e \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} r \\ y_n \end{bmatrix}, \quad u = u$$

και  $z$  οι μεταβλητές εξόδου που θέλουμε να ρυθμίσουμε,  $w$  οι εξωγενείς είσοδοι,  $y$  οι είσοδοι στον ελεγκτή και  $u$  το σήμα ελέγχου (έξοδος του ελεγκτή).

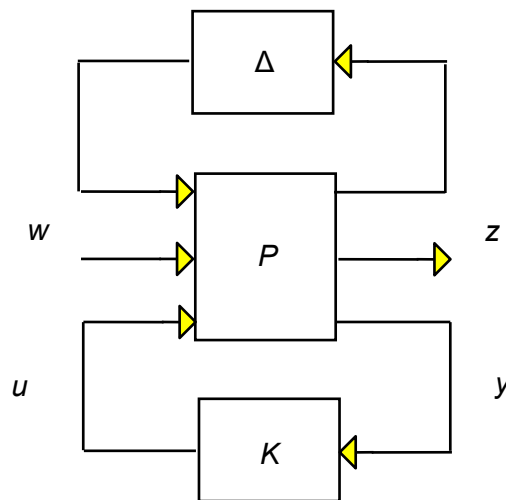
Το Σχ. 1.8 δεν είναι τίποτ' άλλο από την σχηματική παράσταση των μαθηματικών σχέσεων,

$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \stackrel{\text{op}}{=} P(s) \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

$$u(s)=K(s)y(s) \quad (1.15)$$

Η μετάβαση από την αναπαράσταση του Σχ. 1.7 σε αυτήν του Σχ. 1.8 θα περιγραφεί στην Ενότητα 4.2.4.

Τέλος, στην ανάλυση και σύνθεση συστημάτων με αβεβαιότητα χρησιμοποιείται μία επέκταση του διαγράμματος δύο θυρών που φαίνεται στο Σχ. 1.9.



Σχήμα 1.9 Διάγραμμα δύο θυρών για σύστημα με αβεβαιότητα

Στο σχήμα αυτό το τετράγωνο  $\Delta$  εσωκλείει κάθε αβεβαιότητα που θέλουμε να λάβουμε υπ' όψη μας στο σύστημα  $P$ . Συγκεκριμένες δομές για το κομμάτι αυτό θα δούμε στην Ενότητα 5.2.

## Κεφάλαιο 2

### Δυναμικά συστήματα

#### 2.1 Μετασχηματισμοί κατάστασης

Έστω πάλι το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3)$$

και ένας ομαλός  $n \times n$  πίνακας  $M$ . Το διάνυσμα,

$$z = Mx$$

καλείται **μετασχηματισμένο διάνυσμα κατάστασης**.

Μπορούμε εύκολα να μετασχηματίσουμε το σύστημα (1.2)-(1.3) έτσι ώστε να έχουμε τις εξισώσεις κατάστασης ως προς  $z$ . Στην πραγματικότητα το  $z$  δεν είναι τίποτα άλλο παρά ένας γραμμικός συνδυασμός των αρχικών καταστάσεων. Έχουμε:

$$\dot{z} = M\dot{x} = M(Ax + Bu) = Max + MBu$$

Όμως,

$$x = M^{-1}z$$

και αντικαθιστώντας,

$$\dot{z} = MAM^{-1}z + MBu$$

$$y = CM^{-1}z$$

Ορίζοντας τους μετασχηματισμένους πίνακες,

$$\hat{A} = MAM^{-1}$$

$$\hat{B} = MB$$

$$\hat{C} = CM^{-1}$$

λαμβάνουμε τις μετασχηματισμένες εξισώσεις κατάστασης:

$$\dot{z} = \hat{A}z + \hat{B}u$$

$$y = \hat{C}z$$

Προσέξτε ότι οι πίνακες  $A$  και  $\hat{A}$  έχουν πάντα τις ίδιες ιδιοτιμές και συνεπώς ο μετασχηματισμός  $M$  δεν αλλάζει τα δυναμικά χαρακτηριστικά του συστήματος.

### 2.1.1 Διαγώνιος μετασχηματισμός

Ένας ιδιαίτερα χρήσιμος μετασχηματισμός είναι αυτός που θέτει έναν τετραγωνικό πίνακα σε διαγώνιο μορφή. Ας θεωρήσουμε λοιπόν έναν πίνακα  $A(n \times n)$ , τον πίνακα των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων του  $W$ , και τον πίνακα των ιδιοτιμών  $\Lambda = \text{διαγ}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Ας υποθέσουμε κατ' αρχήν  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Τότε ο πίνακας  $W$  είναι αντιστρέψιμος και ισχύει:

$$A = W\Lambda W^{-1}$$

Έστω τώρα ότι επιλέγουμε τον μετασχηματισμό  $M = W^{-1}$ . Ο μετασχηματισμένος πίνακας του συστήματος είναι,

$$\hat{A} = W^{-1}AW = W^{-1}(W\Lambda W^{-1})W = \Lambda$$

δηλαδή ο διαγώνιος πίνακας των ιδιοτιμών. Οι μετασχηματισμένοι πίνακες εισόδων και εξόδων είναι,

$$\hat{B} = W^{-1}B \quad \text{και} \quad \hat{C} = CW$$

Αν τις μετασχηματισμένες καταστάσεις τις καλέσουμε  $\xi$  θα έχουμε:

$$\dot{\xi} = \Lambda\xi + \hat{B}u$$

$$y = \hat{C}\xi$$

Οι καταστάσεις  $\xi$  καλούνται **αποσυζευγμένες καταστάσεις** (decoupled states) και έχουν την βασική ιδιότητα ότι η συμπεριφορά τους είναι ανεξάρτητη από τις υπόλοιπες: σε κάθε διακεκριμένη ιδιοτιμή  $\lambda_k$  αντιστοιχεί και μία διαγώνια κατάσταση.

Αν τώρα οι ιδιοτιμές δεν είναι διακεκριμένες και δεν μπορούν να βρεθούν  $n$  γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα, τότε ισχύει το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 2.1** Έστω ο  $(n \times n)$  πίνακας  $A$  με  $k$  διακεκριμένες ιδιοτιμές  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ , κάθε μία από τις οποίες έχει πολλαπλότητα  $m_i$ . Τότε μπορούμε πάντα να βρούμε έναν

ομαλό πίνακα  $W$ , διαμερισμένο ως,

$$W = [W_1 \ W_2 \ \dots \ W_k]$$

τέτοιον ώστε,

$$A = WJW^{-1} \quad (2.1)$$

όπου,

$$J = \text{διαγ}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_k]$$

Οι πίνακες  $W_i, J_i$  είναι διαστάσεων  $(m_i \times m_i)$ . Οι στήλες των  $W_i$  αποτελούν μία ειδικά επιλεγμένη βάση του μηδενικού χώρου  $\mathcal{N}_i, i=1, \dots, k$ . Οι πίνακες  $J_i$  μπορούν περαιτέρω να υποδιαμεριστούν ως,

$$J_i = [J_{i1} \ J_{i2} \ \dots \ J_{il_i}] \quad (2.2)$$

όπου κάθε υποπίνακας  $J_{ij}$  είναι της μορφής,

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_i & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}$$

Ο πίνακας  $J$  καλείται **κανονική μορφή Jordan** του πίνακα  $A$ .

Ο υπολογισμός του πίνακα  $W$  επιτυγχάνεται ως εξής:

Κατ' αρχήν παρατηρούμε ότι από την (2.1) προκύπτει ότι,

$$AW = WJ \quad (2.3)$$

Ας παραστήσουμε τις στήλες του  $W$  ως  $q_1, q_2, \dots, q_n$ . Τότε από τη μορφή του  $J$  και την (2.3) προκύπτει ότι,

$$Aq_i = \lambda q_i + \gamma_i q_{i-1} \quad (2.4)$$

όπου το  $\gamma_i$  είναι 0 ή 1, ανάλογα με τον  $J$ . Ας υποδιαμερίσουμε τον  $W_i$  παρόμοια με τον υποδιαμερισμό (2.2), ως,

$$W_i = [W_{i1} \ W_{i2} \ \dots \ W_{il_i}]$$

Τότε ο αριθμός  $\gamma_i$  είναι 0 όταν η αντίστοιχη στήλη  $q_i$  του  $W$  είναι η πρώτη στήλη ενός

υποδιαμερίσματος. Από την (2.4) προκύπτει ότι στην περίπτωση αυτή το  $q_i$  είναι ιδιοδιάνυσμα του  $A$ , άρα οι πρώτες στήλες κάθε υποδιαμερίσματος είναι τα ιδιοδιανύσματα του  $A$ . Οι υπόλοιπες στήλες ακολουθούν από την (2.4) με  $\gamma_i=1$ . Αυτές οι επόμενες στήλες καλούνται **γενικευμένα ιδιοδιανύσματα** του  $A$ . Η διαδικασία σταματά όταν η (2.4) δεν έχει λύση.

## 2.2 Επίλυση γραμμικών συστημάτων

Έστω το γραμμικό, μη ομογενές, δυναμικό σύστημα,

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t), x(0)=x_0 \quad (1.2)$$

Για την επίλυση της εξίσωσης αυτής θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική συνάρτηση πίνακα  $e^A$  που ορίζεται αντίστοιχα με την βαθμωτή εκθετική συνάρτηση  $e^a$ ,

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

Μπορεί ν' αποδειχθεί ότι η σειρά αυτή συγκλίνει για κάθε τετραγωνικό πίνακα  $A$ .

Συλλέγοντας τους όρους που περιέχουν το  $x(t)$  αριστερά και πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με  $e^{-At}$ , βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} e^{-At}(\dot{x}(t) - Ax(t)) &= e^{-At}Bu(t) \Rightarrow \frac{d}{dt}[e^{-At}x(t)] = e^{-At}Bu(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{-At}x(t) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + c \\ &\Rightarrow x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ο πίνακας,

$$\Phi(t) = e^{At}$$

καλείται **πίνακας μετάβασης** από την αρχική στιγμή  $t_0=0$  στην χρονική στιγμή  $t$ . Υπολογίζεται (σχετικά) εύκολα με την χρήση του διαγώνιου μετασχηματισμού της προηγούμενης ενότητας:

### 2.2.1 Γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα

Αν οι ιδιοτιμές του  $A$  είναι διακεκριμένες ή δεν είναι αλλά μπορεί να βρεθεί ένα σύνολο γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανυσμάτων,

$$e^{At} = e^{(W\Lambda W^{-1})t} = W e^{At} W^{-1} = \Phi(t) \quad (2.6)$$

όπου,

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & & & \\ & e^{\lambda_2 t} & & \\ & & \dots & \\ & & & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$$

και  $W$  ο πίνακας των δεξιών ιδιοδιανυσμάτων.

Συνεπώς κάθε φορά θα πρέπει να υπολογίζουμε τον διαγώνιο μετασχηματισμό  $W$ , τον αντίστροφο  $W^{-1}$ , τον πίνακα ιδιοτιμών  $A$  και μετά να υπολογίζουμε την εκθετική παράσταση,  $e^{At}$ .

Αν το σύστημα είναι ομογενές, δηλαδή περιγράφεται από την,

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0$$

η λύση απλουστεύεται καθώς η (2.5) γίνεται,

$$x(t) = e^{At} x_0 \quad (2.7)$$

και μετασχηματίζοντάς την σε μορφή Jordan μέσω της  $x = W\xi$ , λαμβάνουμε,

$$W\xi(t) = e^{At} W\xi_0$$

ή 
$$\xi(t) = W^{-1} e^{At} W\xi_0 = e^{At} \xi_0$$

Η αρχική συνθήκη  $\xi_0$  βρίσκεται εύκολα αφού,

$$\xi_0 = W^{-1} x_0 = \begin{bmatrix} v_1^T \\ \dots \\ v_n^T \end{bmatrix} x_0 = v_i^T x_0$$

(όπου το  $v_i^T$  είναι η  $i$ -οστή γραμμή του  $W^{-1}$ ).

Έτσι, η (2.7) γίνεται,

$$\begin{aligned} x(t) &= W\xi(t) = [w_1 \quad \dots \quad w_n] \xi(t) = w_1 \xi_1(t) + \dots + w_n \xi_n(t) \\ &= (v_1^T x_0) e^{\lambda_1 t} w_1 + \dots + (v_n^T x_0) e^{\lambda_n t} w_n \end{aligned} \quad (2.8)$$

Η ανάπτυξη αυτή καλείται **αποσύνθεση modal**. Καταδεικνύει τον τρόπο με τον οποίο η συνολική χρονική απόκριση συντίθεται από ένα άθροισμα επιμέρους αποκρίσεων που σχετίζονται με τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του συστήματος.

**Παράδειγμα 2.2** Ας δούμε το παράδειγμα της αναδευόμενης δεξαμενής,

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -0,01 & 0 \\ 0 & -0,02 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.9)$$

Οι ιδιοτιμές του πίνακα  $A$  είναι:

$$\lambda_1 = -0,01, \lambda_2 = -0,02$$

ενώ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα,

$$w_1 = [1 \ 0]^T, w_2 = [0 \ 1]^T$$

Έτσι, η (2.6) δίνει,

$$e^{At} = W e^{At} W^{-1} = \begin{bmatrix} e^{-0,01t} & 0 \\ 0 & e^{-0,02t} \end{bmatrix}$$

ενώ η λύση (2.5) είναι,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-0,01t} & 0 \\ 0 & e^{-0,02t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} e^{-0,01(t-\tau)} & 0 \\ 0 & e^{-0,02(t-\tau)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,25 & 0,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \end{bmatrix} d\tau \\ \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e^{-0,01t} x_1(0) + e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} u_1(\tau) + e^{0,01\tau} u_2(\tau)] d\tau \\ e^{-0,02t} x_2(0) + e^{-0,02t} \int_0^t [-0,25 e^{0,02\tau} u_1(\tau) + 0,75 e^{0,02\tau} u_2(\tau)] d\tau \end{bmatrix} \quad (2.10) \end{aligned}$$

Ας δούμε κάποιες αποκρίσεις για μηδενικές αρχικές συνθήκες και διάφορες τιμές της εισόδου  $u(t)$ .

A. Βηματική συνάρτηση  $u(t) = [0,002 \ 0,002]^T \text{ m}^3/\text{s}$ . Η (2.10) γίνεται,

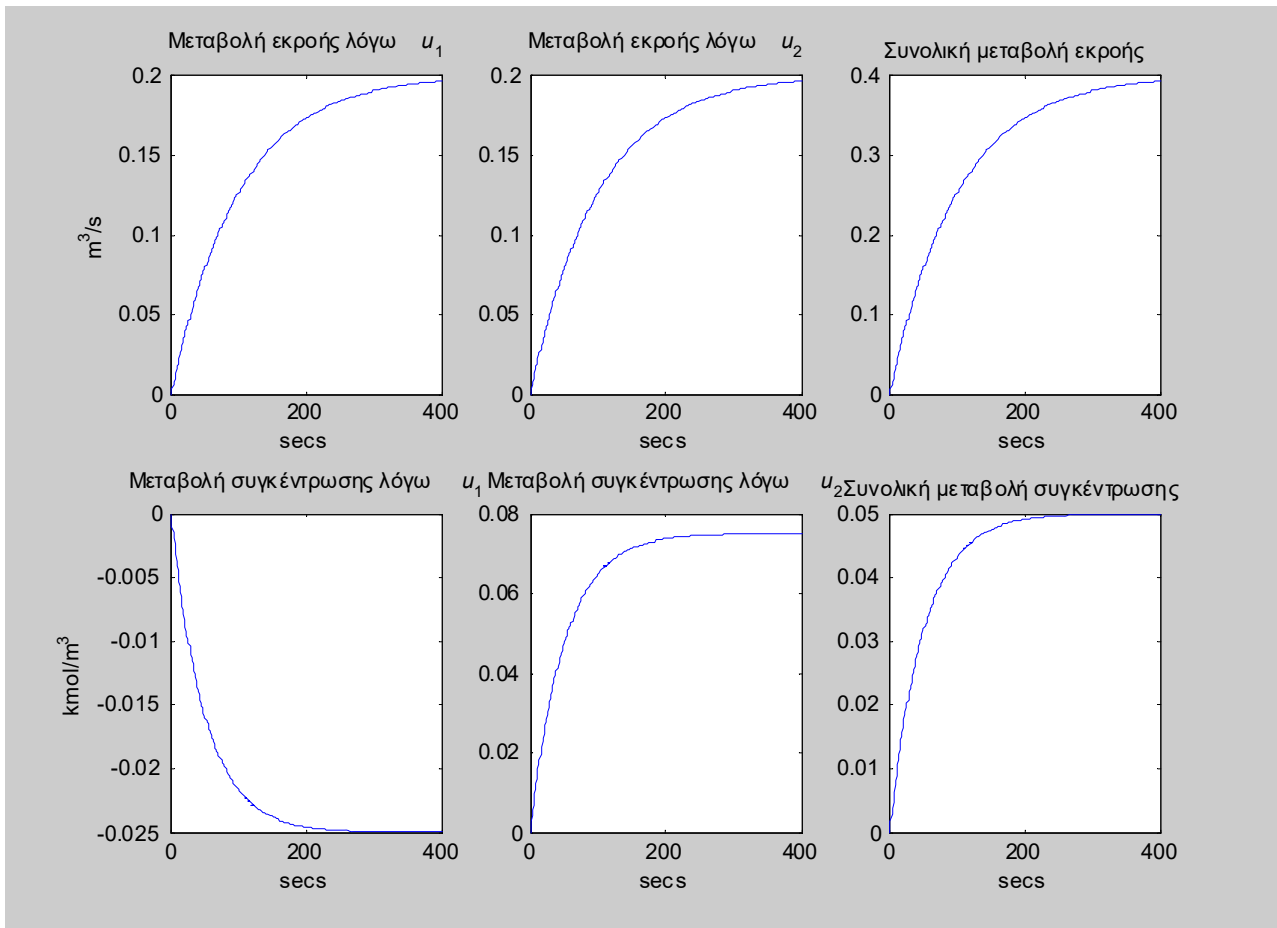
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,004 e^{-0,01t} \int_0^t e^{0,01\tau} d\tau \\ 0 \\ 0,001 e^{-0,02t} \int_0^t e^{0,02\tau} d\tau \end{bmatrix}$$



$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= 0,004e^{-0,01t} \left[ \frac{1}{0,01} e^{0,01\tau} \right]_0^t = 0,4e^{-0,01t} [e^{0,01t} - 1] = 0,4 - 0,4e^{-0,01t} \\ x_2(t) &= 0,001e^{-0,02t} \left[ \frac{1}{0,02} e^{0,02\tau} \right]_0^t = 0,05e^{-0,02t} [e^{0,02t} - 1] = 0,05 - 0,05e^{-0,02t} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Όπως φαίνεται από την (2.11) οι αποκρίσεις τείνουν σε μια σταθερή τιμή ενώ οι εκθέτες των εκθετικών όρων είναι οι ιδιοτιμές του  $A$ . Το γεγονός ότι είναι αρνητικές είναι ο λόγος που οι αποκρίσεις είναι πεπερασμένες. Η παρατήρηση αυτή θα γενικευθεί στην ενότητα περί σταθερότητας.

Η γραφική αναπαράσταση των αποκρίσεων φαίνονται στο Σχ. 2.10, όπου παρατίθενται οι αποκρίσεις για κάθε είσοδο ξεχωριστά (βλέπε Εξ. (2.10)) και οι συνολικές.



Σχήμα 2.10 Χρονικές αποκρίσεις σε βηματική είσοδο

B. Αρμονική είσοδος  $u(t)=0,002 \times [\eta\mu(20\pi t) \quad \eta\mu(20\pi t)]$ .

Στην περίπτωση αυτή η (2.10) γίνεται,

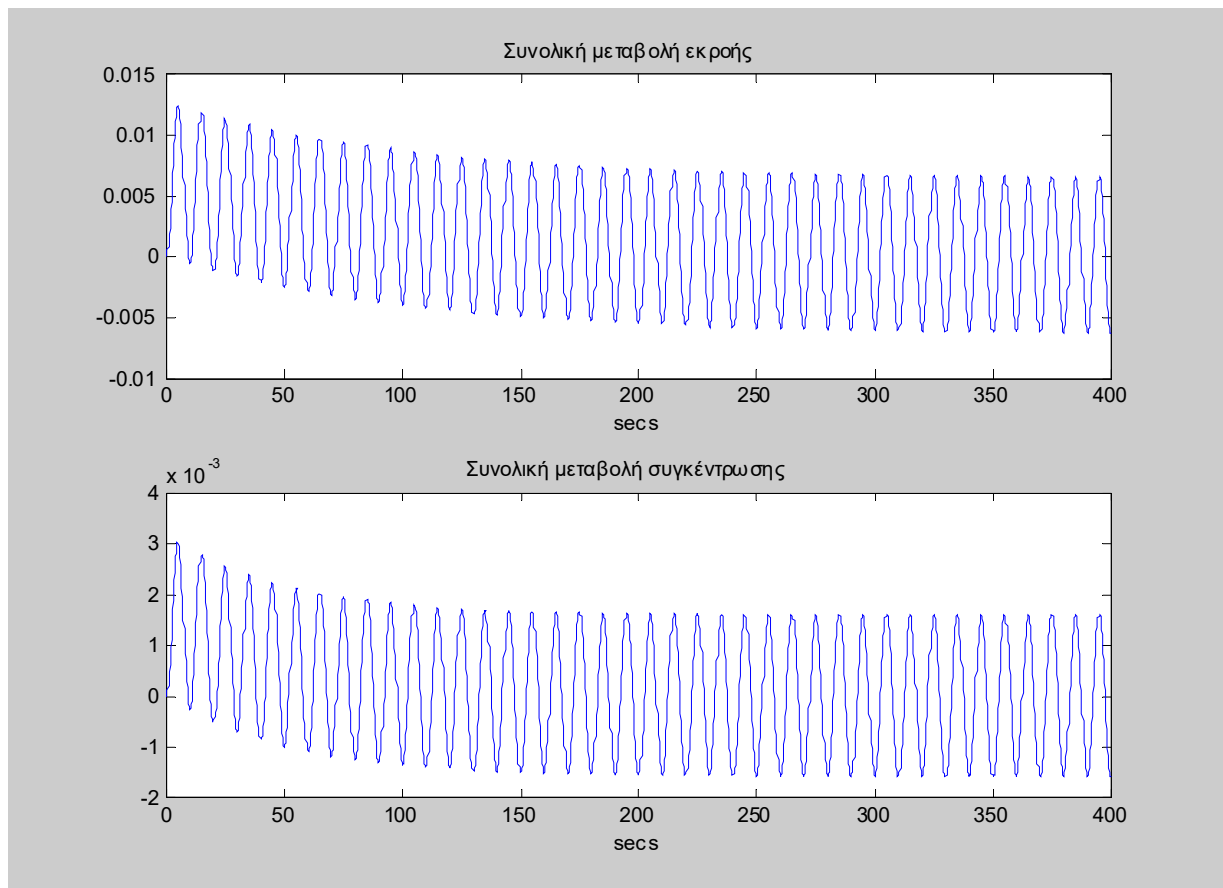
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,002 \times e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau) + e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \\ 0,002 \times e^{-0,02t} \int_0^t [-0,25e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau) + 0,75e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= 0,004 \times e^{-0,01t} \int_0^t [e^{0,01\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \\ x_2(t) &= 0,001 \times e^{-0,02t} \int_0^t [e^{0,02\tau} \eta\mu(20\pi\tau)] d\tau \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= 0,004 \times e^{-0,01t} \left\{ \frac{e^{0,01\tau}}{0,01^2 + (20\pi)^2} [0,01\eta\mu(20\pi\tau) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi\tau)] \right\}_0^t \\ x_2(t) &= 0,001 \times e^{-0,02t} \left\{ \frac{e^{0,02\tau}}{0,02^2 + (20\pi)^2} [0,02\eta\mu(20\pi\tau) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi\tau)] \right\}_0^t \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x_1(t) &= \frac{0,004}{0,01^2 + (20\pi)^2} [0,01\eta\mu(20\pi t) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t)] - \frac{0,004 \cdot 20\pi}{0,01^2 + (20\pi)^2} e^{-0,01t} \\ x_2(t) &= \frac{0,001}{0,02^2 + (20\pi)^2} [0,02\eta\mu(20\pi t) + 20\pi\sigma\upsilon\nu(20\pi t)] - \frac{0,001 \cdot 20\pi}{0,02^2 + (20\pi)^2} e^{-0,02t} \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι οι αποκρίσεις "καταλήγουν" σε μία αρμονική απόκριση αφού η επίδραση των εκθετικών όρων έχει εξασθενήσει. Τα ευρήματα μας επιβεβαιώνονται από τα γραφήματα του Σχ. 2.11.



Σχήμα 2.11 Χρονικές αποκρίσεις σε αρμονική είσοδο

### 2.2.2 Γραμμικά εξαρτημένα ιδιοδιανύσματα

Αν οι ιδιοτιμές του  $A$  δεν είναι διακεκριμένες τότε το σύστημα μπορεί να τεθεί σε μορφή Jordan μέσω του μετασχηματισμού 2.1,

$$A = WJW^{-1}$$

όπου,

$$J = \text{διαγ}[J_1 \ J_2 \ \dots \ J_k]$$

Έστω ότι ο  $A$  έχει  $k$  διακεκριμένες ιδιοτιμές,  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  με πολλαπλότητες  $m_i$ . Τότε,

$$e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$$

$$e^{Jt} = \text{διαγ}\left[e^{J_1 t} \quad e^{J_2 t} \quad \dots \quad e^{J_k t}\right]$$

$$e^{J_i t} = \text{διαγ}\left[e^{J_{i1} t} \quad e^{J_{i2} t} \quad \dots \quad e^{J_{i m_i} t}\right]$$

$$e^{J_{ij}t} = e^{\lambda_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \dots & \frac{t^{n_{ij}-1}}{(n_{ij}-1)!} \\ 0 & 1 & t & \dots & \frac{t^{n_{ij}-2}}{(n_{ij}-2)!} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

όπου  $n_{ij}$  είναι η διάσταση του  $J_{ij}$ .

## 2.3 Ιδιότητες συστημάτων

### 2.3.1 Ελεγχιμότητα

Θεωρούμε το προαναφερθέν σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

**Ορισμός 2.9** Ένα σύστημα καλείται **πλήρως ελέγξιμο (completely controllable)** αν δεδομένων των αρχικών συνθηκών κατάστασης  $x_0$  και μιας επιθυμητής τιμής καταστάσεων  $x^*(t)$ , μπορούμε πάντα να βρούμε κατάλληλες και πεπερασμένες τιμές ελέγχου  $u(t)$  ώστε το σύστημα να φθάσει στην επιθυμητή τιμή σε πεπερασμένο χρόνο  $t < \infty$ .

**Ορισμός 2.10** Ο **Γραμιανός<sup>2</sup> ελεγχιμότητας** ορίζεται ως,

$$W_c(0, t) = W_c(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} BB^T e^{A^T(t-\tau)} d\tau \quad (2.12)$$

**Θεώρημα 2.2** Το σύστημα (1.2) είναι πλήρως ελέγξιμο αν και μόνον αν ο  $n \times nr$  **πίνακας ελεγχιμότητας**,

$$\Gamma = [ B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B ]$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή  $\text{βαθμός}(\Gamma) = n$ .

### 2.3.2 Παρατηρησιμότητα

**Ορισμός 2.11** Ένα σύστημα καλείται **πλήρως παρατηρήσιμο (completely observable)** αν γνωρίζοντας τις τιμές των εξόδων  $y(t)$  και εισόδων  $u(t)$  για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα  $t$ ,  $0 < t < \infty$  τότε μπορούμε να ανακτήσουμε τις τιμές των

<sup>2</sup> Gramian: από τον μαθηματικό Gram, δες βιογραφίες.

μεταβλητών κατάστασης  $x(t)$  για οποιαδήποτε χρονική στιγμή του διαστήματος  $[0, t]$ . Αυτό σημαίνει ότι παρατηρώντας τις σχέσεις του συστήματος με το περιβάλλον (είσοδοι-έξοδοι) μπορούμε να υπολογίσουμε την εσωτερική συμπεριφορά του συστήματος.

**Θεώρημα 2.3** Ένα σύστημα είναι πλήρως παρατηρήσιμο αν και μόνον αν ο  $nm \times n$  πίνακας παρατηρησιμότητας,

$$\Theta = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

είναι πλήρους βαθμού, δηλαδή βαθμός  $[\Theta] = n$ .

Η ελεγχιμότητα και η παρατηρησιμότητα είναι έννοιες *δ्विकές*. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε τα συστήματα (Σ1), (Σ2):

$$(Σ1) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t) \end{cases}$$

και,

$$(Σ2) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = B^T x(t) \end{cases}$$

τότε οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν ταυτόχρονα:

Σ1	Σ2
ελεγχιμότητα	παρατηρησιμότητα
παρατηρησιμότητα	ελεγχιμότητα

### 2.3.3 Ελάχιστες πραγματώσεις

Ας εξετάσουμε το τυπικό σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t) \quad (1.3)$$

που εκκινεί από ακινησία δηλαδή  $x(0)=0$ . Η σχέση εισόδου-εξόδου για το σύστημα αυτό δίνεται από την σχέση,

$$y(t) = \int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) \quad (2.13)$$

Αν θεωρήσουμε ότι η σχέση (2.13), δηλαδή η απεικόνιση εισόδου-εξόδου, είναι το ουσιαστικό αντικείμενο της μελέτης μας, τότε το σύστημα χώρου κατάστασης είναι απλά μία πραγμάτωση αυτής της απεικόνισης, δηλαδή ένας τρόπος να ορισθεί αυτή η απεικόνιση με όρους μίας διανυσματικής διαφορικής εξίσωσης πρώτης τάξης.

**Ορισμός 2.12** Δύο πραγμάτωσεις είναι ισοδύναμες αν,

$$\int_0^t C e^{A(t-\tau)} B u(\tau) d\tau + D u(t) = \int_0^t C_1 e^{A_1(t-\tau)} B_1 u(\tau) d\tau + D_1 u(t)$$

για όλες τις συναρτήσεις εισόδου  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ .

**Θεώρημα 2.4** Δύο πραγμάτωσεις  $(A, B, C, D)$ ,  $(A_1, B_1, C_1, D_1)$  είναι ισοδύναμες αν και μόνον αν  $D=D_1$  και,

$$C e^{At} B = C_1 e^{A_1 t} B_1, \forall t \geq 0.$$

**Ορισμός 2.13** Η πραγμάτωση  $(A, B, C, D)$  καλείται ελάχιστη αν δεν υπάρχει ισοδύναμη πραγμάτωση μικρότερης τάξης.

**Θεώρημα 2.5** Η  $(A, B, C, D)$  είναι ελάχιστη πραγμάτωση αν και μόνον αν το ζεύγος  $(C, A)$  είναι παρατηρήσιμο και το  $(A, B)$  ελέγξιμο.

Το Θεώρημα 2.5 μας δίνει και την διαδικασία εύρεσης μίας ελάχιστης πραγμάτωσης. Αν η αρχική πραγμάτωση είναι σε μορφή χώρου κατάστασης, έστω  $(A, B, C, D)$ , τότε μέσω της **αποσύνθεσης Kalman** μπορούμε να μετασχηματίσουμε το σύστημα σε μορφή ελάχιστης πραγμάτωσης. Η διαδικασία αυτή είναι ως ακολούθως:

Κατασκευάζεται ένας πίνακας μετασχηματισμού,

$$T = [T_{c\bar{o}} \quad T_{co} \quad T_{\bar{c}o} \quad T_{\bar{c}o}]$$

του οποίου οι υποπίνακες ορίζονται ως ακολούθως:

1. Οι στήλες του  $T_{c\bar{o}}$  αποτελούν μία βάση του υποχώρου που είναι ελέγξιμος και μη παρατηρήσιμος.
2. Ο  $T_{co}$  είναι το συμπλήρωμα του  $T_{c\bar{o}}$  στον ελέγξιμο υποχώρο, δηλαδή οι στήλες του είναι βάση του υποχώρου που είναι ελέγξιμος και παρατηρήσιμος.
3. Ο  $T_{\bar{c}o}$  είναι το συμπλήρωμα του  $T_{\bar{c}o}$  στον μη παρατηρήσιμο υποχώρο, δηλαδή

οι στήλες του είναι βάση του υποχώρου που είναι μη ελέγξιμος και μη παρατηρήσιμος.

4. Ο  $T_{\bar{c}o}$  είναι το συμπλήρωμα του  $[T_{c\bar{o}} \quad T_{co} \quad T_{\bar{c}\bar{o}}]$  έτσι ώστε ο  $T$  να είναι αντιστρέψιμος, δηλαδή οι στήλες του είναι βάση του υποχώρου που είναι μη ελέγξιμος και παρατηρήσιμος.

(Σημείωση: κάποιιοι από τους παραπάνω υποπίνακες μπορεί να είναι μηδενικής διάστασης· αυτό εξαρτάται από τη φύση του συστήματος).

Στη συνέχεια εκτελούμε τον μετασχηματισμό ομοιότητας,

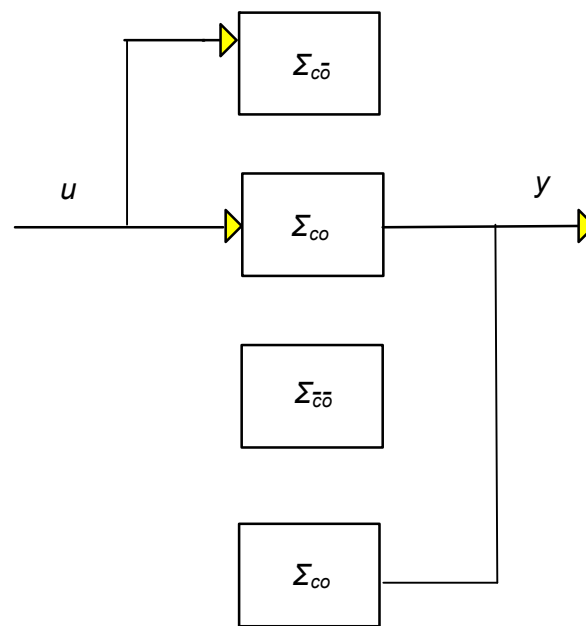
$$(A, B, C, D) \rightarrow (T^{-1}AT, T^{-1}B, CT, D) \rightarrow (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$$

όπου μπορεί ν' αποδειχθεί ότι οι πίνακες  $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, D)$  είναι της μορφής,

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} A_{c\bar{o}} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ 0 & A_{co} & 0 & A_{24} \\ 0 & 0 & A_{\bar{c}\bar{o}} & A_{34} \\ 0 & 0 & 0 & A_{\bar{c}o} \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} B_{c\bar{o}} \\ B_{co} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{C} = [0 \quad C_{co} \quad 0 \quad C_{\bar{c}o}]$$

Το μετασχηματισμένο σύστημα αναπαρίσταται εύγλωττα από το διάγραμμα του Σχ. 2.12.



Σχήμα 2.12 Αποσύνθεση Kalman

Έτσι η ελάχιστη πραγμάτωση αποτελείται βασικά από το (υπο)σύστημα  $\Sigma_{co}$ .

### 2.3.4 Ευστάθεια

Υπάρχουν διάφοροι ορισμοί για την ευστάθεια, αυτό όμως που ενδιαφέρει πρακτικά είναι η κατάσταση  $x(t)$  του συστήματος να μην «εκρήγνυται». Αυτό πρέπει να ισχύει τόσο για αυτόνομη κίνηση ( $u(t)=0$ ) όσο και για βεβιασμένη ( $u(t) \neq 0$ ). Η πρώτη απαίτηση καλείται *ασυμπτωτική ευστάθεια* (*asymptotic stability*) ενώ η δεύτερη *ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου* (*BIBO stability*).

**Ορισμός 2.14** Το σημείο  $x_0$  είναι *σημείο ισορροπίας* της διαφορικής εξίσωσης,

$$\dot{x}(t) = f(x(t))$$

αν και μόνον αν,

$$0 = f(x_0)$$

Για το γραμμικό σύστημα  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  ένα προφανές σημείο ισορροπίας είναι το  $x^*(t) = 0$ , αφού απαιτείται  $Ax(t) = 0$ . Αν όμως ο  $A$  έχει μηδενικές ιδιοτιμές, τότε υπάρχουν άπειρα μη μηδενικά ιδιοδιανύσματα που ικανοποιούν την εξίσωση ισορροπίας. Στη συνέχεια, η περίπτωση αυτή δεν θα αντιμετωπισθεί.

**Ορισμός 2.15** Το σύστημα  $\{\dot{x}(t) = Ax(t), x(0) = x_0\}$  καλείται *ευσταθές κατά Lyapunov* γύρω από το σημείο ισορροπίας  $x^* = 0$ , αν για μικρές μετατοπίσεις γύρω από  $x^* = 0$ , δηλαδή για αρχικές συνθήκες  $x_0$  τέτοιες ώστε,



$$\|x_0\| < \delta$$

η τροχιά του συστήματος  $x(t)$  παραμένει πάντα μέσα σε μια φραγμένη περιοχή του  $x^*=0$ , δηλαδή,

$$\|x(t)\| < \varepsilon$$

όπου  $\varepsilon = \varepsilon(\delta) < \infty$ .

**Ορισμός 2.16** Το σύστημα  $\{\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\}$  καλείται **ασυμπτωτικά ευσταθές** γύρω από το σημείο ισορροπίας  $x^*=0$  αν υπάρχει μια περιοχή  $\delta$  έτσι ώστε για αρχικές συνθήκες εντός αυτής της περιοχής το σύστημα να τείνει πάντα να επιστρέψει στο  $x^*=0$ , δηλαδή,

$$\|x_0\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

Όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές κατά Lyapunov. Το αντίστροφο όμως δεν ισχύει γιατί ένα σύστημα μπορεί να παραμένει διαρκώς σε μια πεπερασμένη απόσταση γύρω από το σημείο ισορροπίας χωρίς ποτέ να το προσεγγίζει ικανοποιητικά (ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το είδος της αδιάφορης ισορροπίας στην μηχανική).

**Θεώρημα 2.6** Το σύστημα  $\{\dot{x}(t)=Ax(t), x(0)=x_0\}$  είναι,

(α) Ευσταθές κατά Lyapunov αν και μόνον αν  $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} \leq 0$  και τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις μηδενικές ιδιοτιμές είναι διακεκριμένα.

(β) Ασυμπτωτικά ευσταθές αν και μόνον αν  $\operatorname{Re}\{\lambda_i\} < 0$ .

*Απόδειξη:* Η λύση του συστήματος δίνεται από την σχέση:

$$x(t) = e^{At} x_0$$

Το σημείο ισορροπίας είναι το  $x^*=0$  (εκτός αν μία  $\lambda=0$ ) και χρησιμοποιώντας τον διαγώνιο μετασχηματισμό  $A = W^{-1} \Lambda W$  έχουμε:

$$x(t) = W^{-1} e^{\Lambda t} W x_0$$

Η λύση  $x(t)$  είναι δηλαδή γραμμικός συνδυασμός των χρονικών εκθετικών  $e^{\lambda_i t}$ . Είναι γνωστό όμως ότι,  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$  αν και μόνο αν  $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$ .

Αν τώρα κάθε  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{\lambda_i t} = 0$ , οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός θα τείνει επίσης

στο μηδέν. Αντίστροφα αν ο γραμμικός συνδυασμός δεν τείνει στο μηδέν, τότε θα υπάρχει τουλάχιστον ένας όρος  $e^{\lambda_i t}$  που δεν τείνει στο μηδέν, πράγμα εφικτό μόνο

αν  $\text{Re}(\lambda_i) > 0$ , όπερ άτοπο.

Επειδή η ευστάθεια του συστήματος καθορίζεται από τις ιδιοτιμές του  $A$ , ο πίνακας αυτός καλείται **πίνακας ευστάθειας** του συστήματος (*stability matrix*). Ειδικότερα αν όλες οι ιδιοτιμές του ικανοποιούν  $\text{Re}(\lambda_i) < 0$  (δηλαδή είναι ασυμπτωτικά ευσταθής) τότε ο πίνακας  $A$  καλείται και **Hurwitz**.

**Ορισμός 2.17** Έστω ότι το σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.3)$$

βρίσκεται σε μηδενικές αρχικές συνθήκες  $x(0) = 0$  και διεγείρεται από πεπερασμένες τιμές εισόδου,  $\|u(t)\| < M < \infty$  για  $0 < t < \infty$ . Καλείται **ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου** αν κάθε απόκριση  $y(t)$  είναι επίσης πεπερασμένη, δηλαδή,

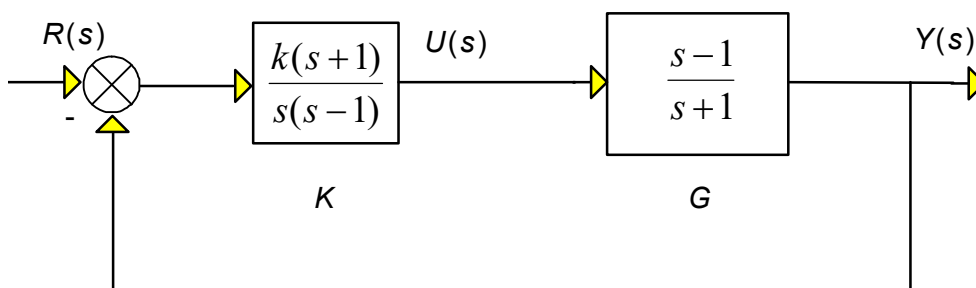
$$\|y(t)\| < P < \infty \quad \text{για } 0 < t < \infty$$

**Θεώρημα 2.7** Η ευστάθεια φραγμένης-εισόδου φραγμένης εξόδου είναι ισοδύναμη με την ασυμπτωτική ευστάθεια ή ισοδύναμα, όταν ένα σύστημα είναι ασυμπτωτικά ευσταθές τότε είναι και ευσταθές φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου. Το αντίθετο ισχύει μόνον αν το σύστημα είναι πλήρως ελεγχίμο και παρατηρήσιμο.

**Ορισμός 2.18** Ένα σύστημα είναι **εσωτερικά ευσταθές** αν κανένα από τα τμήματα που το απαρτίζουν δεν περιέχει κρυμμένα **modes**, και η εφαρμογή φραγμένων εξωτερικών εισόδων σε οποιοδήποτε σημείο του έχει σαν αποτέλεσμα φραγμένα σήματα σε οποιοδήποτε σημείο του.

Ο τελευταίος αυτός ορισμός είναι ο σπουδαιότερος από άποψη σχεδίασης και αυτός που θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια, αφού εξασφαλίζει την ομαλή (ευσταθή) λειτουργία όλων των μερών ενός διασυνδεδεμένου συστήματος.

**Παράδειγμα 2.3** Έστω το σύστημα του Σχ. 2.13.

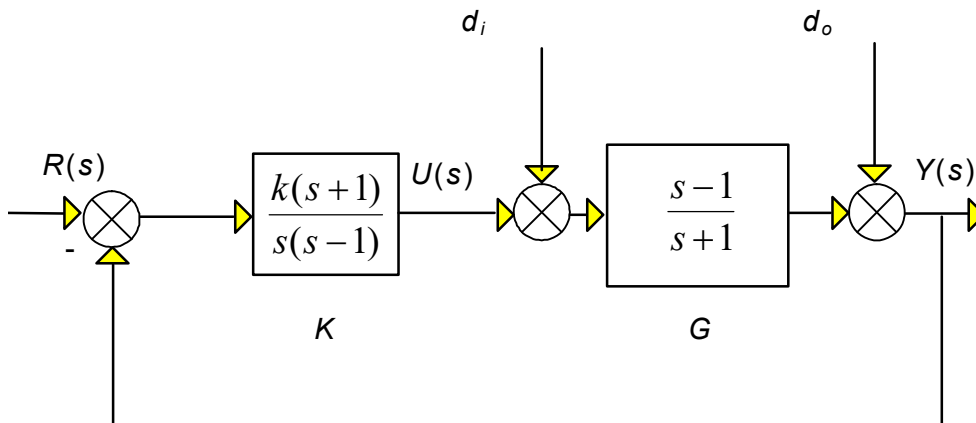


Σχήμα 2.13

Η συνάρτηση εισόδου αναφοράς-εξόδου ( $Y(s)/R(s)$ ) είναι,

$$H(s) = \frac{GK}{1+GK} = \frac{\frac{k(s+1)(s-1)}{s(s-1)(s+1)}}{1 + \frac{k(s+1)(s-1)}{s(s-1)(s+1)}} = \frac{k}{s+k}$$

Όπως φαίνεται το σύστημα είναι ευσταθές για  $k > 0$ . Όμως αν θεωρήσουμε διαταραχές  $d_i$  και  $d_o$ ,



η συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής εξόδου-σήματος ελέγχου ( $U(s)/d_o(s)$ ) είναι,

$$H(s) = -\frac{k(s+1)}{(s-1)(s+k)}$$

που είναι ασταθής (πόλος στο  $s=1$ ). Έτσι ενώ το σύστημα είναι ευσταθές δεν είναι εσωτερικά ευσταθές. Για να συμβαίνει αυτό πρέπει να εξετάσουμε την απόκριση των εσωτερικών σημάτων  $u, y$  σε σχέση με τα εξωτερικά σήματα  $d_i, d_o$ . Εύκολα βρίσκουμε,

$$\begin{aligned} U(s) &= (I+KG)^{-1}d_i - K(I+GK)^{-1}d_o \\ Y(s) &= G(I+KG)^{-1}d_i + (I+GK)^{-1}d_o \end{aligned} \quad (2.14)$$

Επομένως για να είναι το σύστημα αυτό εσωτερικά ευσταθές πρέπει και οι τέσσερις πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς που εμφανίζονται στην (2.14) να είναι ευσταθείς.

### 2.3.5 Σταθεροποιησιμότητα

Σε πρακτικές εφαρμογές είναι αρκετή μια πιο ασθενής ιδιότητα από την ελεγχιμότητα, η **σταθεροποιησιμότητα** (stabilizability). Η ιδιότητα αυτή συσχετίζεται με την ελεγχιμότητα των ασταθών πόλων.

**Ορισμός 2.19** Το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

είναι σταθεροποιήσιμο αν ο ασταθής υποχώρος του περιέχεται στον ελέγξιμο υποχώρο του.

Ο παραπάνω ορισμός είναι ισοδύναμος με την πρόταση: το ζεύγος  $(A, B)$  είναι σταθεροποιήσιμο.

Αυτό που στην ουσία περιγράφει η ιδιότητα αυτή είναι η δυνατότητα του ελέγχου των ασταθών καταστάσεων, αφού έτσι κι αλλιώς οι σταθερές καταστάσεις δεν δημιουργούν προβλήματα.

Η ιδιότητα αυτή εξακριβώνεται μετασχηματίζοντας το σύστημα στην *ελέγξιμη κλιμακωτή μορφή*:

$$\bar{A} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{uc} & 0 \\ \hline A_{21} & A_c \end{array} \right], \quad \bar{B} = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ \hline B_C \end{array} \right]$$

μέσω ενός κατάλληλου μοναδικού πίνακα μετασχηματισμού ομοιότητας  $T$ , δηλαδή  $\bar{A} = TAT^T$ ,  $\bar{B} = TB$ . Στη μορφή αυτή, ο  $A_c$  είναι το ελέγξιμο κομμάτι του  $A$ , ενώ ο  $A_{uc}$  το μη ελέγξιμο. Επομένως το σύστημα είναι σταθεροποιήσιμο αν ο  $A_{uc}$  είναι ασυμπτωτικά σταθερός, δηλαδή το πραγματικό μέρος των ιδιοτιμών του είναι αυστηρά ( $<0$ ) αρνητικό.

Η εντολή `ctrbf` του MATLAB χρησιμοποιεί τον αλγόριθμο που αναφέρεται στον Rosenbrock για να υπολογίσει τη μορφή αυτή. Η συνάρτηση `con_stb` που παρατίθεται στο Παράρτημα κάνει τα υπόλοιπα.

(Σημείωση: η συνάρτηση αυτή χρησιμοποιεί την ιδιότητα του δυϊσμού που αναφέρεται παρακάτω).

**Παράδειγμα 2.4** Έστω δύο συστήματα της μορφής (1.2) με πίνακες,

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση `con_stb` βρίσκουμε ότι το ζεύγος  $(A_1, B_1)$  δεν είναι ελέγξιμο αλλά είναι σταθεροποιήσιμο, ενώ το  $(A_2, B_2)$  δεν είναι ούτε ελέγξιμο ούτε σταθεροποιήσιμο.

### 2.3.6 Εντοπισιμότητα

Μία πιο ασθενής ιδιότητα από την παρατηρησιμότητα είναι η *εντοπισιμότητα* (de-

tectability). Η ιδιότητα αυτή ορίζεται ως εξής:

**Ορισμός 2.20** Το γραμμικό, χρονικά αμετάβλητο σύστημα,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.3)$$

είναι εντοπίσιμο αν ο μη παρατηρήσιμος υποχώρος του περιέχεται στον σταθερό υποχώρο του. Εναλλακτικά αυτό σημαίνει ότι τα μη παρατηρήσιμα **modes** είναι σταθερά.

Η ιδιότητα αυτή εξακριβώνεται με αντίστοιχο τρόπο της περίπτωσης της σταθεροποιησιμότητας, αφού πρώτα μετασχηματίσουμε το σύστημα στην κλιμακωτή παρατηρήσιμη μορφή,

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A_{uo} & | & A_{12} \\ \hline 0 & | & A_o \end{bmatrix}, \quad \bar{C} = [0 \quad C_o]$$

μέσω ενός μοναδικού πίνακα μετασχηματισμού  $T$  ( $\bar{A} = TAT^T$ ,  $\bar{C} = CT^T$ ). Στη μορφή αυτή, ο υποπίνακας  $A_{uo}$  είναι το ασταθές τμήμα, επομένως για να είναι το σύστημα εντοπίσιμο πρέπει  $\text{Re}\{\lambda_i(A_{uo})\} < 0$ . Η συνθήκη αυτή χρησιμοποιείται στη συνάρτηση `obs_det` που παρατίθεται στο παράρτημα.

Η σταθεροποιησιμότητα και η εντοπισιμότητα είναι επίσης έννοιες δυϊκές. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε τα συστήματα (Σ1), (Σ2):

$$\begin{aligned} (\Sigma 1) \quad & \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ & y(t) = Cx(t) \end{aligned}$$

και,

$$\begin{aligned} (\Sigma 2) \quad & \dot{x}(t) = A^T x(t) + C^T u(t), \quad x(0) = x_0 \\ & y(t) = B^T x(t) \end{aligned}$$

τότε οι ακόλουθες ιδιότητες ισχύουν ταυτόχρονα:

Σ1	Σ2
σταθεροποιησιμότητα	εντοπισιμότητα
εντοπισιμότητα	σταθεροποιησιμότητα

## 2.4 Γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων

Η θεωρία των γραμμικών συστημάτων δεν είναι απαραίτητα περιοριστική. Μη

γραμμικά συστήματα μπορούν να γραμμικοποιηθούν γύρω από κάποιο σημείο ισορροπίας, και το προκύπτον σύστημα να χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση και σύνθεση του συστήματος. Η διαδικασία έχει ως εξής:

Έστω ότι έχουμε το εξής μη γραμμικό σύστημα  $n$  μεταβλητών κατάστασης  $x_i$ ,  $m$  εξόδων  $y_j$  και  $r$  εισόδων  $u_k$ ,

$$\dot{x}=f(x, u)$$

$$y=g(x)$$

Ας υποθέσουμε ότι οι εισοδοί σταθεροποιούνται σε ένα ορισμένο επίπεδο,

$$u=u^*=\text{σταθερό}$$

Καλούμε **καταστάσεις (σημεία) ισορροπίας** του συστήματος τα διανύσματα  $x^*$  που είναι λύσεις των εξισώσεων,

$$\dot{x}=0, \text{ δηλαδή } f(x^*, u^*)=0$$

Έστω ότι τέτοιες λύσεις υπάρχουν. Τα σημεία ισορροπίας των εξόδων θα δίνονται από την σχέση,

$$y^*=g(x^*)$$

Ας θεωρήσουμε τώρα μικρές μετατοπίσεις γύρω από την κατάσταση ισορροπίας:

$$x=x^*+\delta x$$

$$u=u^*+\delta u$$

$$y=y^*+\delta y$$

και ας εφαρμόσουμε την ανάπτυξη Taylor των συναρτήσεων  $f(x, u)$  και  $g(x)$  γύρω από το σημείο ισορροπίας. Γνωρίζουμε ότι γενικά ισχύει:

$$f(x, u) = f(x^*, u^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x^*, u^*} (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{x^*, u^*} (u - u^*) + \quad (2.15)$$

(όροι μεγαλύτερου βαθμού)

Θέτουμε:

$$A = \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{x^*, u^*}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial u} \Big|_{x^*, u^*} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_n} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \frac{\partial f_n}{\partial u_2} & & \frac{\partial f_n}{\partial u_n} \end{bmatrix}_{x^*, u^*}$$

Παραβλέποντας τους όρους μεγαλύτερου βαθμού ή (2.15) γράφεται:

$$\delta x = A\delta x + B\delta u \quad (2.16)$$

Με παρόμοιο τρόπο αναπτύσσουμε την  $g(x)$  γύρω από το  $y^*$ ,

$$g(x) = y^* + \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x^*, u^*} (x - x^*) + (\text{όροι μεγαλύτερου βαθμού})$$

Επειδή  $\delta y = y - y^*$  οι μετατοπίσεις των εξόδων μπορούν να προσεγγιστούν από την γραμμική σχέση,

$$\delta y = C\delta x \quad (2.17)$$

Συνδυάζοντας τις (2.16) και (2.17) παίρνουμε την γραμμική προσέγγιση του μη γραμμικού συστήματος γύρω από το σημείο ισοροπίας:

$$\delta x = A\delta x + B\delta u$$

$$\delta y = C\delta x$$

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Παράμετροι σχεδίασης

Στο κεφάλαιο αυτό θα αποπειραθεί μία ποιοτική προσέγγιση των στόχων ενός καλο-σχεδιασμένου Συστήματος Αυτομάτου Ελέγχου. Θα δείξουμε επίσης τις αδυναμίες των κλασικών μεθόδων σχεδίασης και τη συσχέτιση τους με τις μεθόδους ελάχιστης νόρμας.

#### 3.1 Στόχοι απόδοσης

Σε γενικές γραμμές ένα Σύστημα Αυτομάτου Ελέγχου πρέπει να συμπεριφέρεται στη πράξη έτσι όπως έχει σχεδιασθεί. Δύο είναι οι κύριες κατηγορίες σχεδιαστικών στόχων:

Σ1. Το σύστημα πρέπει να είναι ευσταθές.

Σ2. Το σύστημα πρέπει να ακολουθεί ικανοποιητικά τις εντολές εισόδου χωρίς να δαπανάται υπερβολική ενέργεια ελέγχου.

Αν και αυτό ακούγεται απλό, δεν είναι. Τα βασικά προβλήματα είναι δύο:

Π1. Σε πραγματικές συνθήκες λειτουργίας, το σύστημα επηρεάζεται από απρόβλεπτες "διαταραχές" συμπεριλαμβανομένου και του θορύβου των μετρήσεων.

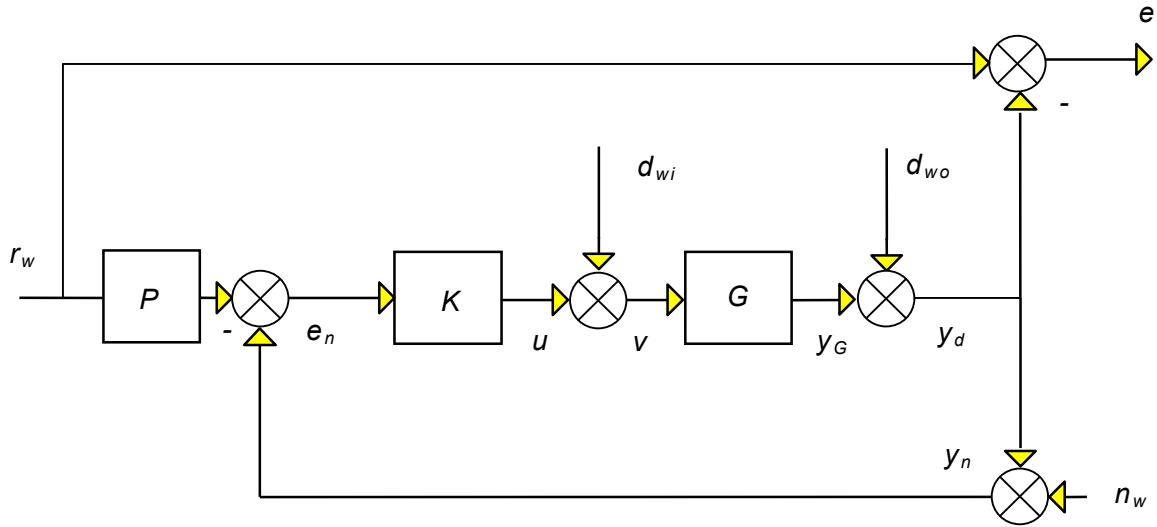
Π2. Το μαθηματικό πρότυπο που χρησιμοποιείται στη σχεδίαση είναι μία προσέγγιση του πραγματικού.

Η λύση στο πρόβλημα Π1 οδηγεί στην ονομαστική απόδοση ενώ η λύση στο Π2 στη στιβαρή απόδοση.

#### 3.2 Ονομαστική απόδοση

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις δυσκολίες που προκύπτουν ας εξετάσουμε το πρόβλημα της ονομαστικής απόδοσης στη «κλασική» του τοποθέτηση, χρησιμοποιώντας την διάταξη του Σχ. 3.1.





Σχ. 3.1 Κλασικό σύστημα ρύθμισης δύο βαθμών ελευθερίας (μη σταθμισμένο)

Το σύστημα αυτό καλείται **δύο βαθμών ελευθερίας** λόγω της ελευθερίας επιλογής του όρου  $K$  (**αντισταθμιστής**) και  $P$  (**μορφοποιητής εισόδου**). Η πρωτεύουσα είσοδος είναι το σήμα αναφοράς  $r_w$ , ενώ η πρωτεύουσα έξοδος είναι η μέτρηση  $y_n$ . Εκτός της πρωτεύουσας εισόδου, στο σύστημα επιδρούν και εξωγενή σήματα εισόδου όπως οι διαταραχές  $d_{wo}$  (εξόδου) και  $d_{wi}$  (εισόδου) και ο θόρυβος μετρήσεων  $n_w$ .

Λόγω του στόχου (Σ2), χρειάζεται να βρούμε τις εξισώσεις που συνδέουν τα  $e$ ,  $u$  με τα  $r_w$ ,  $d_{wi}$ ,  $d_{wo}$ ,  $n_w$ . Χρησιμοποιώντας το δομικό διάγραμμα βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
 e &= r_w - y_d = r_w - (d_{wo} + Gv) = r_w - d_{wo} - G(d_{wi} + Ke_n) = r_w - d_{wo} - Gd_{wi} - GK(Pr_w - y_n) = \\
 &= r_w - d_{wo} - Gd_{wi} - GK(Pr_w - n_w - y_d) = r_w - d_{wo} - Gd_{wi} - GK(Pr_w - n_w + e - r_w) = \\
 &= r_w - d_{wo} - Gd_{wi} - GKPr_w + GK n_w - GKe + GK r_w \\
 \Rightarrow (I + GK)e &= [I + GK(I - P)]r_w - Gd_{wi} - d_{wo} + GK n_w \\
 e &= (I + GK)^{-1} [I + GK(I - P)]r_w \\
 &\quad - (I + GK)^{-1} d_{wo} - (I + GK)^{-1} Gd_{wi} + (I + GK)^{-1} GK n_w
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

ενώ,

$$\begin{aligned}
 u &= Ke_n = K(Pr_w - y_n) = KPr_w - K(n_w + Gv + d_{wo}) \\
 \Rightarrow u &= KPr_w - Kn_w - KGu - KGd_{wi} - Kd_{wo} \\
 (I + KG)u &= KPr_w - Kn_w - KGd_{wi} - Kd_{wo} \Rightarrow u = (I + KG)^{-1} (KPr_w - Kd_{wo} - KGd_{wi} - Kn_w) \\
 \Rightarrow u &= (I + KG)^{-1} KPr_w - (I + KG)^{-1} Kd_{wo} - (I + KG)^{-1} KGd_{wi} - (I + KG)^{-1} Kn_w
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να ενδιαφέρει και το σήμα  $v$ , η είσοδος στην εγκατάσταση. Προφανώς, αφού  $v=u+d_{wi}$ ,

$$v=(I+KG)^{-1}KPr_w-(I+KG)^{-1}Kd_{wo}+(I+KG)^{-1}d_{wi}-(I+KG)^{-1}Kn_w \quad (3.3)$$

! Κατά τη διαδικασία εύρεσης των (3.1), (4.11) υποθέσαμε σιωπηρά ότι οι πίνακες  $(I+GK)$  και  $(I+KG)$  είναι αντιστρέψιμοι.

Οι (3.1), (4.11) μπορούν ν' απλοποιηθούν με τον ορισμό των παρακάτω εννοιών:

$$L_i(s)=K(s)G(s): \text{ συνάρτηση βρόχου εισόδου}$$

$$L_o(s)=G(s)K(s): \text{ συνάρτηση βρόχου εξόδου}$$

$$S_i(s)=[I+K(s)G(s)]^{-1}=[I+L_i(s)]^{-1}: \text{ συνάρτηση ευαισθησίας εισόδου}$$

$$T_i(s)=I-S_i(s): \text{ συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας εισόδου}$$

$$S_o(s)=[I+G(s)K(s)]^{-1}=[I+L_o(s)]^{-1}: \text{ συνάρτηση ευαισθησίας εξόδου}$$

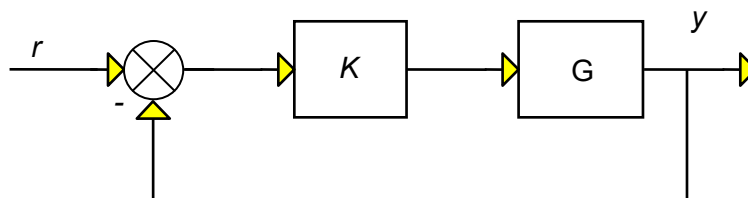
$$T_o(s)=I-S_o(s): \text{ συμπληρωματική συνάρτηση ευαισθησίας εξόδου}$$

Επίσης ας σημειωθεί ότι,

$$T_o=I-(I+L_o)^{-1} \Rightarrow (I+L_o)T_o=I+L_o-I=L_o$$

$$\Rightarrow T_o \Rightarrow (I+L_o)^{-1}L_o=S_oL_o=[I+G(s)K(s)]^{-1}G(s)K(s)$$

Ο όρος συνάρτηση ευαισθησίας προέρχεται από την εξής ιδέα: η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος,



είναι  $H=(I+KG)^{-1}KG$ . Ένας τρόπος να ορίσουμε το πόσο ευαίσθητη είναι η  $H$  σε μεταβολές στο  $G$ , είναι να υπολογίσουμε τον οριακό λόγο μιας σχετικής μεταβολής του  $H$  (δηλ.  $\Delta H/H$ ) ως προς μια σχετική μεταβολή του  $G$  (δηλ.  $\Delta G/G$ ). Μεταχειριζόμενοι την  $G$  σαν μεταβλητή και την  $H$  σαν συνάρτηση, έχουμε:

$$\text{ορ}_{\Delta G \rightarrow 0} \frac{\Delta H / H}{\Delta G / G} = \frac{dH}{dG} \frac{G}{H}$$

Το δεξιό μέλος της ανωτέρω έκφρασης εύκολα (;) βρίσκεται ότι ισούται με  $S_o$ . Επομένως η  $S_o$  εκφράζει την ευαισθησία της συνάρτησης μεταφοράς κλειστού βρόχου  $H$  σε οριακές μεταβολές στην  $G$ .

Με τους ορισμούς αυτούς οι (3.1), (4.11) γίνονται,

$$e = S_o[I + GK(I - P)]r_w - S_o d_{wo} - S_o G d_{wi} + T_o n_w \quad (3.4)$$

$$u = S_i K P r_w - S_i K d_{wo} - S_i K G d_{wi} - S_i K n_w \quad (3.5)$$

Η Σ2 απαιτεί τα μεγέθη των  $e, u$  να είναι «μικρά», δηλαδή,

$$\|e\| < \gamma_1, \quad \|u\| < \gamma_2 \quad (3.6)$$

για κάποια κατάλληλη νόρμα και προδιαγεγραμμένα  $\gamma_1, \gamma_2$ . Προφανώς για να έχει νόημα το πρόβλημα αυτό όλοι οι είσοδοι στις (3.4), (3.5) πρέπει να είναι φραγμένοι.

Επιπλέον από την Σ1 το σύστημα πρέπει να είναι επίσης ευσταθές.

### 3.3 Πως επιτυγχάνεται ο στόχος ελέγχου

Όπως φαίνεται από τις (3.4), (3.5) για να επιτευχθεί ο στόχος μας θα πρέπει να μπορούμε να βρούμε έναν κατάλληλο αντισταθμιστή  $K$ . Οι ιδιότητες του πίνακα αυτού πρέπει να είναι τέτοιες που να καθιστούν και τα δύο αθροίσματα «μικρά». Για να είναι τα αθροίσματα μικρά θα πρέπει ο συντελεστής κάθε όρου να μπορεί να «μικρύνει» κατά βούληση. Από την (3.4) αυτό σημαίνει:

Για μικρό σφάλμα:	αιτία	μέγεθος
... $(I + GK)^{-1}[I + GK(I - P)]$	παρακολούθηση	μικρό (3.7)
$S_o = (I + GK)^{-1}$	διαταραχή στην έξοδο της εγκατάστασης	μικρό (3.8)
$S_o G = (I + GK)^{-1}G$	διαταραχή στην είσοδο της εγκατάστασης	μικρό (3.9)
$T_o = (I + GK)^{-1}GK$	θόρυβος	μικρό (3.10)

Παράλληλα από την (3.5) προκύπτει:

Για μικρό έλεγχο:	αιτία	μέγεθος
$S_i K P = (I + KG)^{-1}K P$	παρακολούθηση	μικρό (3.11)
$S_i K = (I + KG)^{-1}K$	διαταραχή στην έξοδο της εγκατάστασης / θόρυβος	μικρό (3.12)
$S_i K G = (I + KG)^{-1}K G$	διαταραχή στην είσοδο της εγκατάστασης	μικρό (3.13)

Αν υποθέσουμε ότι  $P=I$  (σύστημα ενός βαθμού ελευθερίας), τότε οι (3.7), (3.11) απλοποιούνται σε,

Για μικρό σφάλμα:	αιτία	μέγεθος
$S_o = (I+GK)^{-1}$	παρακολούθηση	μικρό (3.14)

και,

Για μικρό έλεγχο:	αιτία	μέγεθος
$S_i K = (I+KG)^{-1} K$	παρακολούθηση	μικρό (3.15)

αντίστοιχα. Για τη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την παραδοχή που συνεπάγεται πιο συμπαγή αποτελέσματα, αλλά θα πρέπει να θυμόμαστε ότι η επιλογή του  $P$  μας δίνει μία επιπλέον δυνατότητα ρύθμισης στην περίπτωση που το  $K$  από μόνο του δεν επαρκεί.

Για να προχωρήσουμε την ανάλυση ας επιλέξουμε μία νόρμα με την οποία θα χαρακτηρίσουμε το μέγεθος των διαφόρων πινάκων που εμφανίζονται. Στην ενότητα 3.1 παρατίθενται διάφορες νόρμες πινάκων από τις οποίες ας επιλέξουμε για τη συνέχεια την φασματική νόρμα  $\bar{\sigma}(G)$ .

Κοιτώντας τις (2.1)–(3.10) μπορούμε να παρατηρήσουμε τα εξής:

(Σ1) Αν το μέγεθος της συνάρτησης ευαισθησίας εξόδου  $S_o (= [I+G(s)K(s)]^{-1})$  είναι μικρό, τότε οι (2.1), (3.8), (3.9) μπορούν να τιθασσευθούν. Μεταφραζόμενο σε όρους νορμών αυτό σημαίνει  $\bar{\sigma}(S_o)$  μικρό.

(Σ2) Η (3.10) απαιτεί  $T_o$  μικρό που αντιφάσκει με το (1) αφού  $T_o+S_o=I$ . Δηλαδή  $\bar{\sigma}(T_o)$  μικρό.

Η αντίφαση αυτή μπορεί να υπερπηδηθεί μόνον αν λάβουμε υπόψη μας και την συχνότητα των σημάτων θορύβου και διαταραχών. Αν σ' ένα σύστημα οι συχνότητες αυτές απέχουν μεταξύ τους τότε μπορούμε να επιλέξουμε έναν  $K$  που να καθιστά την  $S_o$  μεγάλη στις συχνότητες των διαταραχών και μικρή στις συχνότητες του θορύβου. Για καλή μας τύχη στα περισσότερα φυσικά συστήματα, ο θόρυβος των αισθητήρων υφίσταται σε υψηλές συχνότητες (λόγω των θερμικών μεταβολών στα κυκλώματα τους) ενώ οι διαταραχές και οι εντολές είναι σήματα χαμηλών συχνοτήτων. Εν πάση περιπτώσει είναι φανερή μία εγγενής αδυναμία των συστημάτων ανατροφοδότησης:

**Είναι αδύνατον να απορριφθούν ταυτόχρονα θόρυβος και διαταραχές που έχουν ενέργεια στις ίδιες ζώνες συχνοτήτων.**

Από τις (3.15)–(3.13) τώρα συμπεραίνεται ότι,

(Σ3) Αν η  $S_i K (= (I+KG)^{-1} K)$  είναι μικρή, ικανοποιούνται οι (3.15), (3.12), (3.13). Για να συμβεί αυτό μπορεί ν' αποδειχθεί (Maciejowski, σ. 84) ότι,

$$\frac{1}{\bar{\sigma}(K)} + \bar{\sigma}(G) \gg 1$$

Αυτό είναι δυνατό μόνον αν  $\bar{\sigma}(G) \gg 1$  ή  $\bar{\sigma}(K) \ll 1$

Από τις (Σ1)-(Σ3) καταλήγουμε λοιπόν στις εξής προδιαγραφές ως προς τις φασματικές νόρμες των κατάλληλων συναρτήσεων:

μικρό σφάλμα (παρακολούθηση, διαταραχές)	$\bar{\sigma}(S_o) \ll 1$ για $\omega < \omega_1$	(3.16)
--	---	--------

μικρό σφάλμα (θόρυβος)	$\bar{\sigma}(S_o) \gg 1$ για $\omega > \omega_2 (> \omega_1)$	(3.17)
------------------------	--	--------

μικρός έλεγχος (παρακολούθηση, διαταραχές, θόρυβος)	$\bar{\sigma}(K) \ll 1$ για $\omega$ που $\bar{\sigma}(G)$ όχι $\gg 1$	(3.18)
---	--	--------

Οι (3.16)-(3.18) μπορούν να απλουστευθούν περαιτέρω σε μια προσπάθεια να διατυπωθούν συναρτήσει της συνάρτησης βρόχου εξόδου  $L_o(s) = G(s)K(s)$ . Πράγματι (δες π.χ. Maciejowski, σ. 87-91), μπορεί ν' αποδειχθεί ότι οι (3.16)-(3.18) μετατρέπονται προσεγγιστικά στις:

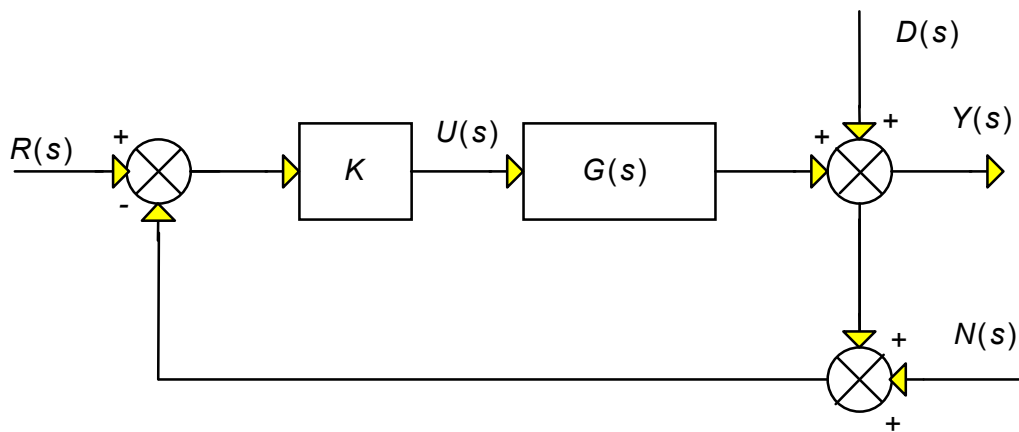
μικρό σφάλμα (θόρυβος)	$\bar{\sigma}(L_o) \ll 1$ για $\omega > \omega_1$	(3.19)
------------------------	---	--------

μικρό σφάλμα (παρακολούθηση, διαταραχές)	$\underline{\sigma}(L_o) \gg 1$ για $\omega < \omega_2 (< \omega_1)$	(3.20)
--	--	--------

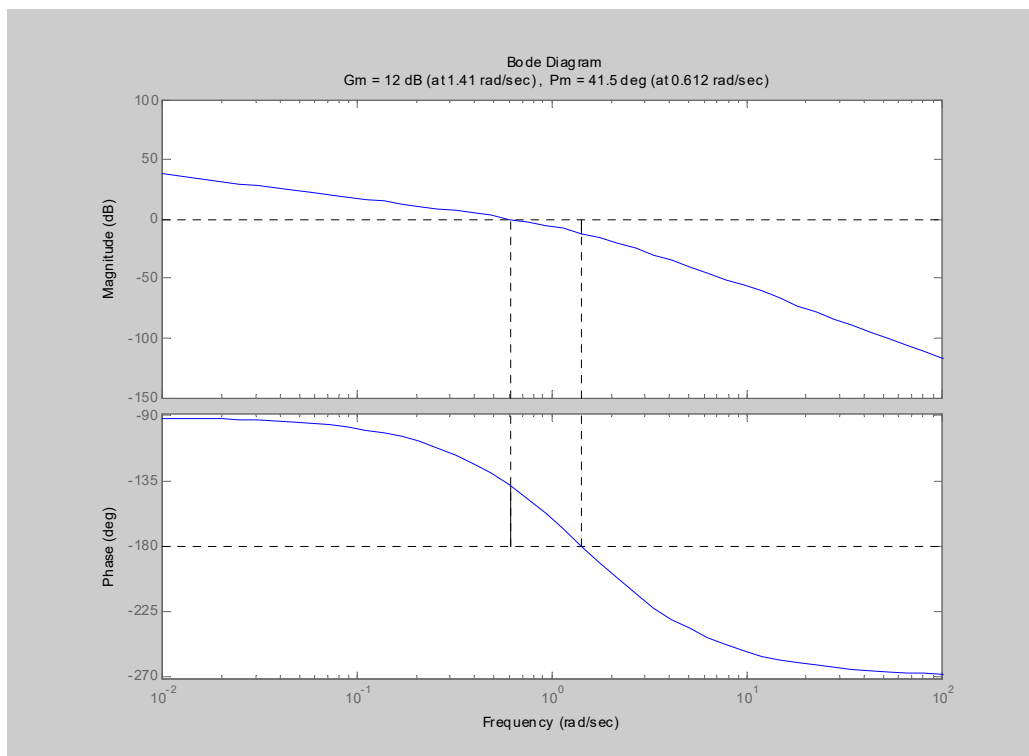
μικρός έλεγχος (παρακολούθηση, διαταραχές)	$\bar{\sigma}(L_o) \ll 1$ για $\omega$ που $\bar{\sigma}(G)$ όχι $\gg 1$	(3.21)
--	--	--------

Ας δούμε δύο παραδείγματα που θα βοηθήσουν στη κατανόηση των εννοιών αυτών.

**Παράδειγμα 3.5** (μίας εισόδου-μίας εξόδου). Έστω το σύστημα,

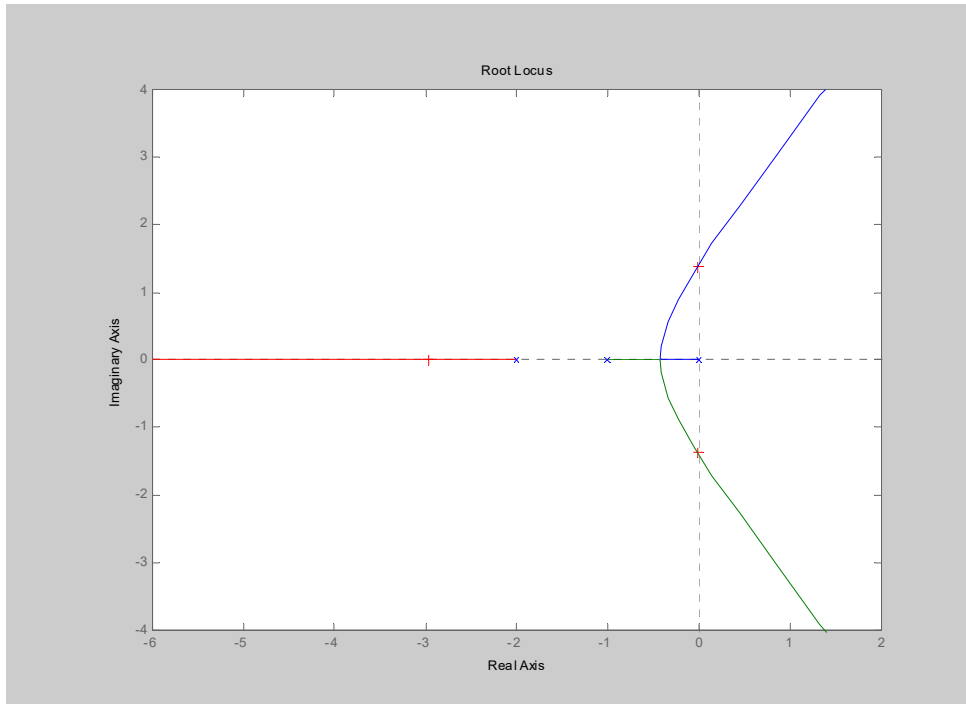


με  $K=1,5$ ,  $G(s)=\frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ . Τα διαγράμματα Bode του ευθέως βρόχου  $KG$  (1) και του κλειστού συστήματος  $KG/(1+KG)$  (2) μας δίνουν πληροφορία για τα περιθώρια ενίσχυσης και φάσης (1) και εύρος ζώνης (2).

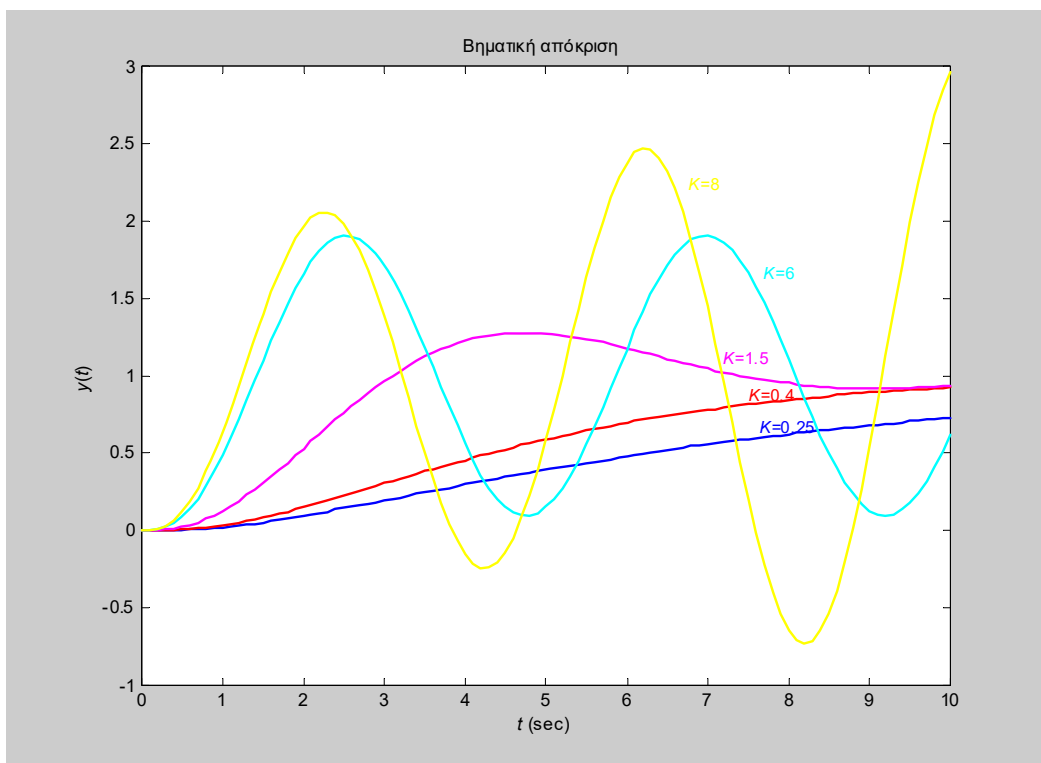


Σχήμα 3.2 Διαγράμματα εύρους και φάσης ευθέως βρόχου

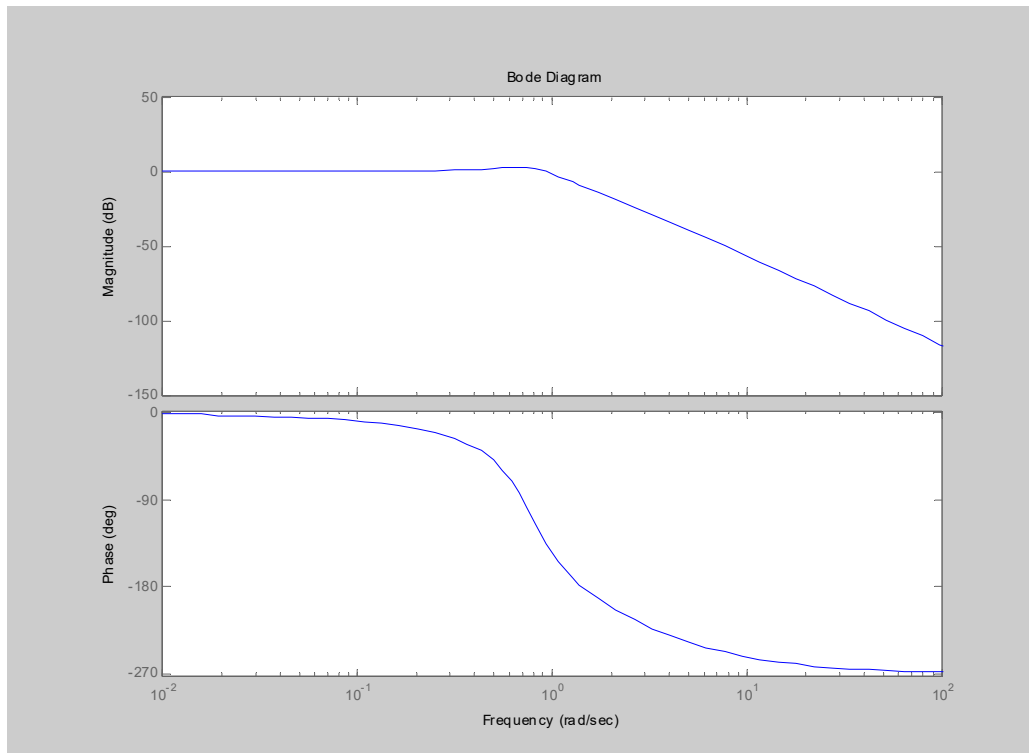
Στο Σχ. 3.2 βλέπουμε ότι το περιθώριο ενίσχυσης είναι 12db που σημαίνει ότι η ενίσχυση στον ευθύ βρόχο μπορεί να αυξηθεί μέχρι 4 φορές χωρίς το σύστημα να αποσταθεροποιηθεί. Ο γεωμετρικός τόπος ριζών (Σχ. 3.3) μέσω της εντολής `rlocfind` του MATLAB επιβεβαιώνει ότι  $K=6$  είναι η οριακή ενίσχυση, οι δε χρονικές αποκρίσεις του Σχ. 3.4 δείχνουν ότι για  $K<6$  το σύστημα είναι ευσταθές.



Σχήμα 3.3 Γεωμετρικός τόπος ριζών



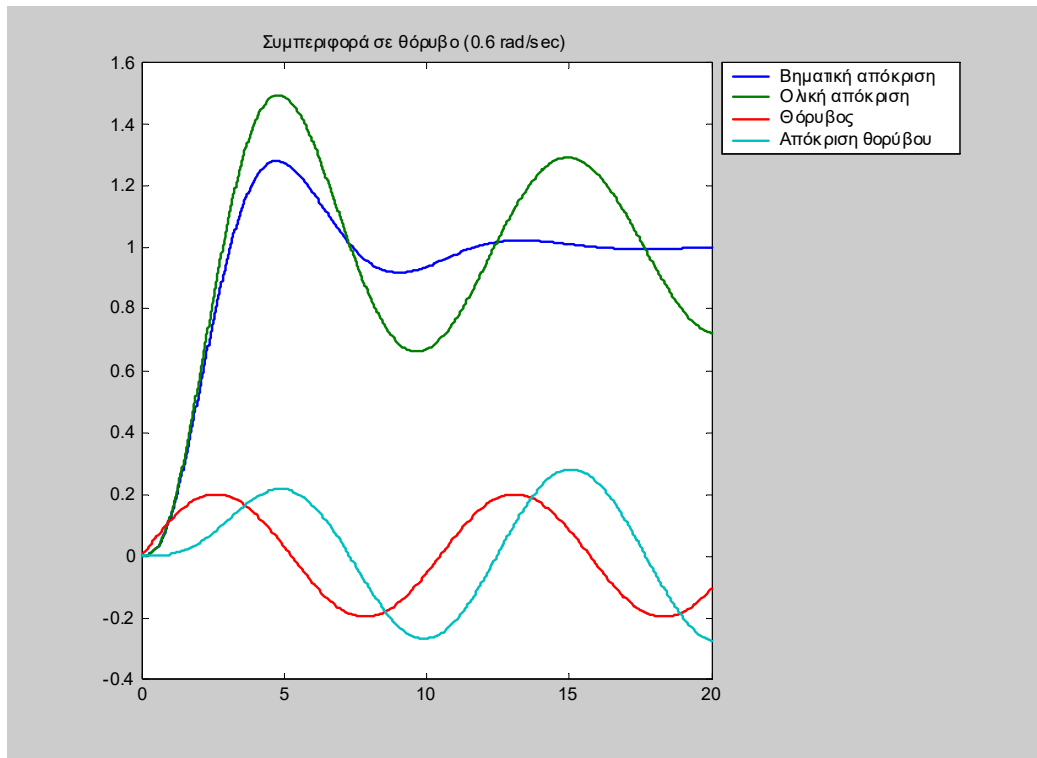
Σχήμα 3.4 Βηματικές αποκρίσεις για διάφορες τιμές της ενίσχυσης K.



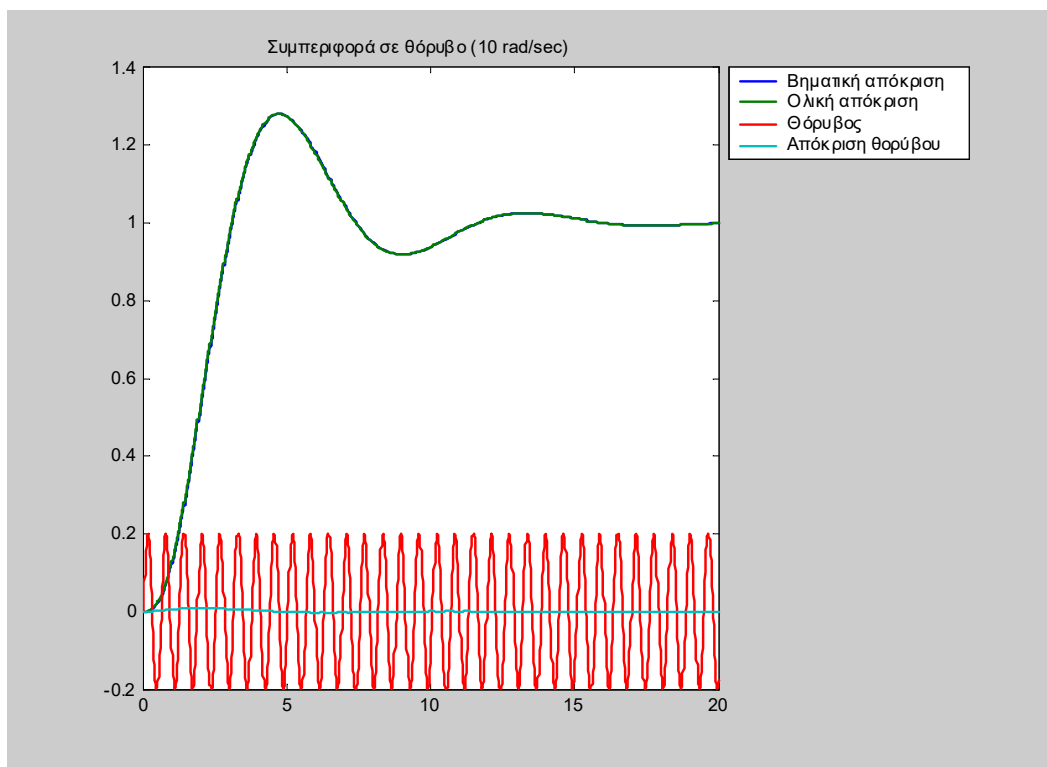
Σχήμα 3.5 Διαγράμματα Bode κλειστού συστήματος.

Στο Σχ. 3.5 φαίνεται το διάγραμμα εύρους και το εύρος ζώνης του κλειστού συστήματος που είναι περίπου  $\omega_b = 1$  rad/sec. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα θα εξασθενεί σήματα θορύβου με συχνότητα  $\omega_n > 1$  rad/sec. Στα Σχ. 3.6 (α), (β) επαληθεύεται η πρόβλεψη αυτή για τις συχνότητες 0,5 και 10 rad/sec αντίστοιχα. Επίσης στα Σχ. 3.7 (α), (β) φαίνονται οι αντίστοιχες αποκρίσεις για είσοδο διαταραχών.



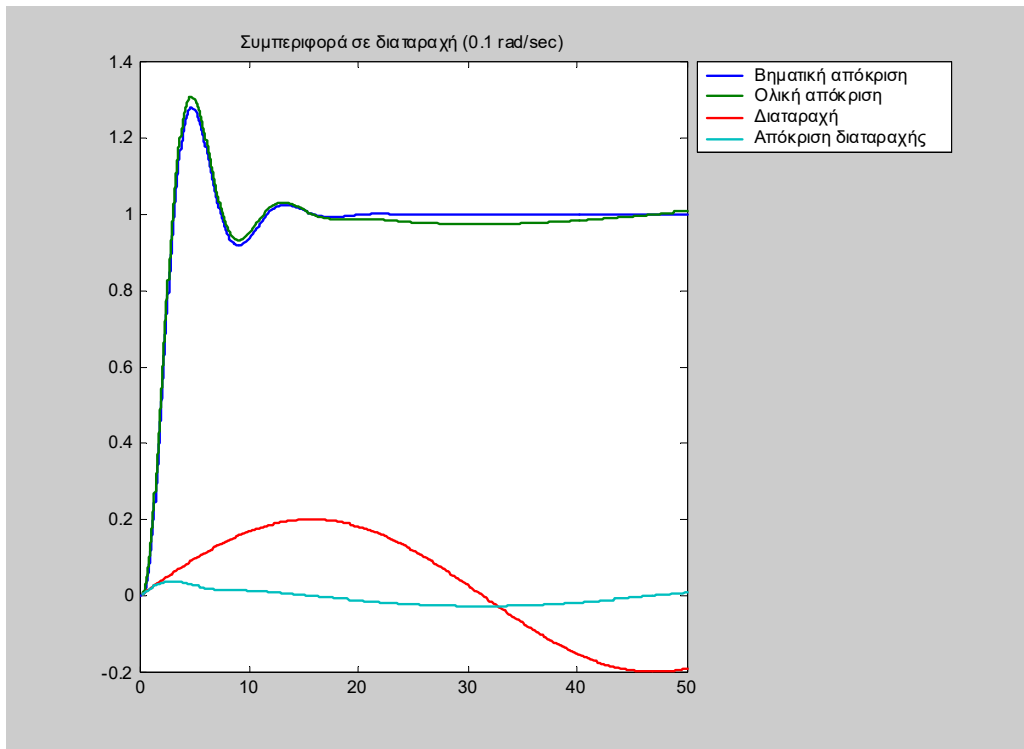


(α)

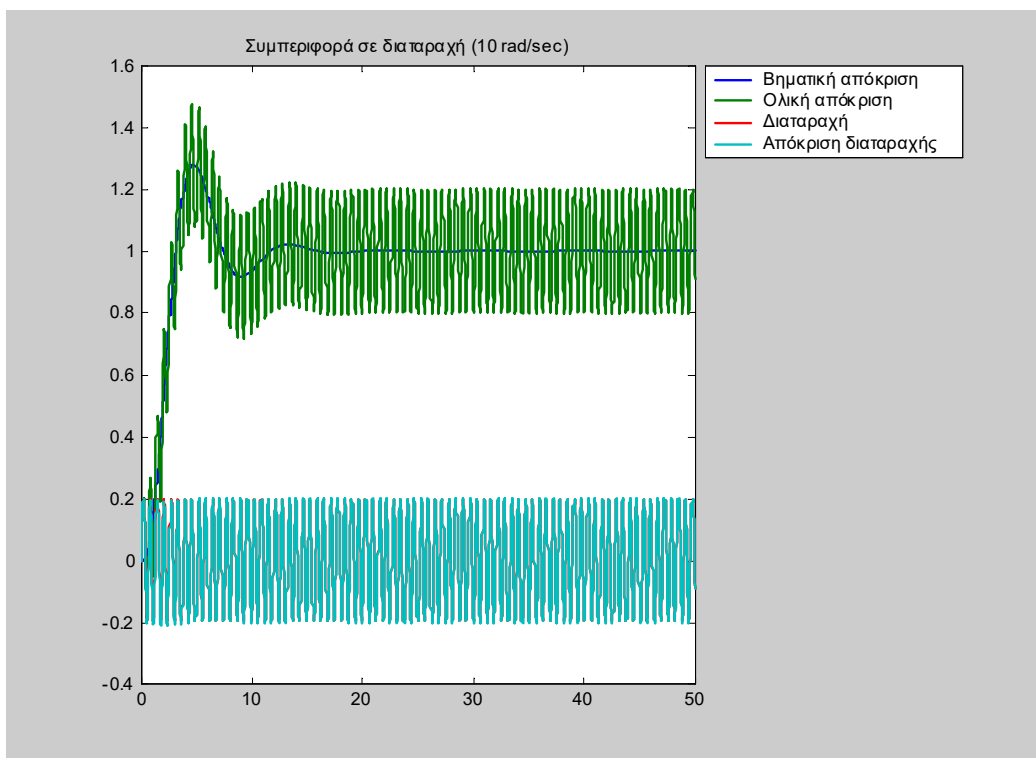


(β)

Σχήμα 3.6 Βηματική απόκριση υπό καθεστώς θορύβου



(α)



(β)

Σχήμα 3.7 Βηματική απόκριση υπό καθεστώς διαταραχών

**Παράδειγμα 3.6** Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικοποιημένο πρότυπο της κάθετης δυναμικής ενός αεριωθούμενου αεροσκάφους (Hung, 1982):

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 1,132\theta - v_v \\ \dot{v}_f &= -0,054v_f - 0,1712\theta + 0,0705v_v - 0,12\varphi_1 + \varphi_2 \\ \ddot{\theta} &= 0,0485v_f - 0,8556\dot{\theta} - 1,013v_v + 4,419\varphi_1 - 1,665T \\ \dot{v}_v &= -0,29v_f + 1,04\dot{\theta} - 0,6859v_v + 1,575\varphi_1 - 0,0732T \end{aligned}$$

όπου,

καταστάσεις	έλεγχοι
$r$ : ύψος	$\varphi_1$ : γωνία ανασχετικού πτερυγίου (spoiler)
$v_f$ : πρόσθια ταχύτητα	$\varphi_2$ : γωνία πτερυγίου ανόδου-καθόδου
$\theta$ : γωνία πρόνευσης	$T$ : πρόσθια επιτάχυνση
$v_v$ : κάθετη ταχύτητα	

Ας καταστρώσουμε το πρόβλημα σε μορφή χώρου κατάστασης, θέτοντας,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ v_f \\ \theta \\ \dot{\theta} \\ v_v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ T \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ v_f \\ \theta \end{bmatrix}$$

Με τις αντιστοιχίσεις αυτές το σύστημα γίνεται,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

με,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1,132 & 0 & -1 \\ 0 & -0,0538 & -0,1712 & 0 & 0,0705 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,0485 & 0 & -0,8556 & -1,013 \\ 0 & -0,2909 & 0 & 1,0532 & -0,6859 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -0,12 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4,419 & 0 & -1,665 \\ 1,575 & 0 & -0,0732 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έστω ο αντισταθμιστής με συνάρτηση μεταφοράς,

$$K(s) = \begin{bmatrix} k_{11}(s) & k_{12}(s) & k_{13}(s) \\ k_{21}(s) & k_{22}(s) & k_{23}(s) \\ k_{31}(s) & k_{32}(s) & k_{33}(s) \end{bmatrix}$$

όπου  $K(s) = K_C(sI - K_A)^{-1}K_B + K_D$  με,

$$K_A = \begin{bmatrix} -0,0204 & 0,0898 & -1,1977 & 0,0178 & -0,0834 \\ 0,0299 & -0,2042 & 2,0407 & 0,4695 & -0,8313 \\ -0,3410 & 1,5291 & -19,8216 & 0,0360 & -0,0628 \\ 0,4771 & 1,2183 & 0,0969 & -19,9707 & -0,0531 \\ 0,1436 & -0,4167 & -0,0517 & -0,0098 & -19,9831 \end{bmatrix}$$

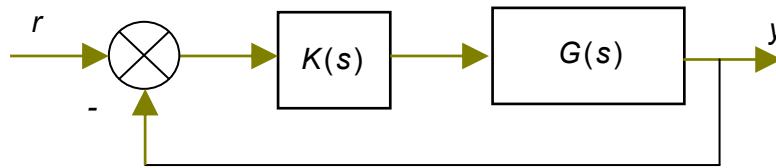
$$K_B = \begin{bmatrix} 0,0053 & -0,0162 & -0,0250 \\ 0,0458 & 0,0794 & -0,0411 \\ 0,0230 & -0,9959 & -0,0370 \\ -0,4720 & -0,0392 & 0,8783 \\ 0,8801 & 0,0010 & 0,4743 \end{bmatrix}$$

$$K_C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 25,7 & -592,1 & 2351,9 \\ 0 & 0 & -197,3 & -77,4 & 297,5 \\ 0 & 0 & -0,2 & 193,8 & 7306,5 \end{bmatrix}$$

$$K_D = \begin{bmatrix} -121,3929 & 0 & -26,6305 \\ -14,5671 & 0 & -3,2056 \\ -322,1833 & 0 & -180,7996 \end{bmatrix}$$

Ο αντισταθμιστής αυτός έχει προκύψει μέσω της σχεδιαστικής μεθόδου της **διαγώνιας υπεροχής** (diagonal dominance) (δες [Maciejowski](#), σ. 189-203).

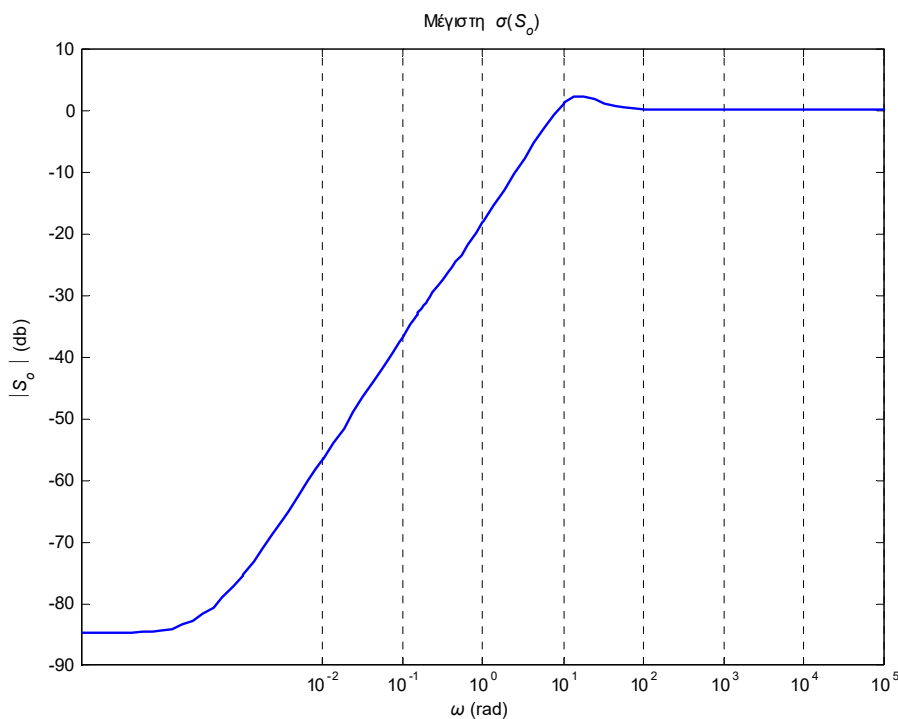
Το συνολικό σύστημα είναι στη διάταξη του Σχ. 3.8.



Σχ. 3.8 Σύστημα ελέγχου αεροσκάφους

Ας δούμε τώρα τις προβλέψεις των (3.16)-(3.18) και (3.19)-(3.21) και κατά πόσον αυτές επαληθεύονται.

- Βασικός παράγοντας για το μέγεθος του σφάλματος είναι η μέγιστη ιδιόμορφη τιμή της συνάρτησης ευαισθησίας εξόδου  $S_o$ . Το γράφημα της φαίνεται στο Σχ. 3.9.

Σχ. 3.9 Διάγραμμα μέγιστης ιδιόμορφης τιμής συνάρτησης ευαισθησίας εξόδου  $S_o$ .

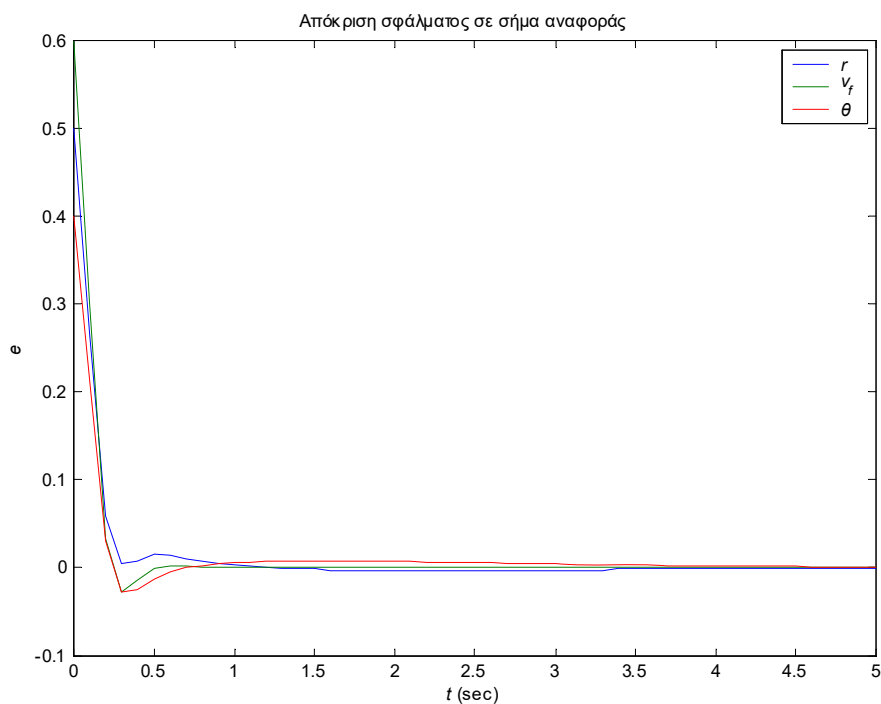
Όπως βλέπουμε η τιμή της είναι χαμηλή στις χαμηλές συχνότητες και περίπου 0 στις υψηλές. Αυτό σημαίνει ότι η απόκριση του σφάλματος σε είσοδο αναφοράς, διαταραχές και θόρυβο θα είναι ικανοποιητική. Τα Σχ. 3.10-3.14 επαληθεύουν την πρόβλεψη αυτή. Ειδικότερα, στο Σχ. 3.10 φαίνεται το σφάλμα σε βηματική είσοδο αναφοράς και για τις τρεις εισόδους να μηδενίζεται. Στα Σχ. 3.11-3.12 φαίνεται η επίδραση βηματικών διαταραχών εισόδου και εξόδου οι οποίες επίσης μηδενίζονται. Τέλος στα Σχ. 3.13-3.14 φαίνεται η επίδραση αρμονικού θορύβου διαφορετικών συχνοτήτων. Όπως φαίνεται ο θόρυβος χαμηλής συχνότητας επηρεάζει πολύ περισσότερο το σφάλμα απ' ότι ο θόρυβος υψηλής συχνότητας ο οποίος αποκόπτεται επιτυ-

χώς.

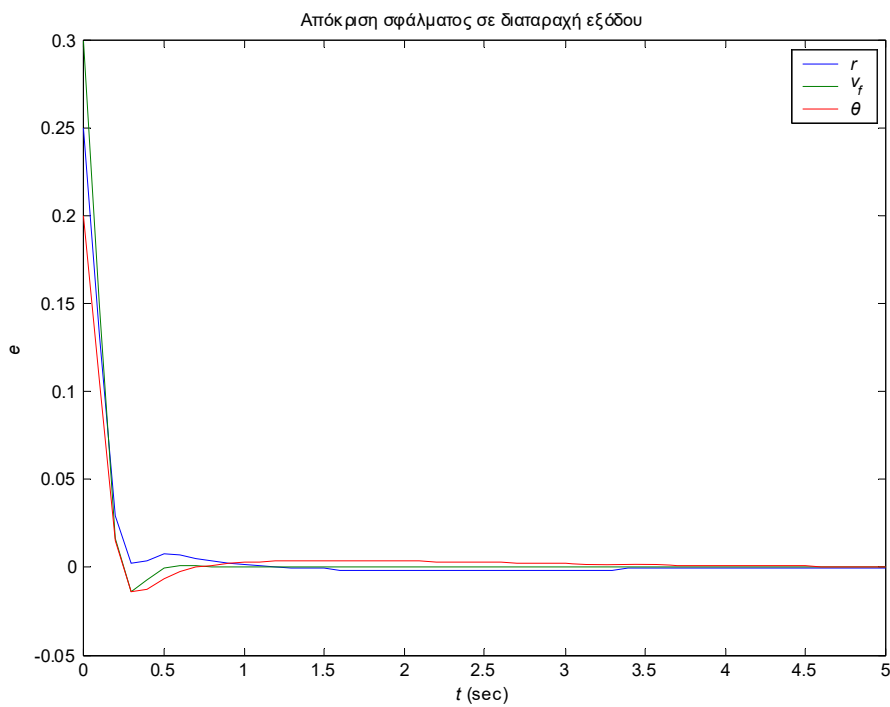
Τα ίδια συμπεράσματα προκύπτουν και από την εξέταση του Σχ. 3.15 όπου φαίνεται το διάγραμμα Bode της μέγιστης και ελάχιστης ιδιόμορφης τιμής της συνάρτησης βρόχου εξόδου  $L_o (=GK)$ . Οι εξ. (3.19)-(3.20) μας λένε τι πρέπει να ισχύει και αυτό πράγματι επαληθεύεται, αφού,

$$\bar{\sigma}(GK) \ll 1 \text{ για } \omega > 20 \text{ rad}$$

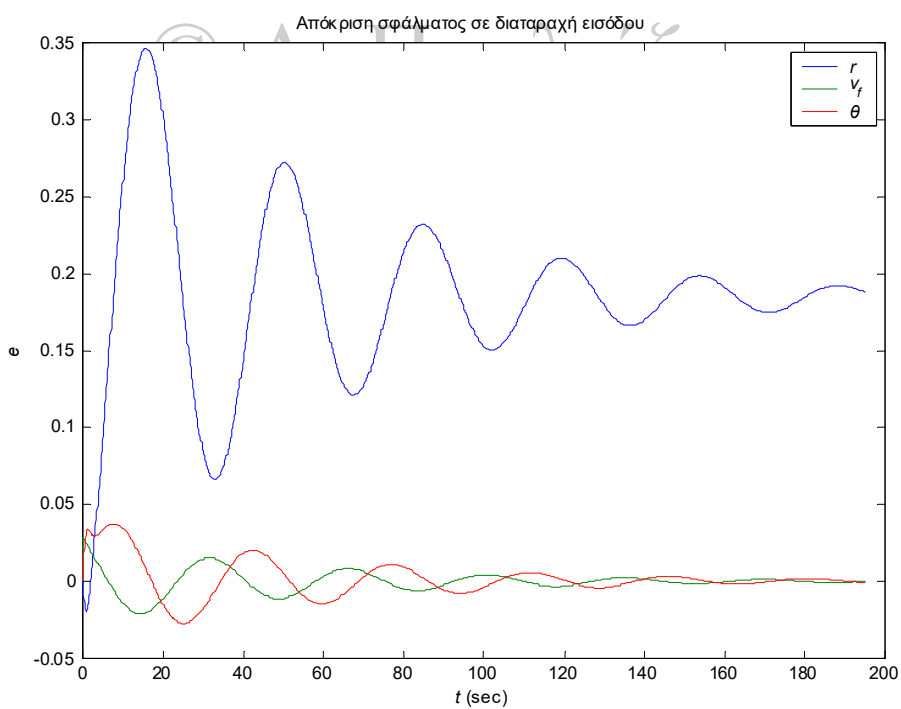
$$\underline{\sigma}(GK) \gg 1 \text{ για } \omega < 0,1 \text{ rad}$$



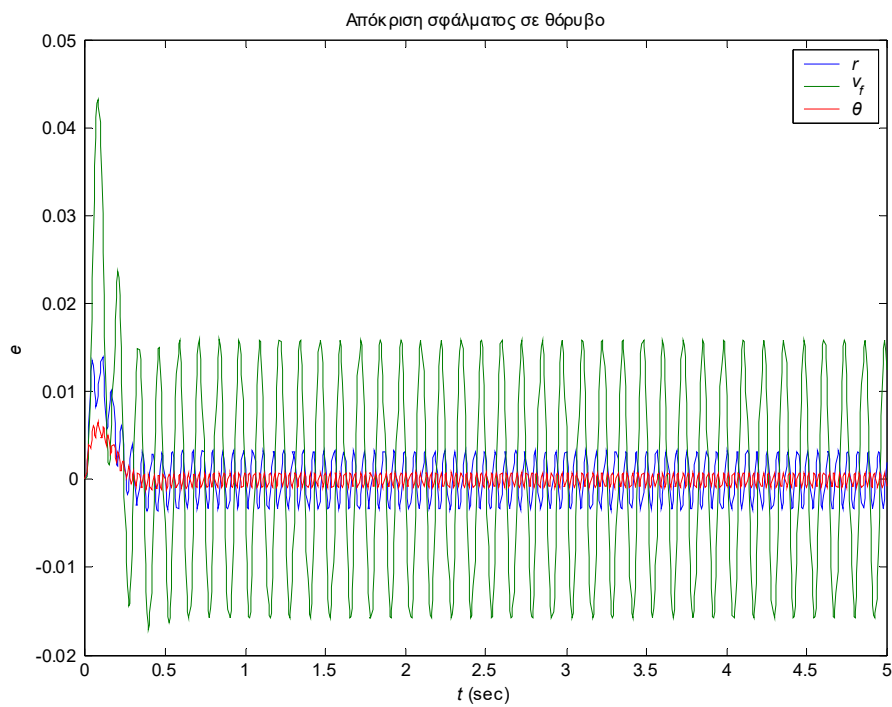
Σχ. 3.10 Απόκριση σφάλματος σε είσοδο αναφοράς  $r = [0,5 \ 0,6 \ 0,4]^T$



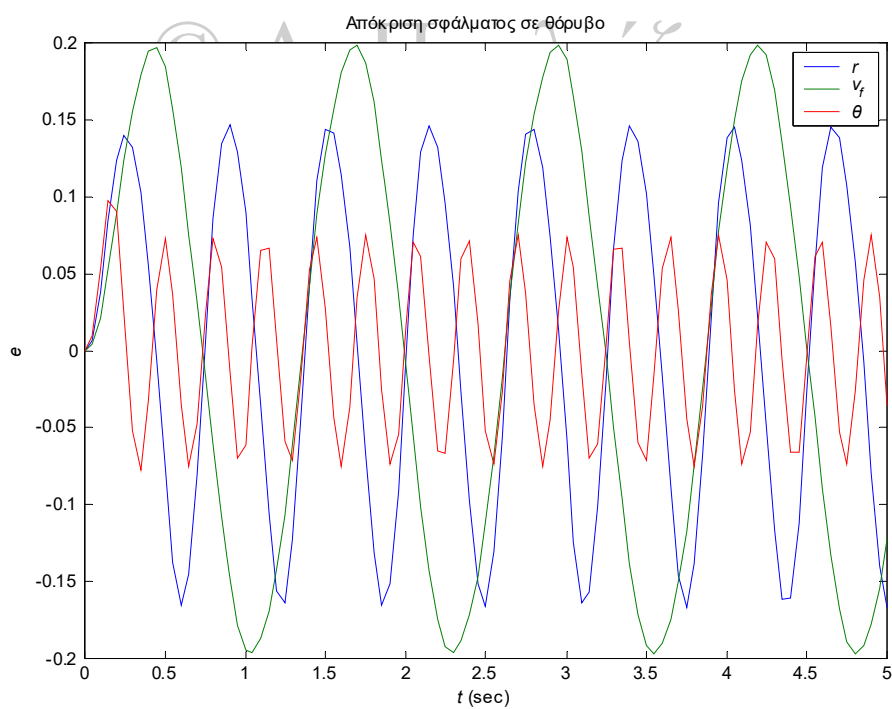
Σχ. 3.11 Απόκριση σφάλματος σε διαταραχή εξόδου  $d_o = [0,25 \ 0,3 \ 0,2]^T$



Σχ. 3.12 Απόκριση σφάλματος σε διαταραχή εισόδου  $d_i = [0,25 \ 0,3 \ 0,2]^T$

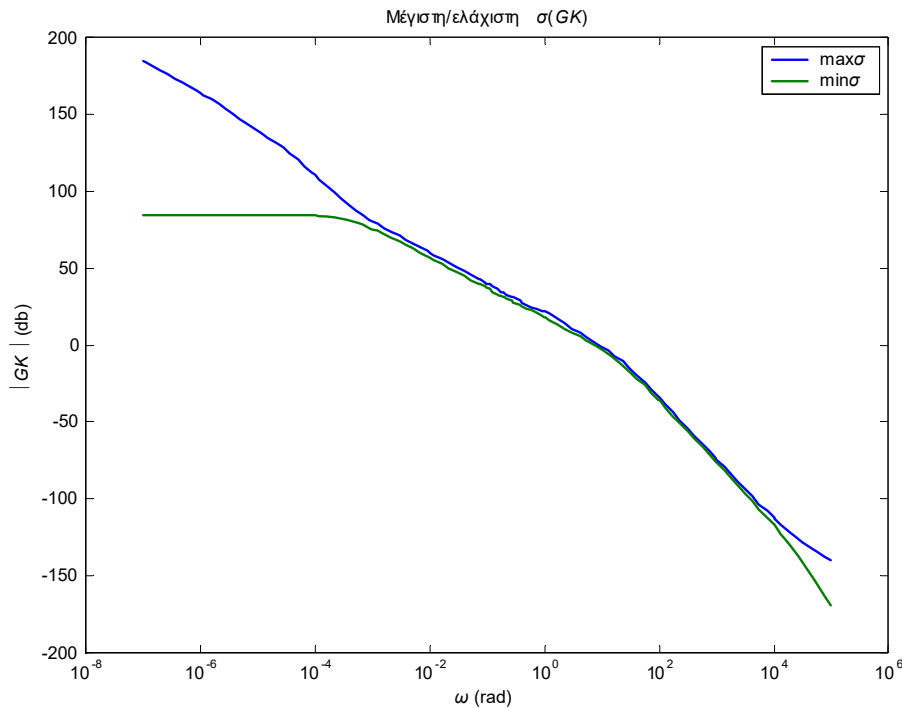


Σχ. 3.13 Απόκριση σφάλματος σε θόρυβο  $n_1 = 0,2 \times [\eta\mu(100t) \ \eta\mu(50t) \ \eta\mu(200t)]^T$



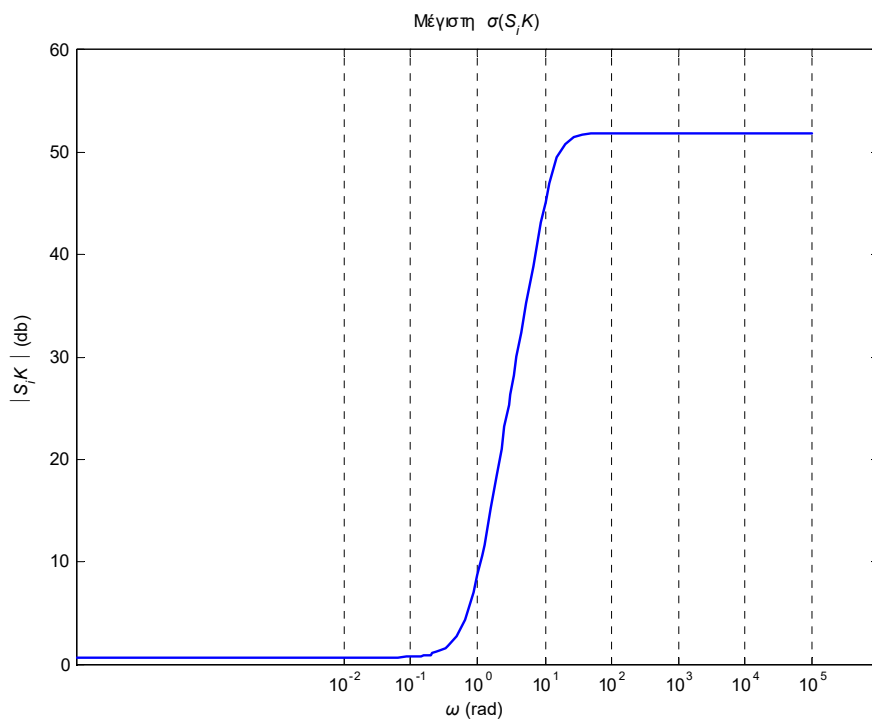
Σχ. 3.14 Απόκριση σφάλματος σε θόρυβο  $n_2 = 0,2 \times [\eta\mu(10t) \ \eta\mu(5t) \ \eta\mu(20t)]^T$



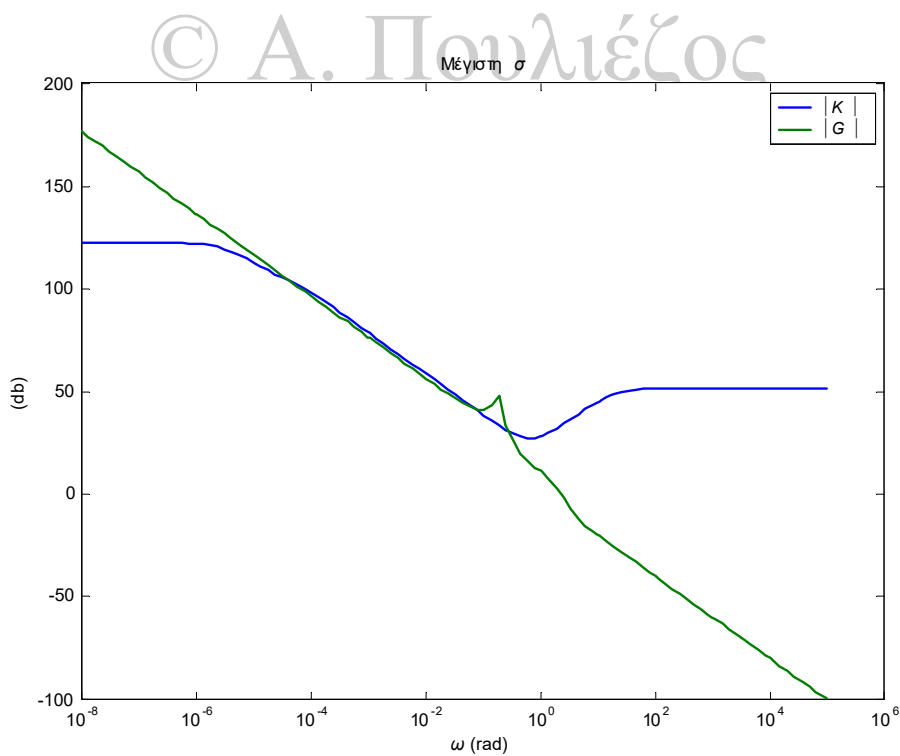


Σχ. 3.15 Διάγραμμα μέγιστης / ελάχιστης ιδιόμορφης τιμής συνάρτησης βρόχου εξόδου  $L_o=GK$

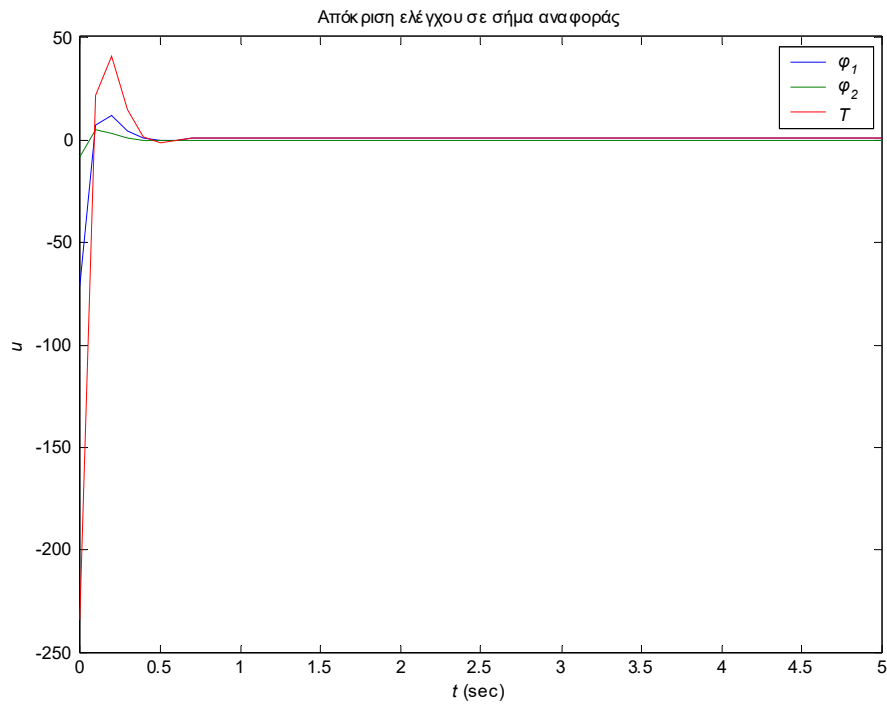
● Βασικός παράγοντας για το μέγεθος του ελέγχου είναι η μέγιστη ιδιόμορφη τιμή της συνάρτησης  $S_iK$ . Το γράφημα της φαίνεται στο Σχ. 3.16. Απ' ότι φαίνεται τα πράγματα δεν φαίνονται ευοίωνα για την επίδραση του θορύβου στον έλεγχο καθώς η τιμή στις ψηλές συχνότητες είναι αρκετά μεγάλη. Οι ίδιες προβλέψεις προκύπτουν και από την εξέταση του Σχ. 3.17 όπου φαίνονται τα διαγράμματα Bode των  $\bar{\sigma}(K)$  και  $\bar{\sigma}(G)$ . Είναι φανερό ότι η προϋπόθεση της 3.21 δεν ικανοποιείται. Τα Σχ. (3.18)-(3.20) επαληθεύουν την ανάλυση καθώς ο έλεγχος είναι μικρός εξαιτίας του σήματος αναφοράς και της διαταραχής εισόδου αλλά απαγορευτικά μεγάλος λόγω του θορύβου μετρήσεων.



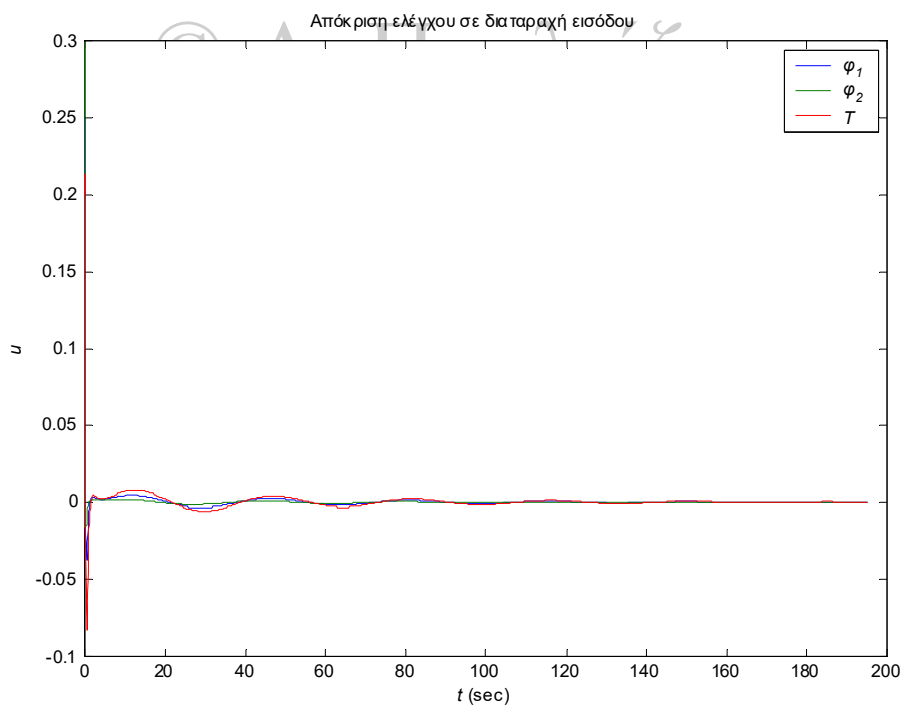
Σχ. 3.16 Διάγραμμα μέγιστης ιδιόμορφης τιμής του  $S_iK$



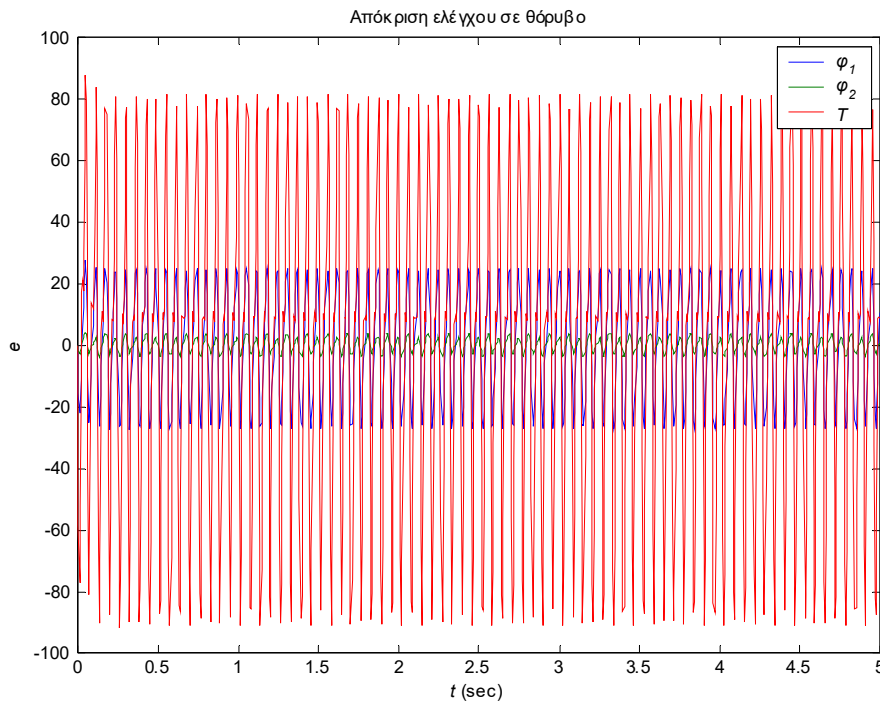
Σχ. 3.17 Διάγραμμα μέγιστης ιδιόμορφης τιμής των  $G, K$



Σχ. 3.18 Απόκριση σήματος ελέγχου σε είσοδο αναφοράς  $r = [0,5 \ 0,6 \ 0,4]^T$



Σχ. 3.19 Απόκριση σήματος ελέγχου σε διαταραχή εισόδου  $d_i = [0,25 \ 0,3 \ 0,2]^T$



Σχ. 3.20 Απόκριση σφάλματος σε θόρυβο  $n_1 = 0,2 \times [\eta\mu(100t) \ \eta\mu(50t) \ \eta\mu(200t)]^T$

Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει την δυσκολία σύνθεσης ενός ελεγκτή που να ικανοποιεί έστω και τις απαιτήσεις της ονομαστικής σχεδίασης. Να σημειωθεί ότι στη σχεδίαση αυτή δεν έχουμε εξετάσει θέματα περιθωρίου ευστάθειας. Στη συνέχεια θα δούμε πως μπορούμε να λύσουμε τα προβλήματα αυτά μέσω μιας διαφορετικής προσέγγισης.

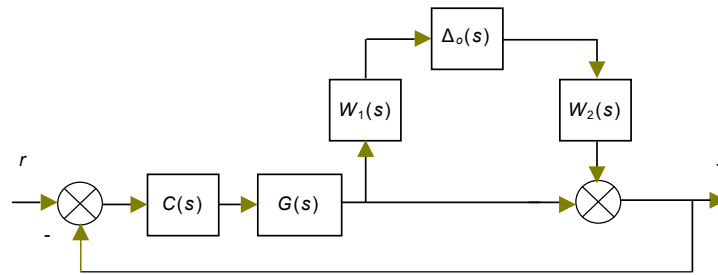
### 3.4 Στιβαρή απόδοση

Στην ανάλυση που προηγήθηκε υποθέσαμε ότι το υπό έλεγχο σύστημα είναι πλήρως και επαρκώς γνωστό. Ας χαλαρώσουμε αυτή την απαίτηση θεωρώντας ότι ,

$$G \in (I + W_1 \Delta_o W_2) G_0, \quad \|\Delta_o\|_\infty \leq 1 \quad (3.22)$$

Ας σημειωθεί ότι η (3.22) είναι μία μόνο από τις δυνατές απεικονίσεις αβεβαιότητας για το σύστημα  $G$  (ειδικότερα πρόκειται για το πρότυπο πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας στην έξοδο). Πληρέστερη ανάλυση θα γίνει στο Κεφάλαιο 5.

Το δομικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχ. 3.21.



Σχ. 3.21 Σύστημα με πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα στην έξοδο

Με τον όρο στιβαρή απόδοση εννοούνται δύο πράγματα:

- (1) Το κλειστό σύστημα πρέπει να παραμένει εσωτερικά ευσταθές για κάθε  $G$  της (3.22).
- (2) Τα σήματα εξόδου πρέπει να παραμένουν μικρά για κάθε  $G$  της (3.22).

Μπορεί ν' αποδειχθεί (π.χ. Lemmon) ότι για στιβαρή ευστάθεια απαιτείται,

$$\|W_1 T_o W_2\|_{\infty} \leq 1$$

ή ισοδύναμα,

$$\bar{\sigma}(L_o) \leq \frac{1}{1 + \bar{\sigma}(W_1)\bar{\sigma}(W_2)}, \quad \forall \omega \text{ τέτοια ώστε } \bar{\sigma}(L_o) < 1$$

ενώ για στιβαρή απόδοση μπορούν επίσης να εξαχθούν παρόμοια φράγματα.

Αυτό που καταδεικνύει η ανάλυση αυτή είναι ότι είναι δυνατόν, θεωρητικά, μέσω ενός ελεγκτή  $K$  να μορφοποιήσουμε την συνάρτηση ευαισθησίας εξόδου  $L_o$  έτσι που να ικανοποιεί τις (3.19)-(3.21) και τις προϋποθέσεις στιβαρούς απόδοσης. Το πρόβλημα με τις κλασσικές μεθόδους μορφοποίησης είναι ότι εκτός του ιδεατού σχήματος της  $L_o$ , πρέπει ο  $K$  να μην αποσταθεροποιεί εσωτερικά το κλειστό σύστημα. Μία επιπλέον δυσκολία έγκειται στο γεγονός ότι στα πολυμεταβλητά συστήματα πρέπει να προνοήσουμε και για την μορφή της  $L_i$  (συνάρτηση ευαισθησίας εισόδου).

Η πλήρης αντιμετώπιση όλων αυτών των ζητημάτων έπεται.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

### Ονομαστική απόδοση

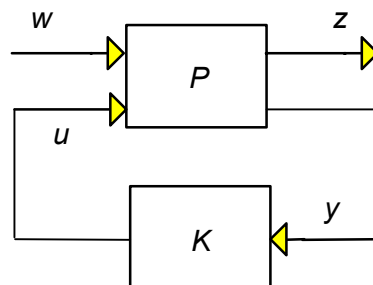
Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με τον βασικό κορμό της σχεδίασης με ανατροφοδότηση για συστήματα χωρίς αβεβαιότητα, υπόθεση η οποία θα αφαιρεθεί στο επόμενο κεφάλαιο. Συγκεκριμένα θα δούμε συστηματικές διαδικασίες σχεδίασης, των οποίων οι στόχοι εξειδικεύονται εκ των προτέρων, και στη συνέχεια βρίσκονται οι συνθήκες κάτω από τις οποίες οι στόχοι αυτοί μπορούν να πραγματοποιηθούν, όπως επίσης και οι κατάλληλοι ελεγκτές. Με άλλα λόγια, η σχεδίαση θα βασισθεί αποκλειστικά σε σαφώς διατυπωμένες προδιαγραφές, παρά σε κάποια συγκεκριμένη, προκαθορισμένη στρατηγική.

Η μοναδική προκαθορισμένη δομή θα είναι η γενική διάταξη ανατροφοδότησης του Σχ. 1.8. Δοθείσης της δομής αυτής, θα επικεντρώσουμε τη προσοχή μας στην απαραίτητη συνθήκη για οποιοδήποτε σύστημα: το να είναι ευσταθές κατά μία πρέπουσα έννοια. Ειδικότερα το κομμάτι της ανάλυσης θα καλύψει το θέμα της ευστάθειας σε συστήματα με ανατροφοδότηση και το θέμα της παραμετροποίησης όλων των ελεγκτών που σταθεροποιούν τα συστήματα αυτά. Στο κομμάτι της σύνθεσης θ' ασχοληθούμε με τη διαδικασία υπολογισμού του κατάλληλου ελεγκτή, και τις συνθήκες κάτω από τις οποίες η εύρεση αυτή είναι εφικτή.

#### 4.1 Ανάλυση

##### 4.1.1 Διατύπωση του προβλήματος

Όπως προείπαμε, για την επίλυση του προβλήματος θα θεωρήσουμε το δομικό διάγραμμα δύο θυρών του Σχ. 1.8,



Σχήμα 1.8 Διάγραμμα δύο θυρών

Αυτό το δεδομένο σύστημα (κλειστού βρόχου) έχει μία εξωτερική είσοδο,  $w$ , και μία έξοδο  $z$ . Το καθένα από τα σήματα αυτά μπορεί να απαρτίζεται από περισσότερους του ενός διαύλους (μπορεί δηλαδή να είναι διανύσματα). Το σήμα (ή συνάρτηση)  $w$ ,

εκφράζει την επίδραση του περιβάλλοντος επί του συστήματος όπως εξωτερικές διαταραχές, θόρυβος μετρήσεων και εντολές λειτουργίας (στοιχεία που δεν μπορούν να τροποποιηθούν από το σήμα ελέγχου  $u$ ). Το σήμα  $z$  περιέχει όλα τα χαρακτηριστικά του συστήματος που επιθυμούμε να ελέγξουμε (καταστάσεις, σφάλματα ή ενέργεια ελέγχου). Η απεικόνιση  $P$ , αναπαριστά ένα γραμμικό, δεδομένο και σταθερό σύστημα με την ονομασία **εγκατάσταση**, ενώ η επίσης γραμμική απεικόνιση  $K$ , με την ονομασία **ελεγκτής**, έχει σαν στόχο να εξασφαλίσει ότι η απεικόνιση μεταξύ  $w$  και  $z$  έχει τα επιθυμητά χαρακτηριστικά. Αυτό το επιτυγχάνει παράγοντας το σήμα ελέγχου  $u$ , χρησιμοποιώντας το σήμα μετρήσεων  $y$ .

Τα  $P$  και  $K$  είναι ευπρεπή συστήματα στο χώρο κατάστασης με αντίστοιχες εξισώσεις,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1w(t) + B_2u(t) \\ z(t) &= C_1x(t) + D_{11}w(t) + D_{12}u(t) \\ y(t) &= C_2x(t) + D_{21}w(t) + D_{22}u(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

ή ισοδύναμα,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2)$$

και,

$$\dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t) \quad (4.3)$$

$$u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t) \quad (4.4)$$

Δεδομένου ότι το  $P$  έχει δύο εισόδους και δύο εξόδους, διαμερίζεται φυσικά ως ακολούθως,

$$P(s) = \left[ \begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right] = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

(όπου έχει χρησιμοποιηθεί η μορφή του συσκευασμένου πίνακα), ενώ η αντίστοιχη μορφή για το  $K$  είναι,

$$K(s) = \left[ \begin{array}{c|c} A_K & B_K \\ \hline C_K & D_K \end{array} \right]$$

Με λίγη άλγεβρα βρίσκεται και η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου  $T_{zw}(s)$ ,

$$T_{zw}(s) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s) (I - P_{22}(s)K(s))^{-1} P_{21}(s) \tag{4.6}$$

ή,

$$z = T_{zw} w = \mathcal{F}_l(P, K)w \tag{4.7}$$

Η έκφραση (4.6) για την  $T_{zw}$  καλείται **(κατώτερος) γραμμικός κλασματικός μετασχηματισμός (lower LFT, Linear Fractional Transformation)**.

Επιπλέον θεωρούμε ότι τα συστήματα  $(A, B, C)$  και  $(A_k, B_k, C_k)$  είναι σταθεροποιήσιμα και εντοπίσιμα.

Τέλος να υπενθυμίσουμε τις διαστάσεις των διαφόρων μεταβλητών:

$x$	$n$
$w$	$m_1$
$u$	$m_2$
$z$	$p_1$
$y$	$p_2$

### 4.1.2 Εσωτερική ευστάθεια

Στον έλεγχο ελάχιστης νόρμας ενδιαφέρει θα χρησιμοποιηθεί η έννοια της εσωτερικής ευστάθειας. Για να βρούμε τις συνθήκες κάτω από τις οποίες το σύστημα του Σχ. 1.8 είναι εσωτερικά ευσταθές, χρειαζόμαστε κάποια προκαταρκτικά.

Κατ' αρχήν στο σύστημα αυτό μας ενδιαφέρουν οι συνθήκες κάτω από τις οποίες η συγκεκριμένη συνδεσμολογία έχει νόημα. Δηλαδή μας ενδιαφέρει πότε οι εξισώσεις (4.2)-(4.4) έχουν λύση για αυθαίρετα  $w$ . Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 4.1** Το σύστημα του Σχ. 1.8 είναι **εύθετο (well-posed)** αν υπάρχουν μοναδικές λύσεις  $x(t)$ ,  $x_K(t)$ ,  $y(t)$  και  $u(t)$  για όλες τις αρχικές τιμές  $x(0)$ ,  $x_K(0)$  και συναρτήσεις εισόδου  $w(t)$  · περαιτέρω αυτές οι μοναδικές λύσεις πρέπει να υπάρχουν και για όλες τις υλοποιήσεις στη γειτονιά των  $(A, B, C, D)$ ,  $(A_K, B_K, C_K, D_K)$ .

**Θεώρημα 4.1** Η συνδεσμολογία του Σχ. 1.8 είναι εύθετη αν και μόνον αν ο πίνακας  $I - D_{22}D_K$  είναι ομαλός (έχει αντίστροφο). Ειδικότερα αν  $D_{22}=0$  ή  $D_K=0$  (δηλαδή ο  $P_{22}(s)$  ή ο  $K(s)$  είναι αυστηρά πρόποντες) τότε η συνδεσμολογία του του Σχ. 1.8 είναι εύθετη.



*Απόδειξη:* Συλλέγοντας τις εξισώσεις κατάστασης και εξόδου για το σύστημα του Σχ. 1.8 έχουμε,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{x}_K(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix} w(t) \quad (4.8)$$

$$\begin{bmatrix} I & -D_K \\ D_{22} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & C_K \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_K(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w(t) \quad (4.9)$$

Προφανώς το αριστερό μέλος της (4.9) είναι αντιστρέψιμο αν και μόνον αν ο  $I - D_{22}D_K$  είναι ομαλός. Αν αυτό συμβαίνει τότε τα προκύπτοντα  $u, y$  μπορούν να αντικατασταθούν στην (4.8) και να βρεθεί μία μοναδική λύση στην εξίσωση κατάστασης. Επιπροσθέτως αυτό μπορεί να συμβεί γύρω από μία (ικανά) μικρή γειτονιά των  $D_{22}, D_K$ .

Αντίστροφα αν ο  $I - D_{22}D_K$  είναι ιδιόμορφος, τότε από την (4.9) μπορούμε να μετατοπίσουμε ελαφρά τους  $C_2, C_K$  έτσι ώστε να βρεθεί ένας γραμμικός συνδυασμός των  $x(t), x_K(t)$  και  $w(t)$  ίσος με 0, γεγονός που σημαίνει ότι οι αρχικές συνθήκες  $x(0), x_K(0), w(0)$  δεν μπορούν να επιλεγούν αυθαίρετα.

Είμαστε τώρα έτοιμοι για τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 4.2** Το σύστημα του Σχ. 1.8 είναι εσωτερικά ευσταθές αν είναι εύθετο και αν για κάθε αρχική συνθήκη  $x(0)$  του  $G$  και  $x_K(0)$  του  $K$  ισχύει,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_K(t) = 0$$

όταν  $w=0$ .

Το επόμενο θεώρημα μας δίνει μία άμεση δοκιμασία για την εσωτερική ευστάθεια.

**Θεώρημα 4.2** Το σύστημα του Σχ. 1.8 είναι εσωτερικά ευσταθές αν και μόνον αν ο  $I - D_{22}D_K$  είναι ομαλός και ο,

$$A_{cl} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -D_k \\ D_{22} & I \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & C_K \\ C_2 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι Hurwitz.

*Απόδειξη:* Δεδομένου ότι ο  $A_{cl}$  είναι ο πίνακας κατάστασης του κλειστού βρόχου το θεώρημα προκύπτει ευθέως (με χρήση των (4.8), (4.9)).

Η διατύπωση της εσωτερικής ευστάθειας μέσω του ορισμού 4.2 αναφέρεται σε αυτόνομα συστήματα (με μηδενική είσοδο). Υπ' αυτή την έννοια συμπίπτει με τον ορισμό της ασυμπτωτικής ευστάθειας. Όμως έχει ευθεία σχέση με την ευστάθεια εισό-

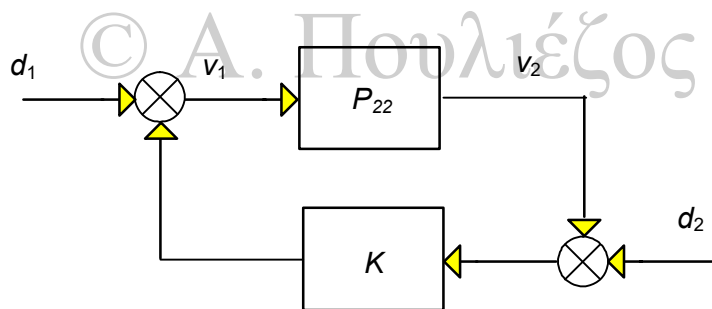
δου-εξόδου του συστήματος. Ειδικότερα, ο πίνακας μεταφοράς  $T_{zw}(s)$  του συστήματος είναι (για  $D_K=0$ ):

$$T_{zw}(s) = [C_1 \quad D_{12}C_K](Is - A_{cl})^{-1} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_K D_{21} \end{bmatrix} + D_{11}$$

Αν ο  $A_{cl}$  είναι Hurwitz, τότε ο πίνακας αυτός θα έχει όλους τους πόλους του στο αριστερό ημιπίεδο, δηλαδή  $T_{zw}(s) \in \mathcal{RH}_2$  ή ισοδύναμα η απεικόνιση αυτή είναι φραγμένη και αιτιακή (causal) στο  $\mathcal{L}_2[0, \infty)$ . Οι ιδιότητες αυτές είναι ακριβώς αυτό που ορίζουμε σαν ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.

Το ερώτημα που τίθεται είναι αν οι δύο αυτές έννοιες (εσωτερική ευστάθεια και ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου) είναι ισοδύναμες, δηλαδή αν η ευστάθεια φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου υπονοεί και εσωτερική ευστάθεια. Η απάντηση είναι αρνητική αφού αν θεωρήσουμε την ακραία περίπτωση  $C_1=D_{11}=D_{12}=0$ , τότε  $T_{zw}(s)=0$ , αλλά ο  $A_{cl}$  δεν περιορίζεται με κάποιο τρόπο. Μπορούμε όμως με τη βοήθεια ενός τροποποιημένου διαγράμματος να ορίσουμε την εσωτερική ευστάθεια μέσω της ευστάθειας φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου.

Έστω λοιπόν το διάγραμμα του Σχ. 4.1.



Σχήμα 4.1 Διάγραμμα ευστάθειας φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου

Στο διάγραμμα αυτό ο πίνακας  $P_{22}$  είναι το κάτω δεξιά τμήμα του  $P$  (Εξ. 4.5).

Για τα συστήματα των Σχ. 1.8 και 4.1 μπορεί ν' αποδειχθεί το ακόλουθο λήμμα:

**Λήμμα 4.3** Δοθέντος ενός ελεγκτή  $K$ , το Σχ. 1.8 είναι εσωτερικά ευσταθές αν και μόνον αν το Σχ. 4.1 είναι εσωτερικά ευσταθές.

Με το λήμμα αυτό μπορούμε τώρα να δείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

**Θεώρημα 4.4** Έστω ότι το σύστημα  $(A, B_2, C_2)$  είναι σταθεροποιήσιμο και εντοπίσιμο. Τότε το 4.1 είναι εσωτερικά ευσταθές αν και μόνον αν η συνάρτηση μεταφοράς,

$$\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathcal{RH}_2.$$

Απόδειξη: (Dullerud και Paganini, σ. 177).

### 4.1.3 Σταθεροποίηση

Στη προηγούμενη ενότητα εξετάσαμε την ανάλυση ευστάθειας για το συγκεκριμένο σύστημα του Σχ. 1.8. Το επόμενο ερώτημα που τίθεται είναι κάτω από ποιες συνθήκες ο συγκεκριμένος ελεγκτής μπορεί να βρεθεί. Το θεώρημα που ακολουθεί μας απαντά στην ερώτηση αυτή:

**Θεώρημα 4.5** Η απαραίτητη και ικανή συνθήκη για την ύπαρξη ενός εσωτερικά σταθεροποιητικού ελεγκτή  $K$  του Σχ. 1.8 είναι το  $(A, B_2, C_2)$  να είναι σταθεροποιήσιμο και εντοπίσιμο. Αν αυτό ισχύει, ένας τέτοιος ελεγκτής δίνεται από την,

$$K(s) = \left[ \frac{A + B_2 F + LC_2 + LD_{22} F}{F} \mid \frac{-L}{0} \right] \quad (4.10)$$

όπου  $F$  και  $L$  είναι πίνακες που καθιστούν τους  $A + B_2 F$  και  $A + LC_2$  ευσταθείς.

Απόδειξη: (Dullerud και Paganini, σ. 179).

Το αποτέλεσμα αυτό είναι μία λύση στο πρόβλημα της σταθεροποίησης, αφού μας εφοδιάζει με μία κατασκευαστική διαδικασία για την εύρεση ενός σταθεροποιητή. Στη συγκεκριμένη περίπτωση αυτός συντίθεται από έναν ασυμπωτικό παρατηρητή και ανατροφοδότηση καταστάσεων. Όμως ο συγκεκριμένος ελεγκτής είναι ένας μόνο από το σύνολο των εφικτών ελεγκτών. Για να βρούμε το πλήρες σύνολο όλων των σταθεροποιητικών ελεγκτών χρειαζόμαστε στοιχεία από την θεωρία των αμοιβαία πρώτων παραγοντοποιήσεων. Συγκεκριμένα, έστω μία διπλά αμοιβαία πρώτη παραγοντοποίηση,

$$\begin{bmatrix} X(s) & -Y(s) \\ -N(s) & M(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M(s) & Y(s) \\ N(s) & X(s) \end{bmatrix} = I$$

όπου  $P_{22}(s) = N(s)M^{-1}(s) = M^{-1}(s)N(s)$ . Τότε ισχύει το εξής:

**Θεώρημα 4.6** Έστω  $(A, B_2, C_2)$  μία σταθεροποιήσιμη και εντοπίσιμη πραγμάτωση. Τότε όλοι οι ελεγκτές που σταθεροποιούν εσωτερικά το σύστημα του Σχ. 1.8 δίνονται από την,

$$K(s) = (Y(s) - M(s)Q(s))(X(s) - N(s)Q(s))^{-1} = (X(s) - Q(s)N(s))^{-1}(Y(s) - Q(s)M(s))$$

όπου  $Q(s) \in \mathcal{RH}_\infty$  και ο  $X(\infty) - N(\infty)Q(\infty)$  είναι αντιστρέψιμος.

Απόδειξη: (Dullerud και Paganini, σ. 190).

## 4.2 Σύνθεση

### 4.2.1 Διατύπωση του προβλήματος

Έχοντας μελετήσει την ανάλυση του πρότυπου συστήματος (Σχ. 1.8), μπορούμε τώρα να στρέψουμε την προσοχή μας στο πρόβλημα της βέλτιστης σύνθεσης. Το πρόβλημα αυτό έχει δύο σκέλη:

1. Υπάρχει αποδεκτός ελεγκτής χώρου κατάστασης  $K(s)$ , τέτοιος ώστε το σύστημα κλειστού βρόχου να είναι εσωτερικά ευσταθές;
- 2α. (πρόβλημα βελτίστου  $\mathcal{H}_\infty$ ). Να βρεθούν όλοι οι αποδεκτοί ελεγκτές  $K(s)$  που να ελαχιστοποιούν την  $\|T_{zw}\|_\infty$ .
- 2β. (πρόβλημα υποβελτίστου  $\mathcal{H}_\infty$ ). Δοθέντος  $\gamma > \gamma_{min}$  να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι ελεγκτές  $K(s)$  που να καθιστούν την  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

Ο βέλτιστος ελεγκτής, όπως φαίνεται από την διατύπωση του προβλήματος δεν είναι μοναδικός. Επιπλέον μπορεί να είναι πολύ δύσκολη η εύρεση του. Σε κάποια δε προβλήματα μπορεί να μην είναι επιθυμητή η εύρεση του (λόγω του ότι ένας υποβέλτιστος ελεγκτής ίσως έχει μικρότερο εύρος ζώνης).

### 4.2.2 Ερμηνεία του κριτηρίου $\mathcal{H}_\infty$

Η υιοθέτηση της στρατηγικής ελαχιστοποίησης της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  δεν έχει προφανή αιτιολόγηση. Κατ' αρχήν η ελαχιστοποίηση κάποιας νόρμας προκύπτει από την φιλοσοφική θέση σχεδίασης: «να καταστήσουμε τα σήματα σφάλματος μικρά», σε αντίθεση με την κλασική θεώρηση που βελτιστοποιεί παραμέτρους της μεταβατικής και σταθερής απόκρισης. Αυτό επιβάλλει προσοχή στη κατάστρωση του Σχ. 1.8, δηλαδή τα σήματα  $z$  πρέπει να αναπαριστούν μεταβλητές που θέλουμε να είναι «μικρές». Για παράδειγμα σ' ένα πρόβλημα παρακολούθησης, το  $z$  πρέπει να περιλαμβάνει το σφάλμα παρακολούθησης και όχι την έξοδο παρακολούθησης. Επίσης το  $z$  πρέπει να περιλαμβάνει και κάποια ποινή επί του σήματος ελέγχου έτσι ώστε η προκύπτουσα λύση να είναι υλοποιήσιμη.

Επιπλέον, η νόρμα αυτή είναι επαγόμενη: ακριβέστερα είναι η  $\mathcal{L}_2$  επαγόμενη νόρμα ενός αιτιακού, ευσταθούς, γραμμικού, χρονικά αμετάβλητου συστήματος. Επομένως ελαχιστοποίηση της νόρμας αυτής ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της μέγιστης «απολαβής» του συστήματος όταν τα σήματα εισόδου και εξόδου είναι σήματα  $\mathcal{L}_2$ , δηλαδή σήματα με πεπερασμένη ενέργεια. Με άλλα λόγια ελαχιστοποίηση της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  ισοδυναμεί με ελαχιστοποίηση της χειρίστης επίδρασης επί της ενέργειας του  $z$ , αυθαίρετου  $\mathcal{L}_2$  σήματος εισόδου  $w$ . Υπ' αυτή την έννοια το κριτήριο αυτό είναι κα-

τάλληλο όταν δεν έχουμε πληροφορία για τα φασματικά χαρακτηριστικά του σήματος εισόδου  $w$ . Σε αντίθετη περίπτωση η ελαχιστοποίηση της νόρμας  $\mathcal{H}_2$  είναι πιο κατάλληλη.

Υπάρχει όμως και μία πιο λεπτή αιτία για την υιοθέτηση ενός κριτηρίου επαγόμενης νόρμας: ένας συσταλτικός (contractive) τελεστής  $P$  έχει την ιδιότητα ότι η αντιστροφή του  $I-P$  είναι εξασφαλισμένη. Αυτή η λεγόμενη ιδιότητα της «μικρής απολαβής» εξασφαλίζει την ευστάθεια ορισμένων συστημάτων ανατροφοδότησης, ειδικά όταν κάποια από τα τμήματα τους δεν ορίζονται επακριβώς. Η ιδιότητα αυτή θα γίνει απόλυτα κατανοητή στο επόμενο κεφάλαιο.

### 4.2.3 Λύση προβλήματος

Υποθέτουμε ότι,

Π1.  $D_{11}=0, D_{22}=0$ . Η πρώτη προϋπόθεση δεν είναι ουσιαστική, η δεύτερη όμως απλουστεύει κατά πολύ τις εξισώσεις της λύσης. Υπονοεί ότι οι συναρτήσεις μεταφοράς από το  $w$  στο  $z$  και από το  $u$  στο  $y$  φθίνουν στις υψηλές συχνότητες.

Ακόμη, για να έχει το πρόβλημα λύση πρέπει να ικανοποιούνται οι επιπλέον συνθήκες:

Π2. Το ζεύγος  $(A, B_2)$  να είναι σταθεροποιήσιμο και το  $(C_2, A)$  εντοπίσιμο. Η προϋπόθεση αυτή εξασφαλίζει ότι ο ελεγκτής θα μπορεί να επηρεάσει όλες τις ασταθείς καταστάσεις και ότι αυτές οι καταστάσεις εμφανίζονται στις μετρήσεις.

Π3. βαθμός( $D_{12}$ )= $m_2$ , βαθμός( $D_{21}$ )= $p_2$ . Οι προϋποθέσεις αυτές εξασφαλίζουν ότι οι ελεγκτές είναι πρόβλημα. Επίσης υπονοεί ότι η συνάρτηση μεταφοράς από το  $w$  στο  $y$  είναι μη μηδενική στις υψηλές συχνότητες. Η προϋπόθεση αυτή συνήθως δεν ικανοποιείται εκτός εάν ληφθεί ιδιαίτερη μέριμνα στη φάση διατύπωσης του προβλήματος.

Π4. βαθμός  $\left( \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_2 \\ C_1 & D_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2$  σε όλες τις συχνότητες.

Π5. βαθμός  $\left( \begin{bmatrix} A - j\omega I & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2$  σε όλες τις συχνότητες.

Για το απλοποιημένο αυτό πρόβλημα ένας (υποβέλτιστος) ελεγκτής δίνεται από τη σχέση,

$$u = -K_c \hat{x}$$

όπου ο εκτιμητής κατάστασης υπολογίζεται από την,

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + B_2 u + B_1 \hat{w} + Z_\infty K_e (y - \hat{y})$$

και,

$$\begin{aligned}\hat{w} &= \gamma^{-2} B_1^T X_\infty \hat{x} \\ \hat{y} &= C_2 \hat{x} + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty \hat{x}\end{aligned}$$

Ο όρος  $\hat{w}$  είναι η εκτίμηση της χειρότερης δυνατής διαταραχής εισόδου του συστήματος και ο  $\hat{y}$  είναι η έξοδος του εκτιμητή. Οι πίνακες απολαβής  $K_c$ ,  $K_e$  δίνονται από τους τύπους,

$$\begin{aligned}K_c &= \tilde{D}_{12} (B_2^T X_\infty + D_{12}^T C_1), \quad \tilde{D}_{12} = (D_{12}^T D_{12})^{-1} \\ K_e &= (Y_\infty C_2^T + B_1 D_{21}^T) \tilde{D}_{21}, \quad \tilde{D}_{21} = (D_{21} D_{21}^T)^{-1}\end{aligned}$$

Ο όρος  $Z_\infty$  υπολογίζεται μέσω της,

$$Z_\infty = (I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty)^{-1}$$

Οι όροι  $X_\infty$ ,  $Y_\infty$  είναι οι λύσεις των εξισώσεων Riccati για τον ελεγκτή και εκτιμητή αντίστοιχα:

$$X_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} A - B_2 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1 & \gamma^{-2} B_1 B_1^T - B_2 \tilde{D}_{12} B_2^T \\ -\tilde{C}_1^T C_1 & -(A - B_1 \tilde{D}_{12} D_{12}^T C_1)^T \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$Y_\infty = \text{Ric} \begin{bmatrix} -(A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T & \gamma^{-2} C_1^T C_1 - C_2^T \tilde{D}_{21} C_2 \\ -\tilde{B}_1 \tilde{B}_1^T & -(A - B_1 D_{21}^T \tilde{D}_{21} C_2)^T \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

όπου,

$$\tilde{C}_1 = (I - D_{12} \tilde{D}_{12} D_{12}^T) C_1, \quad \tilde{B}_1 = B_1 (I - D_{21}^T \tilde{D}_{21} D_{21})$$

Συλλέγοντας όλες τις παραπάνω εκφράσεις μπορούμε να γράψουμε το κλειστό σύστημα ως εξής:

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A & -B_2 K_c \\ Z_\infty K_e C_2 & A - B_2 K_c + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty - Z_\infty K_e (C_2 + \gamma^{-2} D_{21} B_1^T X_\infty) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ Z_\infty K_e D_{21} \end{bmatrix} w \\ \begin{bmatrix} z \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} C_1 & -D_{12} K_c \\ C_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \hat{x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ D_{21} \end{bmatrix} w\end{aligned}$$

Τέλος μπορεί να αποδειχθεί ότι ο σταθεροποιητικός ελεγκτής υπάρχει αν και μόνον αν οι εξισώσεις Riccati (4.11), (4.12) έχουν θετικά ημιορισμένες λύσεις και,

$$\rho(X_\infty Y_\infty) < \gamma^2$$

(όπου  $\rho$ : φασματική ακτίνα).

Για τον ελεγκτή αυτόν φυσικά  $\|T_{zw}\|_\infty < \gamma$ .

Απόδειξη: Δες π.χ. Zhou, K. σ.272-278.

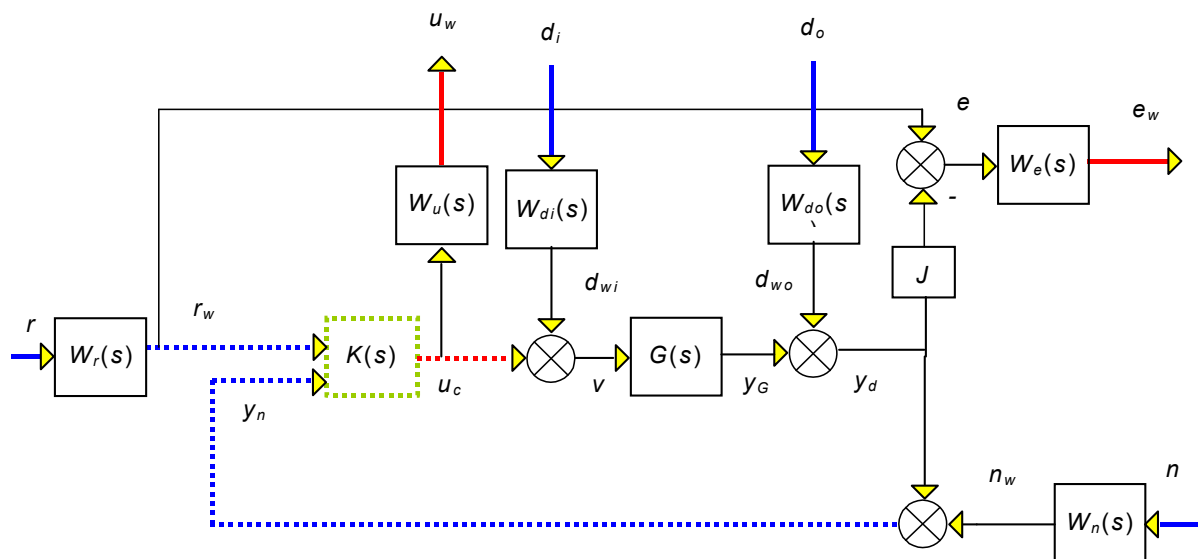
#### 4.2.4 Μορφοποίηση προβλημάτων ελέγχου σε διάγραμμα δύο θυρών

Η μορφοποίηση των γνωστών προβλημάτων αυτομάτου ελέγχου σε διαγράμματα δύο θυρών δεν είναι προφανής. Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε μία γενική προσέγγιση στο θέμα αυτό. Επιμέρους προβλήματα μπορούν να διατυπωθούν σαν υποπεριπτώσεις της γενικής τοποθέτησης.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν το κλασικό πρόβλημα ρύθμισης, που φαίνεται στο Σχ. 3.1 με την γνωστή ερμηνεία των μεταβλητών. Στόχος της ονομαστικής σχεδίασης είναι να διατηρήσουμε το μέγεθος του σφάλματος "μικρό", παρ' όλες τις διαταραχές και τον θόρυβο στις μετρήσεις. Επίσης επιθυμούμε ο έλεγχος να έχει μικρό μέγεθος έτσι ώστε να εξοικονομείται ενέργεια.

Για να μπορέσουμε να επιλύσουμε το πρόβλημα με τα εργαλεία του ελέγχου ελάχιστης νόρμας είναι απαραίτητο να μετασχηματίσουμε το Σχ. 3.1.

Σε πρώτη φάση παράγουμε το Σχ. 4.2.



Σχήμα 4.2 Παραδοσιακό διάγραμμα συστήματος ρύθμισης δύο βαθμών ελευθερίας (σταθμισμένο)

Συγκρίνοντας τα δύο σχήματα παρατηρούμε βασικά ότι οι είσοδοι και έξοδοι έχουν

προπολλαπλασιασθεί και μεταπολλαπλασιασθεί με κάποιες συναρτήσεις μεταφοράς, έτσι ώστε για παράδειγμα,

$$W_r(s)r=r_w$$

Ο λόγος γι' αυτή την τροποποίηση είναι ότι θέλουμε οι νόρμες των εμπλεκόμενων σημάτων εισόδου και εξόδου να είναι  $\leq 1$  (αυτό απαιτεί η διαδικασία ελέγχου  $\mathcal{H}_\infty$ , όπως θα δούμε στη συνέχεια). Επομένως έχοντας γνώση των σημάτων εισόδου (αναφορά, διαταραχή, θόρυβος) και των απαιτήσεων σχεδίασης σε ότι αφορά στα σήματα εξόδου (μέγεθος ελέγχου, σφάλμα), μπορούμε να υπολογίσουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς βαρών έτσι ώστε να ισχύει ο περιορισμός μεγέθους που προαναφέρθηκε (περισσότερες λεπτομέρειες στο επόμενο κεφάλαιο).

Οι υπόλοιπες ήσσονες διαφορές των δύο σχημάτων είναι αφ' ενός η ύπαρξη του πίνακα  $J$  γιατί είναι δυνατόν να απαιτείται η ρύθμιση λιγότερων μεταβλητών από αυτές που παρατηρούνται και αφ' ετέρου ο διαφορετικός τρόπος απεικόνισης της δυνατότητας μορφοποίησης της εισόδου. Όμως παρατηρούμε ότι στο Σχ. 3.1 η έξοδος του ελεγκτή είναι,

$$K(Pr_w - y_n) = KPr_w - Ky_n$$

ενώ στο Σχ. 4.2 αντίστοιχα έχουμε,

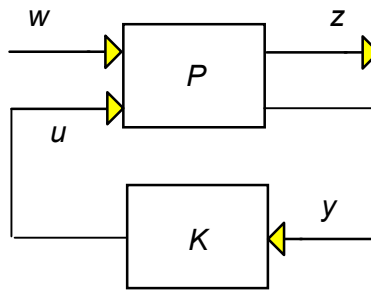
$$K \begin{bmatrix} r_w \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_1 & K_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_w \\ y_n \end{bmatrix} = K_1 r_w + K_2 y_n$$

Συγκρίνοντας τις δύο παραστάσεις εύκολα μπορούμε να δούμε την ισοδυναμία.

Να υπενθυμίσουμε ότι το Σχ. 4.2 είναι πολύ γενικό και στη πράξη κάποια κομμάτια (όπως για παράδειγμα η διαταραχή στη είσοδο της εγκατάστασης) μπορεί να λείπουν. Ο χρήστης μπορεί να κάνει τις απλοποιήσεις όπου χρειάζεται. Σε κάθε περίπτωση η απλοποίηση είναι ευκολότερη διαδικασία από την γενίκευση, και για το λόγο αυτό χρησιμοποιούμε εδώ το πιο γενικό υπόδειγμα.

Στη συνέχεια το Σχ. 4.2 μετασχηματίζεται στο ζητούμενο διάγραμμα δύο θυρών του Σχ. 1.8,



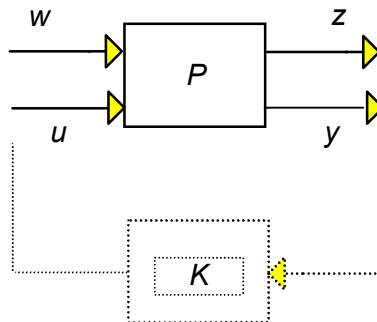


Σχήμα 1.8 Διάγραμμα δύο θυρών

με,

$$z = \begin{bmatrix} u_w \\ e_w \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} r_w \\ y_n \end{bmatrix}, \quad u = u_c$$

όπου  $z$  οι μεταβλητές εξόδου που θέλουμε να ρυθμίσουμε και  $w$  οι εξωγενείς είσοδοι. Για να βρούμε την μορφή του  $P(s)$  «σπάμε» το βρόχο ανατροφοδότησης του Σχ. 1.8 (Σχ. 4.3) και χρησιμοποιούμε τις εξισώσεις που προκύπτουν από το Σχ. 4.2. Η διαδικασία είναι κάπως κουραστική αλλά όχι δύσκολη.



Σχήμα 4.3 Δομή ανοικτού βρόχου

Έτσι,

$$\begin{aligned} e_w &= W_e e = W_e (r_w - J y_d) = W_e [r_w - J(W_{d_o} d_o + G v)] \\ &= W_e W_r r - W_e J W_{d_o} d_o - W_e J G (W_{d_i} d_i + u_c) \\ &= W_e W_r r - W_e J W_{d_o} d_o - W_e J G W_{d_i} d_i + W_e J G u_c \end{aligned}$$

και,

$$u_w = W_u u_c$$

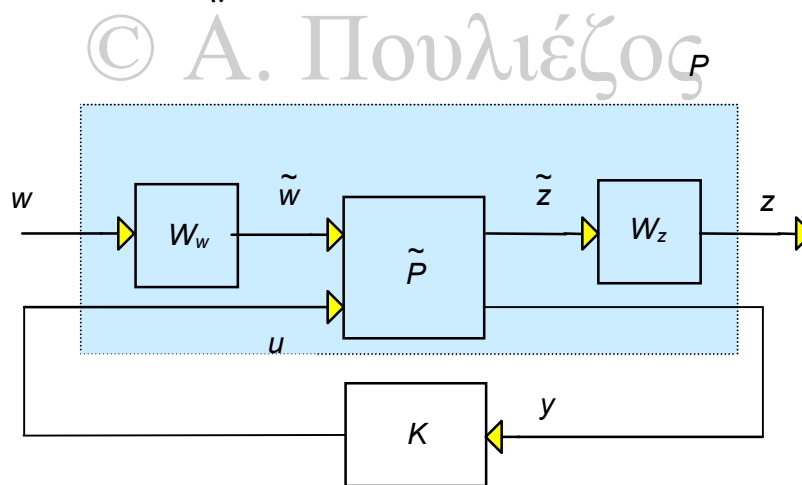
$$\begin{aligned} y_n = y_d + W_n n &= (W_{d_o} d_o + Gv) + W_n n = G(W_{d_i} d_i + u_c) + W_{d_o} d_o + W_n n \\ &= G W_{d_i} d_i + G u_c + W_{d_o} d_o + W_n n \end{aligned}$$

$$r_w = W_r r$$

Συλλέγοντας όλα τα παραπάνω, έχουμε,

$$\begin{bmatrix} u_w \\ e_w \\ r_w \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & W_u \\ -W_e J W_{d_o} & -W_e J G W_{d_i} & 0 & W_e W_r & W_e J G \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & W_r & 0 \\ W_{d_o} & G W_{d_i} & W_n & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \\ n \\ r \\ u_c \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Η (4.13) αναπαριστά το σύστημα,



όπου  $\tilde{P}$  το μη σταθμισμένο σύστημα (π.χ. του Σχ. 3.1).

Επίσης τα εμπλεκόμενα συστήματα περιγράφονται σε μορφή εξισώσεων κατάστασης ως,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \begin{bmatrix} B_1 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(t) \\ u(t) \end{bmatrix}$$

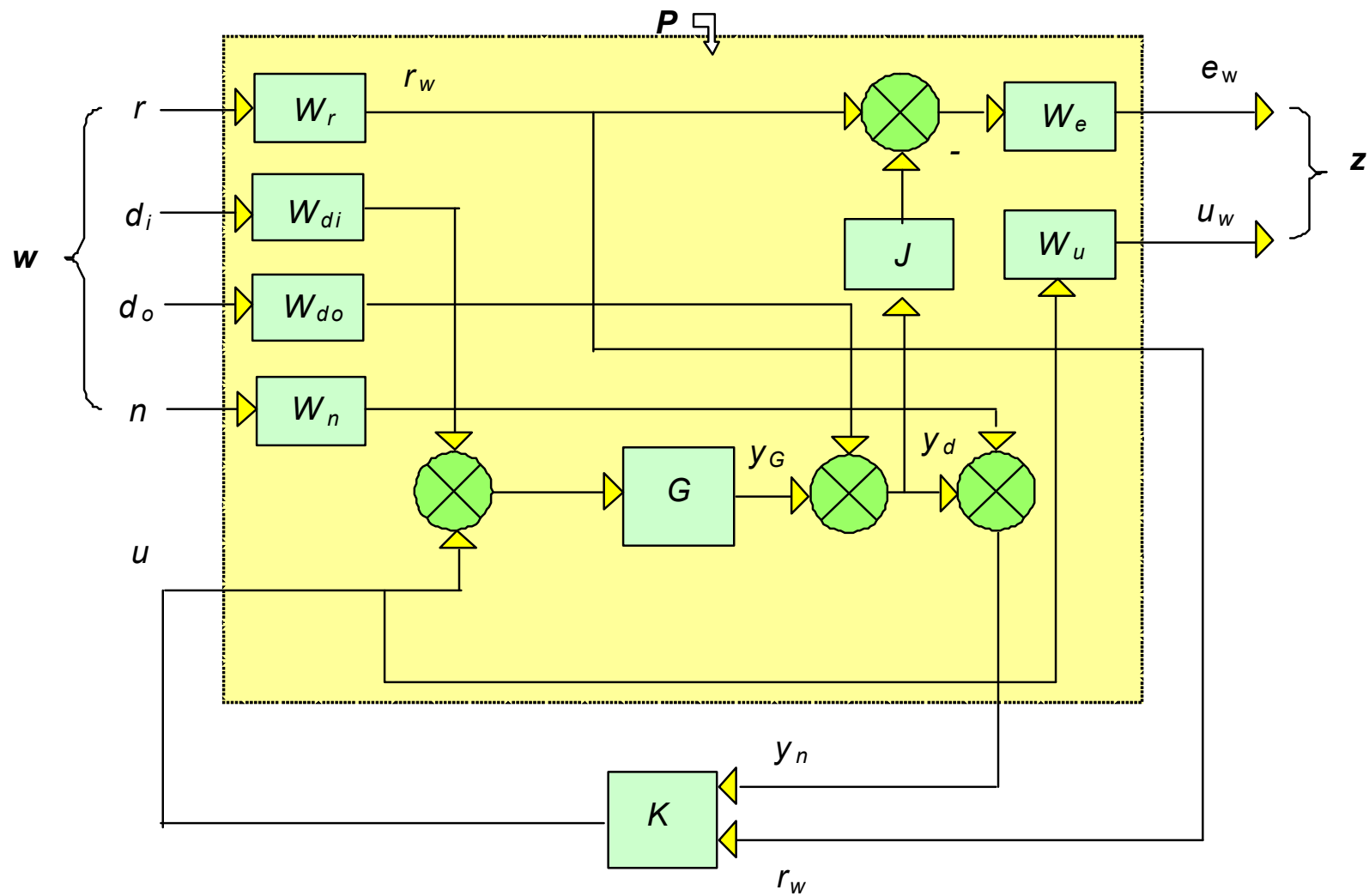
και,

$$\dot{x}_K(t) = A_K x_K(t) + B_K y(t)$$

$$u(t) = C_K x_K(t) + D_K y(t)$$

Για να κατανοήσουμε καλύτερα, αλλά και για να βρούμε τις αντιστοιχίες που εμπλέκονται ας κάνουμε μία «ακτινογραφία» του Σχ. 1.8, που φαίνεται στο Σχ. 4.4.

© Α. Πουλιέζος



Σχήμα 4.4 Πρόβλημα ρύθμισης σε διάγραμμα δύο θυρών

Στη συνέχεια ας εκφράσουμε τις συναρτήσεις μεταφοράς του Σχ. 4.2 σε εξισώσεις χώρου κατάστασης. Έτσι, έστω ότι,

$$G = \left[ \begin{array}{c|c} A_G & B_G \\ \hline C_G & 0 \end{array} \right]$$

$$W_u = \left[ \begin{array}{c|c} A_u & B_u \\ \hline C_u & D_u \end{array} \right], \quad W_e = \left[ \begin{array}{c|c} A_e & B_e \\ \hline C_e & D_e \end{array} \right]$$

$$W_n = \left[ \begin{array}{c|c} A_n & B_n \\ \hline C_n & D_n \end{array} \right], \quad W_{d_i} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{d_i} & B_{d_i} \\ \hline C_{d_i} & D_{d_i} \end{array} \right], \quad W_{d_o} = \left[ \begin{array}{c|c} A_{d_o} & B_{d_o} \\ \hline C_{d_o} & D_{d_o} \end{array} \right], \quad W_r = \left[ \begin{array}{c|c} A_r & B_r \\ \hline C_r & D_r \end{array} \right]$$

Στην «φυσιολογική» διατύπωση του προβλήματος οι συναρτήσεις δίνονται συνήθως σε εξισώσεις χώρου κατάστασης για την εγκατάσταση  $G$ , και σε πίνακες μεταφοράς για τα υπόλοιπα. Αυτό συμβαίνει γιατί οι πίνακες  $W$  μορφοποιούν τα σήματα στο πεδίο της συχνότητας. Σε κάθε περίπτωση το MATLAB παρέχει όλες τις συναρτήσεις γι' αυτή τη μετατροπή (π.χ. η `sys=ss(W)` μετατρέπει τον πίνακα μεταφοράς  $W$  σε αναπαράσταση χώρου κατάστασης).

Έτσι οι εξισώσεις που συνδέουν τις εισόδους, εξόδους, καταστάσεις και είσοδο/έξοδο στον ελεγκτή είναι,

$$\dot{x}_G = A_G x_G + B_G (d_{w_i} + u), \quad y_G = C_G x_G$$

$$\dot{x}_u = A_u x_u + B_u u, \quad u_w = C_u x_u + D_u u$$

$$\dot{x}_e = A_e x_e + B_e (r_w - J(y_G - d_{w_o})), \quad e_w = C_e x_e + D_e (r_w - J(y_G - d_{w_o}))$$

$$\dot{x}_r = A_r x_r + B_r r, \quad r_w = C_r x_r + D_r r$$

$$\dot{x}_n = A_n x_n + B_n n, \quad n_w = C_n x_n + D_n n$$

$$\dot{x}_{d_i} = A_{d_i} x_{d_i} + B_{d_i} d_i, \quad d_{w_i} = C_{d_i} x_{d_i} + D_{d_i} d_i$$

$$\dot{x}_{d_o} = A_{d_o} x_{d_o} + B_{d_o} d_o, \quad d_{w_o} = C_{d_o} x_{d_o} + D_{d_o} d_o$$

$$y_n = y_G + n_w + d_{w_o}$$

(4.14)

Τώρα ας ορίσουμε,

$$x = \begin{bmatrix} x_G \\ x_u \\ x_e \\ x_r \\ x_n \\ x_{d_i} \\ x_{d_o} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} r_w \\ y_n \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} u_w \\ e_w \end{bmatrix}, \quad u = u_c$$

οπότε αντικαθιστώντας τα εσωτερικά σήματα  $d_{w_o}$ ,  $d_{w_i}$ ,  $n_w$ ,  $r_w$  και  $y_G$  από τις (4.14) παίρνουμε,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & B_G C_{d_i} & 0 \\ 0 & A_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_e J C_G & 0 & A_e & B_e C_r & 0 & 0 & -B_e J C_{d_o} \\ 0 & 0 & 0 & A_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d_o} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & B_G D_{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_e D_{d_o} & 0 & 0 & B_e D_r \\ 0 & 0 & 0 & B_r \\ 0 & 0 & B_n & 0 \\ 0 & B_{d_i} & 0 & 0 \\ B_{d_o} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} B_G \\ B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$z = \begin{bmatrix} 0 & C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_e J C_G & 0 & C_e & D_e C_r & 0 & 0 & -D_e C_{d_o} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_e J D_{d_o} & 0 & 0 & D_e D_r \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 & 0 \\ C_G & 0 & 0 & 0 & C_n & 0 & C_{d_o} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_r \\ D_{d_o} & 0 & D_n & 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

Επομένως οι πίνακες της (4.5) είναι,

$$A = \begin{bmatrix} A_G & 0 & 0 & 0 & 0 & B_G C_{d_i} & 0 \\ 0 & A_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_e J C_G & 0 & A_e & B_e C_r & 0 & 0 & -B_e J C_{d_o} \\ 0 & 0 & 0 & A_r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d_i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{d_o} \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & B_G D_{d_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -B_e D_{d_o} & 0 & 0 & B_e D_r \\ 0 & 0 & 0 & B_r \\ 0 & 0 & B_n & 0 \\ 0 & B_{d_i} & 0 & 0 \\ B_{d_o} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

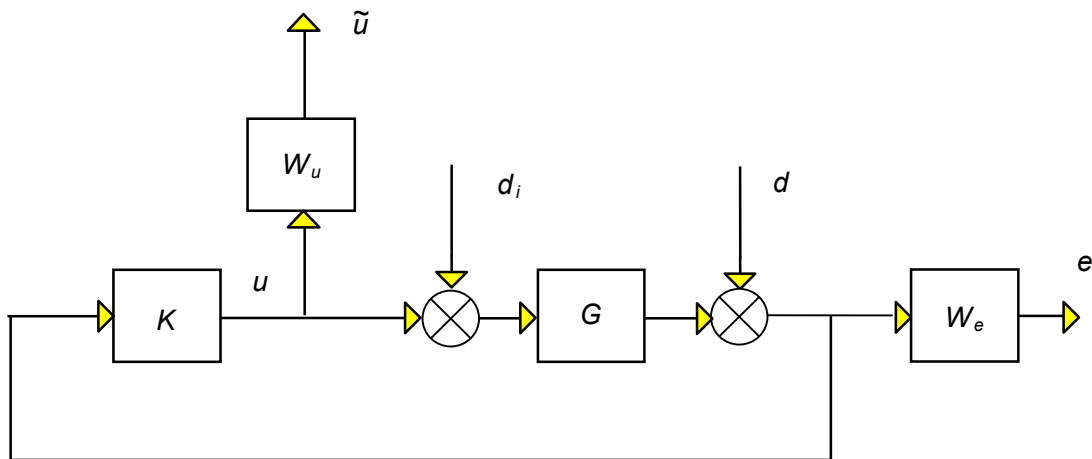
$$B_2 = \begin{bmatrix} B_G \\ B_u \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & C_u & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_e J C_G & 0 & C_e & D_e C_r & 0 & 0 & -D_e C_{d_o} \end{bmatrix}, \quad D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -D_e D_{d_o} & 0 & 0 & D_e D_r \end{bmatrix}$$

$$D_{12} = \begin{bmatrix} D_u \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & C_r & 0 & 0 & 0 \\ C_G & 0 & 0 & 0 & C_n & 0 & C_{d_o} \end{bmatrix}, \quad D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & D_r \\ D_{d_o} & 0 & D_n & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{22} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

**Παράδειγμα 4.1** Ας θεωρήσουμε ένα απλοποιημένο παράδειγμα για την κατανόηση των παραπάνω εννοιών. Έστω το σύστημα του Σχ. 4.5,



Σχήμα 4.5

με,

$$G(s) = \frac{50(s+1,4)}{(s+1)(s+2)}, \quad W_e = \frac{2}{s+0,2}, \quad W_u = \frac{s+1}{s+10}$$

Ο στόχος είναι η εύρεση ενός ελεγκτή  $\mathcal{H}_\infty$  για την ελαχιστοποίηση της συνάρτησης μεταφοράς  $T_{zw}(s)$  από το  $w = \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix}$  στο  $z = \begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix}$ .

Το πρόβλημα στη μορφή αυτή είναι ένα πρόβλημα απόρριψης διαταραχών, δηλαδή αυτό που προσπαθεί να πετύχει ο ελεγκτής είναι να ελαχιστοποιήσει την χειρίστη επίδραση των διαταραχών εισόδου και εξόδου ( $d_i, d$ ) επί της εξόδου και μεγέθους ελέγχου ( $e, \tilde{u}$ ).

Μέσω της διαδικασίας υπολογισμού της (4.13) βρίσκουμε,

$$P(s) = \begin{bmatrix} W_e & W_e G & -W_e G \\ 0 & 0 & -W_u \\ \hline I & G & -G \end{bmatrix}$$

ενώ η (4.5) είναι,

$$P(s) = \begin{bmatrix} -0,2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 20 & -20 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 30 & -30 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -10 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος προκύπτει η  $T_{zw}(s)$ :

$$\begin{bmatrix} e \\ \tilde{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_e(I+GK)^{-1} & W_e(I+GK)^{-1}G \\ -W_uK(I+GK)^{-1} & -W_uK(I+GK)^{-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix} = T_{zw}(s) \begin{bmatrix} d \\ d_i \end{bmatrix}$$

Η εντολή,

```
[K, CL, GAM, info] = hinfsyn(P, Nmeas, Ncon, 'TOLGAM', 0.0001)
```

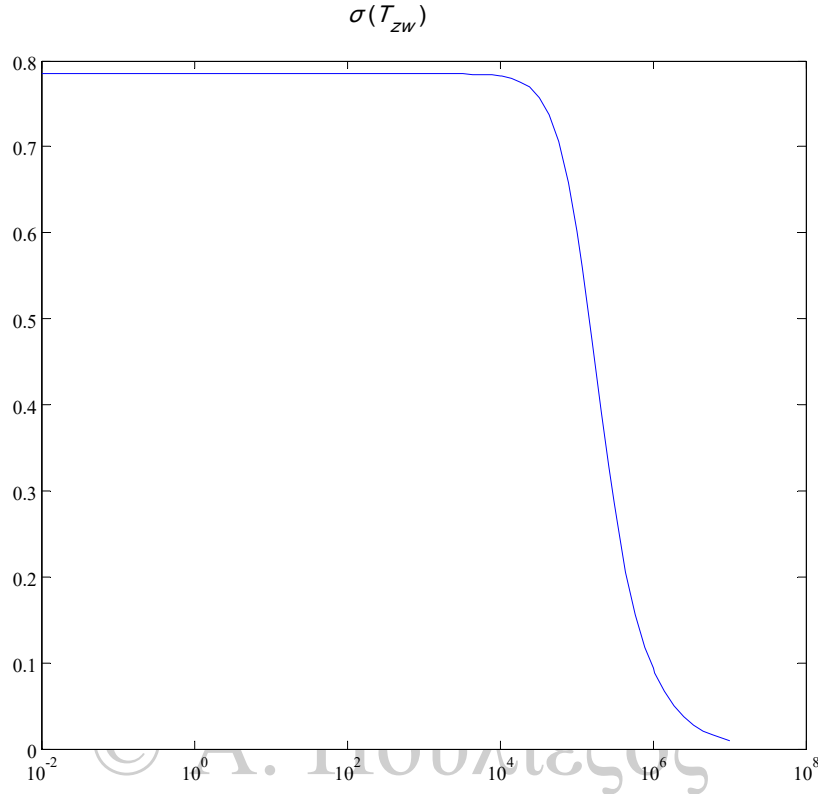
μας δίνει έναν υποβέλτιστο ελεγκτή:

$$K(s) = \frac{12,82(s/10+1)(s/7,27+1)(s/1,4+1)}{(s+32449447,67+1)(s/22,19+1)(s/1,4+1)(s/0,2+1)}$$

με  $\gamma=0,7849$ . Στο Σχ. 4.6 βλέπουμε το γράφημα της μέγιστης ιδιόμορφης τιμής του



$T_{zw}$ , την οποία ελαχιστοποιεί ο ελεγκτής. Η τιμή αυτή είναι σταθερά στο 0,785 για μεγάλο εύρος συχνοτήτων, γεγονός αναμενόμενο αφού ο ελεγκτής  $\mathcal{H}_\infty$  είναι ολοπερατός (all-pass).



Σχήμα 4.6 Μέγιστη ιδιόμορφη τιμή της  $T_{zw}$  του Παρ. 4.1

Έχει πετύχει όμως ο ελεγκτής αυτός τον στόχο για το αρχικό σύστημα; Ας ξαναθυμηθούμε τις εξισώσεις που διέπουν τον στόχο αυτό, δηλαδή την απόρριψη διαταραχών από την Ενότητα 3.2:

$$e = (I+GK)^{-1} [I+GK(I-P)]r_w - (I+GK)^{-1}d_{wo} - (I+GK)^{-1}Gd_{wi} - (I+GK)^{-1}GKn \quad (3.1)$$

ενώ,

$$u = (I+KG)^{-1}KPr_w - (I+KG)^{-1}Kd_{wo} - (I+KG)^{-1}KGd_{wi} - (I+KG)^{-1}Kn_w \quad (4.11)$$

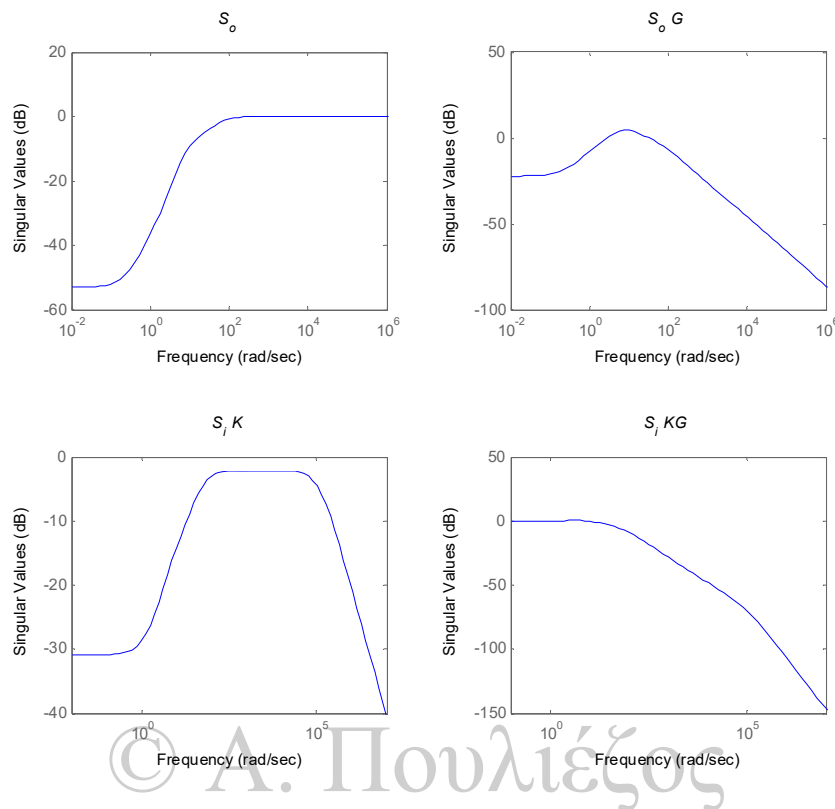
Ας απομονώσουμε τους όρους των διαταραχών και ας ξαναγράψουμε τις (3.1), (4.11) με όρους του συγκεκριμένου παραδείγματος. Έτσι έχουμε:

$$e = (I+GK)^{-1}d + (I+GK)^{-1}Gd_i$$

$$u = (I+KG)^{-1}Kd - (I+KG)^{-1}KGd_i$$

Οι εξισώσεις αυτές μας λένε ότι για να απορριφθούν οι διαταραχές πρέπει το μέγεθος των  $(I+GK)^{-1}$ ,  $(I+GK)^{-1}G$ ,  $(I+KG)^{-1}K$ ,  $(I+KG)^{-1}KG$  να είναι μικρό στις συχνότητες που παρουσιάζονται οι διαταραχές (χαμηλές). Για να δούμε αν ισχύει αυτό.

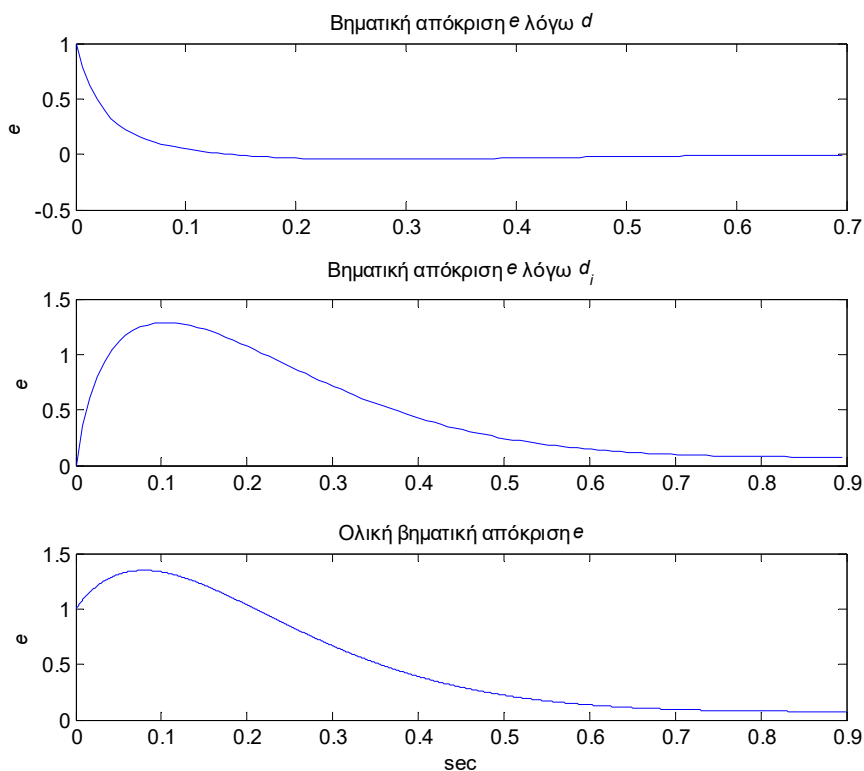
Στο Σχ. 4.7 φαίνονται οι ιδιόμορφες τιμές των συναρτήσεων αυτών (θυμίζω  $S_o=(I+GK)^{-1}$ ,  $S_i=(I+KG)^{-1}$ ).



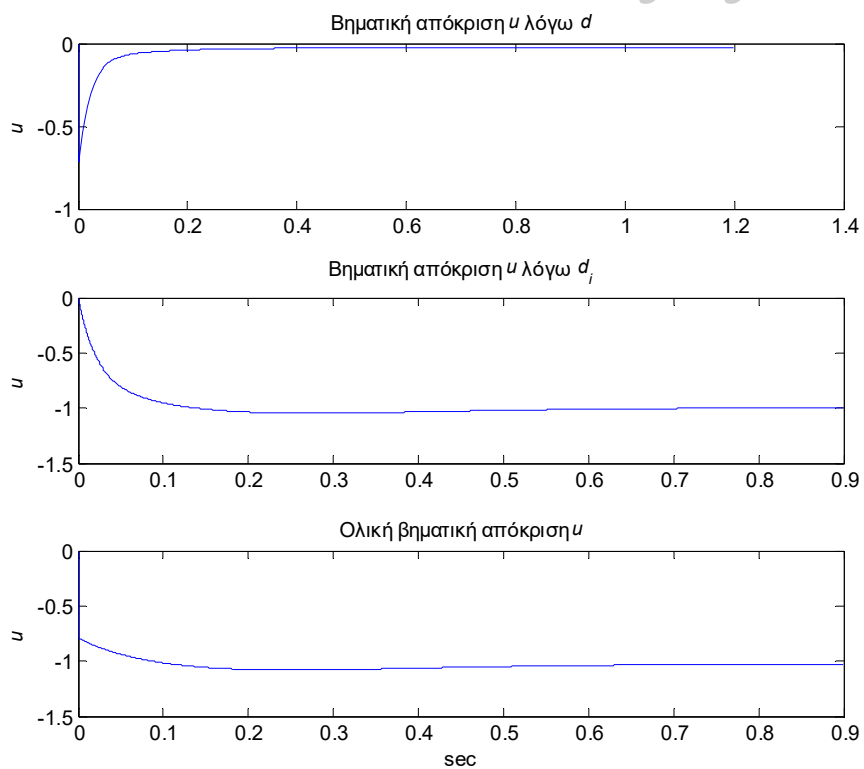
Σχήμα 4.7 Ιδιόμορφες τιμές κρίσιμων συναρτήσεων του Παρ. 4.1

Απ' ότι φαίνεται ο ελεγκτής τα καταφέρνει αρκετά καλά εκτός ίσως από την περίπτωση του  $S_i KG$  όπου η τιμή είναι κάπως υψηλή. Οι προβλέψεις αυτές επαληθεύονται και από τις αντίστοιχες βηματικές αποκρίσεις που φαίνονται στα Σχ. 4.8, 4.9: οι διαταραχές δεν επηρεάζουν το  $e$  αλλά η  $d_i$  εμφανίζεται στο  $\tilde{u}$  - μάλιστα είναι ίσο με αυτήν όπως προβλέπει και η ιδιόμορφη τιμή (= 0db στις χαμηλές).

Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο ελεγκτής  $\mathcal{H}_\infty$  είναι βέλτιστος για σήματα εισόδου με πεπερασμένη νόρμα  $\mathcal{L}_2$ , κάτι που δεν ισχύει για βηματικές εισόδους. Δηλαδή δοκιμάσαμε την απόδοση του ελεγκτή σε μία είσοδο για την οποία δεν ισχύει το βέλτιστο. Για να πετύχουμε τον στόχο αυτό πρέπει να διαμορφώσουμε πιο κατάλληλα τις εξόδους μέσω των συναρτήσεων βαρών  $W_e, W_u$ .



Σχήμα 4.8 Βηματικές αποκρίσεις του  $e$  του Παρ. 4.1



Σχήμα 4.9 Βηματικές αποκρίσεις του  $\tilde{u}$  του Παρ. 4.1

#### 4.2.5 Ερμηνεία της μέγιστης ιδιόμορφης τιμής

Όπως προείπαμε η επιλογή των βαρών που μορφοποιούν τα σήματα εισόδου και εξόδου στο πεδίο της συχνότητας, είναι η μοναδική σχεδιαστική παράμετρος στην μεθοδολογία εύρεσης ελεγκτών χρησιμοποιώντας ελάχιστες νόρμες. Θα δούμε λοιπόν κάποιες απλές κατευθυντήριες γραμμές που θα βοηθήσουν στην αρχική επιλογή των συναρτήσεων αυτών. Αν τα αποτελέσματα της σχεδίασης δεν κρίνονται ικανοποιητικά, τότε τα αρχικά βάρη μπορούν να τροποποιούνται σταδιακά μέχρι την επίτευξη ικανοποιητικής σχεδίασης, αν αυτό βέβαια είναι εφικτό.

Ας θεωρήσουμε το βασικό σύστημα,



όπου  $G(s)$  είναι ο πίνακας συνάρτησης μεταφοράς ενός πολυμεταβλητού ευσταθούς συστήματος. Έστω,

$$\beta = \|G\|_{\infty} = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}[G(j\omega)] \quad (>0)$$

Τότε ξεκινώντας από μηδενικές αρχικές συνθήκες το θεώρημα Parseval δίνει,

$$\frac{\|\tilde{y}\|_2}{\|\tilde{r}\|_2} = \frac{\left[ \int_0^{\infty} \tilde{y}^T(t) \tilde{y}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ \int_0^{\infty} \tilde{r}^T(t) \tilde{r}(t) dt \right]^{\frac{1}{2}}} \leq \beta$$

Επιπλέον υπάρχουν συγκεκριμένες εισοδοί  $\tilde{r}$  οι οποίες έχουν σαν αποτέλεσμα ο λόγος  $\frac{\|\tilde{y}\|_2}{\|\tilde{r}\|_2}$  να παίρνει τιμές αυθαίρετα κοντά στο  $\beta$ . Εξαιτίας αυτού η  $\|G\|_{\infty}$  αναφέρεται και σαν η  $\mathcal{L}_2$  απολαβή (ή RMS) του συστήματος.

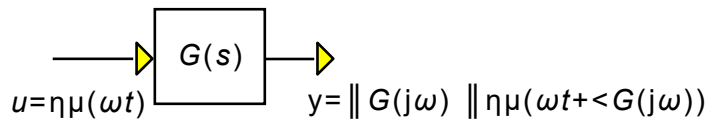
Μία άλλη ερμηνεία της  $\|G\|_{\infty}$  είναι επίσης δυνατή αν η είσοδος  $\tilde{r}$  είναι αρμονική. Έστω,

$$\tilde{r}(t) = \begin{bmatrix} a_1 \eta \mu(\bar{\omega} t + \varphi_1) \\ \dots \\ a_{n_r} \eta \mu(\bar{\omega} t + \varphi_{n_r}) \end{bmatrix}$$

με  $\|a\|_2 \leq 1$ , τότε η έξοδος στη σταθερή κατάσταση είναι,

$$\tilde{y}_{ss}(t) = \begin{bmatrix} b_1 \eta\mu(\bar{\omega}t + \psi_1) \\ \dots \\ b_{n_y} \eta\mu(\bar{\omega}t + \psi_{n_y}) \end{bmatrix}$$

όπου  $\|b\|_2 \leq \beta$ , και επιπλέον το  $\beta$  είναι ο μικρότερος αριθμός για τον οποίο ισχύει η ανισότητα αυτή.



Σχήμα 4.10

Έστω,

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \eta\mu(\omega t + \varphi_1) \\ u_2 \eta\mu(\omega t + \varphi_2) \\ \vdots \\ u_q \eta\mu(\omega t + \varphi_q) \end{bmatrix}; \hat{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_q \end{bmatrix}$$

Τότε η απόκριση σταθεράς κατάστασης μπορεί να γραφεί.

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \eta\mu(\omega t + \theta_1) \\ y_2 \eta\mu(\omega t + \theta_2) \\ \vdots \\ y_p \eta\mu(\omega t + \theta_p) \end{bmatrix}; \hat{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}$$

Μ' αυτά τα δεδομένα,

$$\bar{\sigma}(G) = \|G\|_\infty = \sup_{\varphi_i, \omega, \hat{u}} \frac{\|\hat{y}\|}{\|\hat{u}\|}$$

Τώρα, η  $G_{m \times n}(s)$  μπορεί να αποσυντεθεί ως,

$$G(j\omega) = U(j\omega)\Sigma V^*(j\omega)$$

όπου οι  $U_{m \times m}$  and  $V_{n \times n}$  είναι ορθομοναδιαίοι πίνακες ( $U^*U=I$ ),

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & & & \\ & \sigma_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \sigma_p & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

όπου  $p = \min\{m, n\}$ , και τα  $\sigma_i$  είναι οι ιδιόμορφες τιμές του  $G$  καταταγμένες κατ' αύξουσα σειρά ( $\sigma_1 > \sigma_2 > \dots > \sigma_p$ ). Στη μορφή αυτή, οι στήλες του  $V$  καλούνται **κύριες κατευθύνσεις εισόδου** (*principal input directions*), οι στήλες του  $U$  **κύριες κατευθύνσεις εξόδου** (*principal output directions*) και τα  $\sigma_i$  **κύριες απολαβές** (*principal gains*).

Το ακόλουθο ισχύει:

$$Gv_i = \sigma_i u_i$$

Ειδικότερα αν οι  $U$  και  $V$  εκφραστούν σε πολική μορφή,

$$U_{ki} = u_{ki} e^{j\theta_{ki}}$$

$$V_{li} = v_{li} e^{j\phi_{li}}$$

τότε αν η είσοδος στο σύστημα είναι,

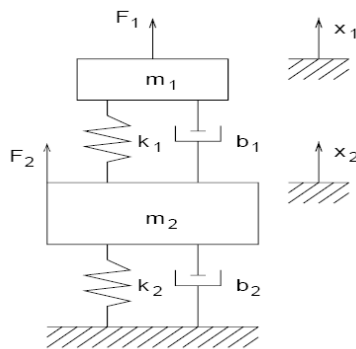
$$r(t) = v_{li} \cos(\omega t + \phi_{li})$$

η έξοδος του είναι,

$$y(t) = \sigma_i u_{ki} \cos(\omega t + \theta_{ki})$$

Αυτό δείχνει γιατί η ιδιόμορφη τιμή είναι η επέκταση της έννοιας της απολαβής σε πολυμεταβλητά συστήματα.

**Παράδειγμα 4.1:** Θεωρήστε το σύστημα μάζας//ελατηρίου//αποσβεστήρα του Σχ. 4.11.



Σχήμα 4.11

Το δυναμικό αυτό σύστημα περιγράφεται από τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m_1} & \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} \\ \frac{k_1}{m_2} & -\frac{k_1+k_2}{m_2} & \frac{b_1}{m_2} & -\frac{b_1+b_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

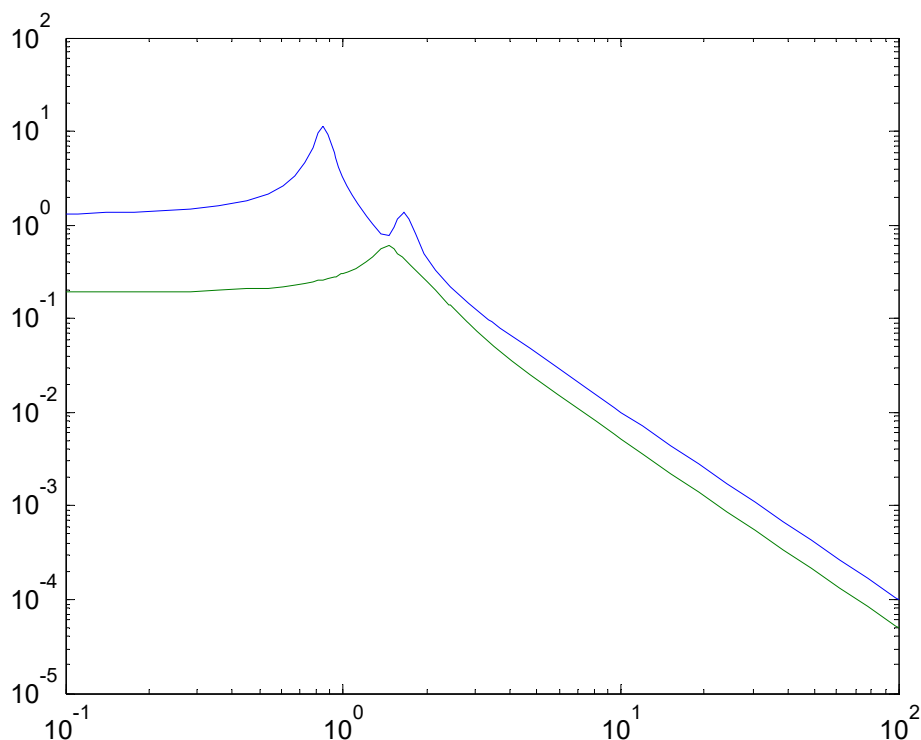
$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = 0$$

όπου  $k_1=1$ ,  $k_2=4$ ,  $b_1=0.2$ ,  $b_2=0.1$ ,  $m_1=1$ ,  $m_2=2$  σε κατάλληλες μονάδες.

Το γράφημα των ιδιόμορφων τιμών της συνάρτησης μεταφοράς ,

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

φαίνεται στο Σχ. 4.12.



Σχήμα 4.12

Από το γράφημα φαίνεται ότι  $\|G(s)\|_{\infty} = \|G(j\omega)\|_{\infty} = 11.47$  για  $\omega = 0.8483$ . Αυτό σημαίνει ότι αν το σύστημα διεγερθεί με την είσοδο,

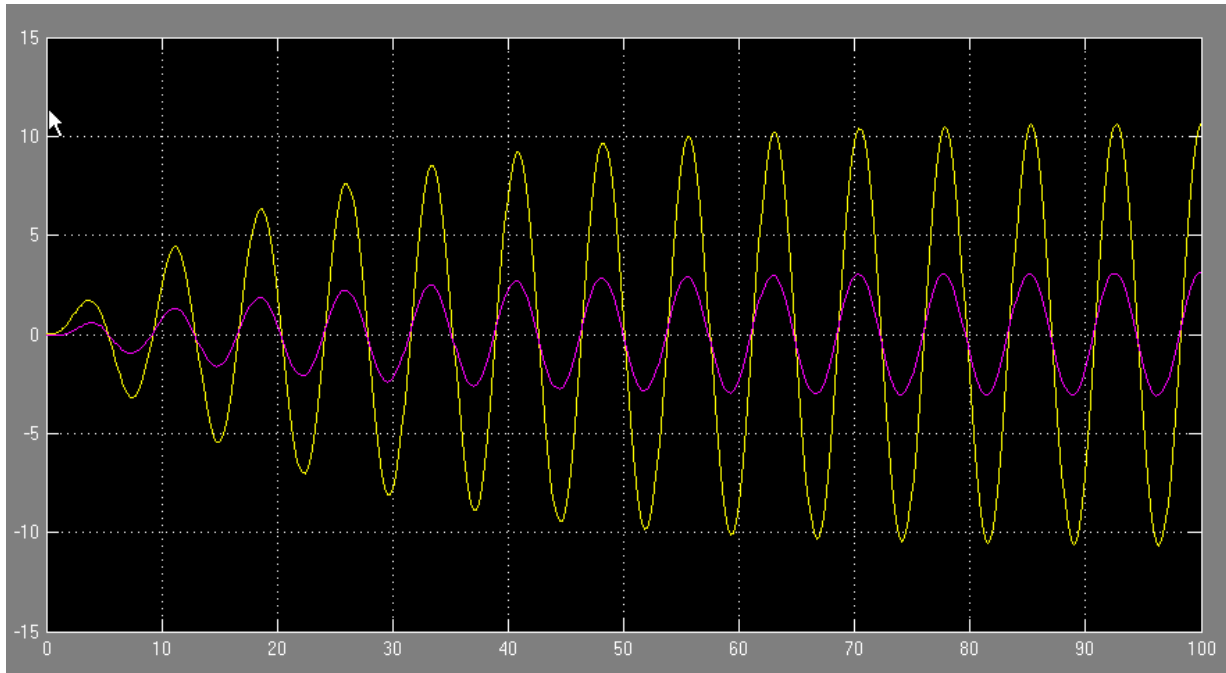
$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9614\eta\mu(0.834t) \\ 0.2753\eta\mu(0.834t - 0.12) \end{bmatrix}$$

η έξοδος του θα είναι αποτέλεσμα ενίσχυσης κατά 11.47 φορές. Ειδικότερα,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 11.47 \times \begin{bmatrix} 0.9614\eta\mu(0.834t - 1.5483) \\ 0.2753\eta\mu(0.834t - 1.4283) \end{bmatrix}$$

Η απόκριση αυτή φαίνεται στο Σχ. 4.13.



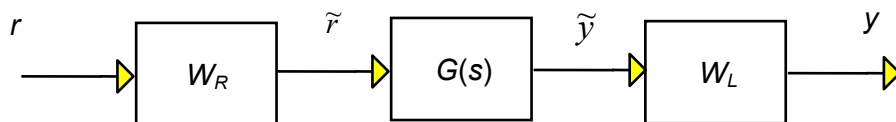


Σχήμα 4.13

Δηλαδή η ιδιόμορφη τιμή είναι ένα μέτρο του «μεγέθους» του πίνακα  $G(s)$ .

#### 4.2.6 Επιλογή συναρτήσεων βαρών

Σε πολυμεταβλητά συστήματα τα βάρη είναι συνήθως διαγώνιοι πίνακες όπου τα διαγώνια στοιχεία επιλέγονται με βάση τα προηγούμενα. Έτσι, ας θεωρήσουμε το σύστημα,



όπου,

$$W_R = \begin{bmatrix} R_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{n_r} \end{bmatrix}, W_L = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{n_y} \end{bmatrix}$$

είναι ευσταθείς πίνακες μεταφοράς. Τότε,

$$y = W_L \tilde{y} = W_L G \tilde{r} = W_L G W_R r$$

Επομένως φραγμός στη ποσότητα  $\|W_L G W_R\|_\infty$  θα έχει σαν αποτέλεσμα φραγμό στην

σταθερή κατάσταση των  $\tilde{r}$  και  $\tilde{y}$ . Έτσι, το

$$\tilde{y}_{ss}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \eta\mu(\bar{\omega}t + \psi_1) \\ \dots \\ \tilde{y}_{n_y} \eta\mu(\bar{\omega}t + \psi_{n_y}) \end{bmatrix}$$

ικανοποιεί την,

$$\sum_{i=1}^{n_y} |W_{L_i}(j\bar{\omega})\tilde{y}_i|^2 \leq 1$$

για κάθε ημιτονοειδή είσοδο,

$$\tilde{r}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{r}_1 \eta\mu(\bar{\omega}t + \phi_1) \\ \dots \\ \tilde{r}_{n_r} \eta\mu(\bar{\omega}t + \phi_{n_r}) \end{bmatrix}$$

που ικανοποιεί την,

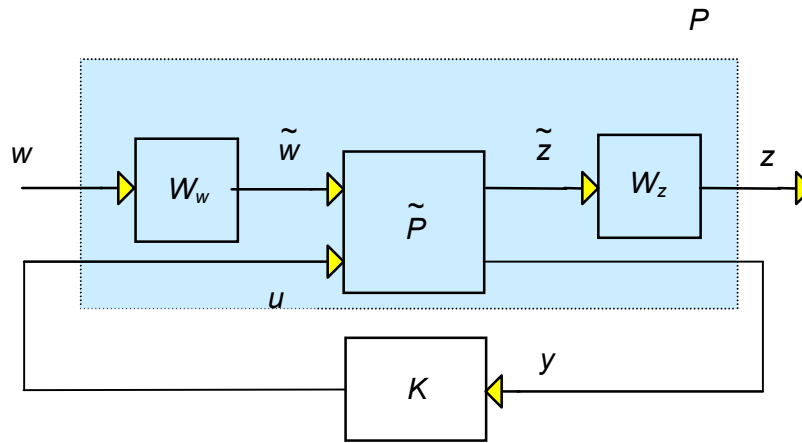
$$\sum_{i=1}^{n_r} \frac{|\tilde{r}_i|^2}{|W_{R_i}(j\bar{\omega})|^2} \leq 1$$

αν και μόνον αν  $\|W_L G W_R\|_\infty \leq 1$ .

Αυτό με τη σειρά του προϋποθέτει, αρκετά προσεγγιστικά, ότι  $\|W_L G W_R\|_\infty \leq 1$  αν και μόνον αν για κάθε είσοδο  $\tilde{r}$  με  $|\tilde{r}_i| \leq |W_{R_i}(j\bar{\omega})|$  ισχύει  $|\tilde{y}_i| \leq \frac{1}{|W_{L_i}(j\bar{\omega})|}$ .

Η τελευταία αυτή σχέση μας δίνει μία προσέγγιση επιλογής βαρών: να χρησιμοποιήσουμε τον  $W_R$  για να αναπαραστήσουμε τα σχετικά μεγέθη των πιθανών εισόδων και τον  $1/W_L$  για να αναπαραστήσουμε τα επιθυμητά άνω φράγματα των εξόδων.

Για να πάρουμε μια γενική ιδέα για την επίδραση των βαρών ας ξαναδούμε το Σχ.



Σχήμα 4.14

όπου  $\tilde{P}$  είναι το πραγματικό σύστημα που θέλουμε να ελέγξουμε,  $\tilde{z}$  και  $\tilde{w}$  τα πραγματικά σήματα εισόδου και εξόδου και  $W_w(s)$ ,  $W_z(s)$  πίνακες συναρτήσεων μεταφοράς βαρών στο πεδίο της συχνότητας τέτοιες ώστε τα προκύπτοντα σήματα  $w$  και  $z$  να ικανοποιούν την προϋπόθεση που τίθεται από την μεθοδολογία  $\mathcal{H}_\infty$ , δηλαδή,

$$\|w\|_2 \leq 1, \|z\|_2 \leq 1$$

ή,

© Α. Πουλιέζος

$$\|W_w^{-1}\tilde{w}\|_2 \leq 1, \|W_z\tilde{z}\|_2 \leq 1 \tag{4.15}$$

αν οι αντίστροφοι υπάρχουν. Η (4.15) μας οδηγεί στο ότι,

Σαν γενική αρχή μπορούμε να πούμε ότι σημείο εκκίνησης για την επιλογή των βαρών είναι η εκτίμηση της επιθυμητής συμπεριφοράς για τα σήματα εξόδου (σφάλμα, έλεγχος) και της προσδοκώμενης συμπεριφοράς για τα σήματα εισόδου (σήμα αναφοράς, διαταραχές, θόρυβος).

Η (4.15) είναι ένα φράγμα στη νόρμα των εμπλεκόμενων σημάτων δηλαδή στο μέγεθος τους, επομένως αν,

$$W_z^{-1} = \text{χειρότερη επιθυμητή συμπεριφορά του } z$$

$$W_w = \text{χειρότερη προσδοκώμενη συμπεριφορά του } w$$

τότε έχουμε πετύχει το στόχο μας. Τα πράγματα μπερδεύονται όμως λίγο επειδή και οι συναρτήσεις βαρών πρέπει να ικανοποιούν την συνθήκη που επιβάλλει ο έλεγχος  $\mathcal{H}_\infty$ , δηλαδή οι συναρτήσεις βαρών πρέπει να είναι ευσταθείς συναρτήσεις ελάχιστης φάσης. Επίσης να επισημάνουμε ότι στα πολυμεταβλητά συστήματα οι πίνακες βα-

ρών είναι σχεδόν πάντα διαγώνιοι. Έτσι αφού στη γενική περίπτωση,

$$z = \begin{bmatrix} u_w \\ e_w \end{bmatrix}, \quad w = \begin{bmatrix} d_o \\ d_i \\ n \\ r \end{bmatrix}$$

(όπου  $u_w, e_w$  είναι ο έλεγχος και το σφάλμα αντίστοιχα και  $d_o, d_i, n$  και  $r$  η διαταραχή εξόδου, διαταραχή εισόδου, θόρυβος και είσοδος αναφοράς αντίστοιχα), προκύπτει ότι,

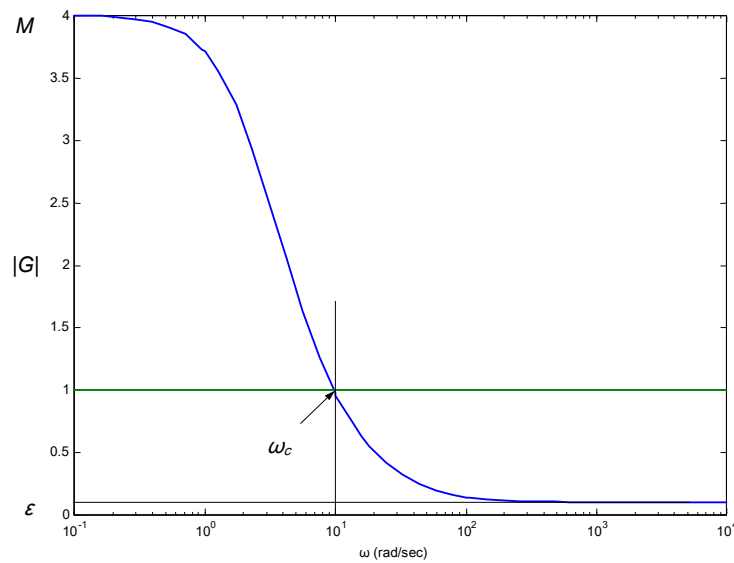
$$W_z = \begin{bmatrix} W_u & 0 \\ 0 & W_e \end{bmatrix}, \quad W_w = \begin{bmatrix} W_{do} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & W_{di} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & W_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & W_r \end{bmatrix}$$

Ας κάνουμε στη συνέχεια μια μικρή ανακεφαλαίωση σε ότι αφορά τα διαγράμματα Bode συναρτήσεων μεταφοράς, κάτι που θα βοηθήσει στην επιλογή των συναρτήσεων βαρών. Στο Σχ. 4.3 φαίνεται το διάγραμμα Bode του μέτρου της συνάρτησης,

$$G(s) = \frac{\varepsilon s + \omega_c}{s + \frac{\omega_c}{M}} \quad (4.16)$$

για  $\varepsilon=0,1, \omega_c=10, M=4$ , δηλαδή της,

$$G(s) = \frac{0,1s + 10}{s + 2,5}$$



Σχήμα 4.15 Διάγραμμα Bode συνάρτησης πρώτης τάξης

Όπως φαίνεται από το σχήμα, σ' αυτή τη μορφή διατύπωσης της  $G(s)$ , το  $M$  είναι η μέγιστη τιμή της  $|G(s)|$ ,  $\omega_c$  είναι η συχνότητα διασταύρωσης (crossover), αν αυτή ορισθεί σαν η συχνότητα όπου η  $|G(j\omega_c)|$  διασχίζει την μονάδα από τα άνω, και  $\varepsilon$  η ελάχιστη τιμή της  $|G(s)|$ . Η μορφή αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογισθούν συναρτήσεις βαρών για τα σήματα εξόδου (έλεγχος, σφάλμα).

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Στιβαρή απόδοση

#### 5.1 Εισαγωγή

Στα προηγούμενα κεφάλαια προσεγγίσαμε το πρόβλημα της εύρεσης «κατάλληλων» ελεγκτών ανατροφοδότησης έχοντας κάνει την – μη ρεαλιστική – παραδοχή ότι το υπόδειγμα της υπό έλεγχο εγκατάστασης είναι απόλυτα γνωστό και ορισμένο, υπό την έννοια ότι δεδομένης οποιασδήποτε εισόδου υπάρχει μία και μοναδική έξοδος. Επιπλέον ασχοληθήκαμε με συστήματα που θεωρήσαμε γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα και πεπερασμένης διάστασης. Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με την ανάλυση συστημάτων των οποίων η γνώση δεν είναι ακριβής: δηλαδή με **αβέβαια συστήματα**.

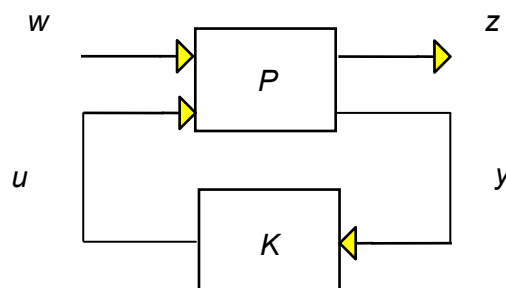
Πιο συγκεκριμένα θα προσπαθήσουμε να λύσουμε τα εξής δύο προβλήματα:

1. **Πρόβλημα στιβαρούς ευστάθειας:** για ποιο μέγεθος αβεβαιότητας το σύστημα ελεγκτή-εγκατάστασης παραμένει ευσταθές ;
2. **Πρόβλημα στιβαρούς απόδοσης:** για ποιο μέγεθος αβεβαιότητας οι αποκρίσεις του συστήματος ελεγκτή-εγκατάστασης παραμένουν αποδεκτές;

Η αβεβαιότητα είναι αποτέλεσμα είτε ελλιπούς γνώσης κατά την φάση του σχεδιασμού (π.χ. τιμή κάποιας παραμέτρου) είτε προκύπτει ηθελημένα λόγω συνειδητής επιλογής απλούστερων υποδειγμάτων για λόγους ευκολίας στην ανάλυση.

#### 5.2 Μαθηματικό υπόδειγμα για την επίλυση του προβλήματος

Στη μέχρι τώρα θεωρία έχουμε χρησιμοποιήσει το δομικό διάγραμμα δύο θυρών του Σχ. 1.8,

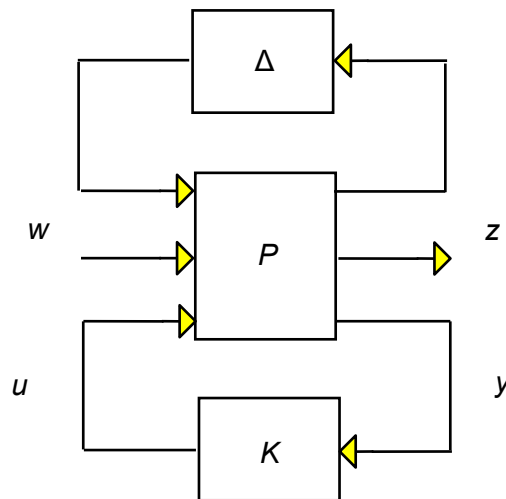


Σχήμα 1.8 Διάγραμμα δύο θυρών

και έχουμε απαντήσει στο εξής ερώτημα:

➤ Ποιοι είναι οι αποδεκτοί ελεγκτές  $K(s)$  που ελαχιστοποιούν την  $\|T_{zw}\|_{\infty}$ ;

Το ερώτημα αυτό το απαντήσαμε έχοντας θεωρήσει ότι όλες οι παραδοχές σχετικά με τις τιμές των μεταβλητών ή την γραμμικότητα των εμπλεκόμενων συστημάτων είναι αληθείς. Στο κεφάλαιο αυτό θα άρουμε αυτή την παραδοχή για να δούμε πόσο μακριά μπορούμε να φτάσουμε. Συγκεκριμένα θα χρησιμοποιηθεί το μαθηματικό υπόδειγμα που αναπαρίσταται από το Σχ. 5.16.



Σχήμα 5.16 Διάγραμμα ελέγχου υπό αβεβαιότητα

Στο σχήμα αυτό το τετράγωνο  $\Delta$  εσωκλείει κάθε αβεβαιότητα που θέλουμε να λάβουμε υπ' όψη μας στο σύστημα  $P$ . Συγκεκριμένες δομές για το κομμάτι αυτό θα δούμε στη συνέχεια, αλλά πάντως,

$$\|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \quad (5.17)$$

Να σημειωθεί εδώ ότι έχει υποθεθεί ότι αβεβαιότητα υπάρχει μόνο σε ότι αφορά στην εγκατάσταση  $P$  και όχι στον ελεγκτή  $K$ . Αυτό φαίνεται λογικό αφού ο ελεγκτής είναι αρκετά γνωστός όντας το αποτέλεσμα της σχεδίασης. Παρ' όλ' αυτά δεν αποκλείεται και το χρησιμοποιούμενο μαθηματικό υπόδειγμα του ελεγκτή να περιέχει αβεβαιότητα που να προέρχεται από παρόμοιες αιτίες με αυτές της εγκατάστασης (γραμμικοποίηση, αβεβαιότητα στις παραμέτρους κλπ). Το πρόβλημα αυτό είναι αρκετά πιο δύσκολο και πολύπλοκο.

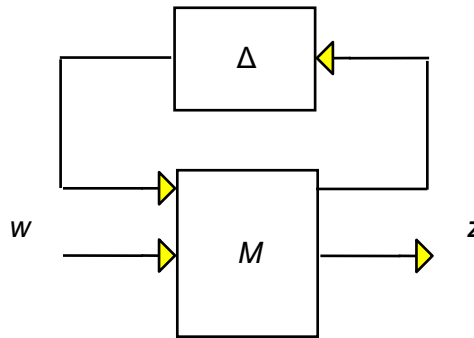
Το Σχ. 5.16 μπορεί περαιτέρω να απλοποιηθεί, χρησιμοποιώντας την,

$$M_{zw} = P_{zw} + P_{zu}K(I - P_{yu}K)^{-1}P_{yw} = F_l(P, K)$$

που είναι η ολική συνάρτηση μεταφοράς μεταξύ  $z$  και  $w$  (θυμίζουμε ότι,

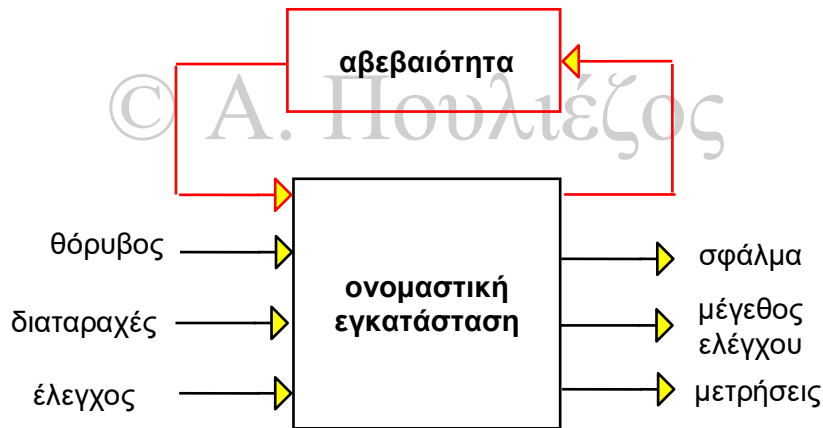
$$\begin{bmatrix} z(s) \\ y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{zw}(s) & P_{zu}(s) \\ P_{yw}(s) & P_{yu}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w(s) \\ u(s) \end{bmatrix}.$$

Έτσι το Σχ. 5.16 μετατρέπεται στο ισοδύναμο και απλούστερό του,



Σχήμα 5.17 Απλουστευμένο διάγραμμα ελέγχου υπό αβεβαιότητα

Μία «ποιοτική» απεικόνιση του Σχ. 5.17 φαίνεται στο Σχ. 5.18.



Σχήμα 5.18 Ποιοτική θεώρηση αβεβαιότητας

Το Σχ. 5.17 καλείται **ανωτέρα LFT** και είναι η σχηματική αναπαράσταση της εξίσωσης,

$$z = F_u(M, \Delta)w = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]w \tag{5.18}$$

όπου υπονοείται η δομή του πίνακα  $M$ ,

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \tag{5.19}$$

με τους υποπίνακες  $M_{ij}$  κατάλληλων διαστάσεων.



Για τη συνέχεια θα υποθέσουμε, όπως έχουμε κάνει μέχρι τώρα, ότι το δεδομένο σύστημα  $T$  είναι πεπερασμένης διάστασης, γραμμικό και χρονικά αμετάβλητο (FDLTI-Finite Dimensional, Linear Time-Invariant).

Αν και τα πρότυπα αβεβαιότητας είναι αρκετά, έτσι ώστε να καλυφθεί ένα μεγάλο φάσμα καταστάσεων που εμφανίζονται σε πραγματικά προβλήματα, εμείς θα εστιάσουμε σε δύο από αυτά. Αυτά αφ' ενός δείχνουν τον τρόπο με τον οποίο αντιμετωπίζεται η αβεβαιότητα με τα σύγχρονα εργαλεία ελέγχου, αφ' ετέρου καλύπτουν το μεγαλύτερο φάσμα από πραγματικές εφαρμογές. Τα πρότυπα αυτά είναι της αδόμητης πολλαπλασιαστικής αβεβαιότητας (αβεβαιότητα στη συνολική συμπεριφορά συναρτήσεων μεταφοράς) και της δομημένης αβεβαιότητας (αβεβαιότητα στις τιμές των παραμέτρων). Όπως θα δούμε, το πρόβλημα αυτό δεν έχει ακόμη επιλυθεί επακριβώς.

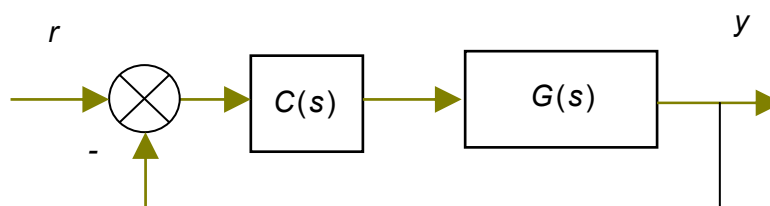
### 5.2.1 Δομημένη αβεβαιότητα

(Αλλιώς στατική ή παραμετρική αβεβαιότητα). Υποδείγματα δομημένης αβεβαιότητας προκύπτουν όταν οι παράμετροι ενός συστήματος δηλώνονται ως σύνολα τιμών αντί της συνηθισμένης μίας τιμής. Τα υποδείγματα αυτά εμφανίζονται σε συστήματα των οποίων οι παράμετροι μεταβάλλονται ανάλογα με το σημείο λειτουργίας (αεροδυναμικοί συντελεστές στον έλεγχο πτήσης, συντελεστές εξισώσεων στον έλεγχο εγκαταστάσεων ηλεκτρικής ισχύος κ.λ.π.). Η προσέγγιση αυτή είναι καλή σε χαμηλές συχνότητες, πάσχει όμως στις υψηλές όπου η αγνοημένη δυναμική των υψηλών συχνοτήτων είναι σημαντική (και όπου θα χρησιμοποιήσουμε υποδείγματα αδόμητης αβεβαιότητας).

Ας δούμε τώρα μέσω ενός παραδείγματος, πως μπορούμε να εκφράσουμε ένα σύστημα με δομημένη αβεβαιότητα σαν μία ανωτέρα LFT.

#### Παράδειγμα 5.1

Έστω το σύστημα του Σχ. 5.19,



Σχήμα 5.19 Αβέβαιη  $G$

με  $G(s) = \frac{\alpha}{s^2(1 + \beta s)}$  και  $C(s) = \frac{k + T_d s}{1 + T_0 s}$ . Οι παράμετροι  $\alpha, \beta$  είναι αβέβαιοι με ονο-

μαστικές τιμές  $\alpha_0, \beta_0$  αντίστοιχα. Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο υπόδειγμα για να αναπαραστήσουμε αυτή την αβεβαιότητα,

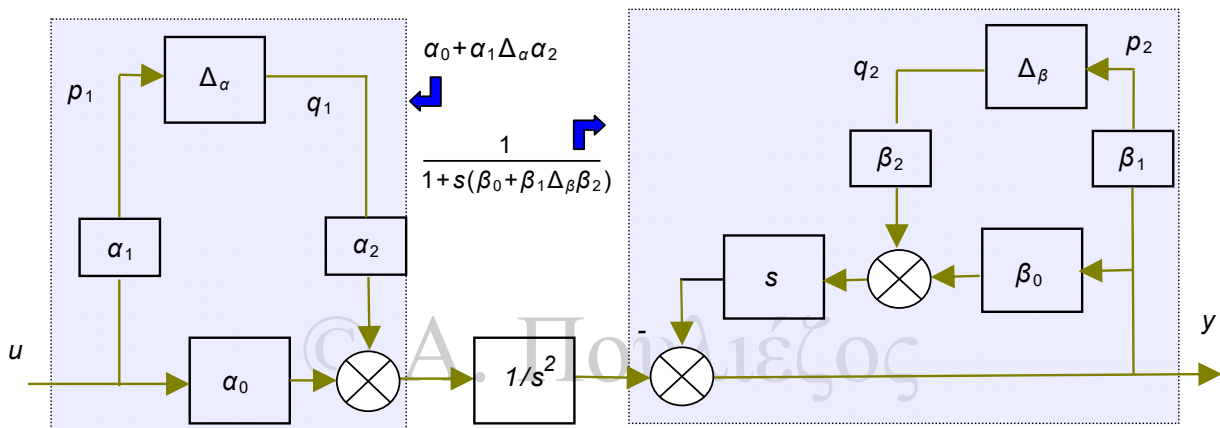
$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta_\alpha \alpha_2$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \Delta_\beta \beta_2$$

όπου  $\|\Delta_\alpha\|, \|\Delta_\beta\| < 1$  (οι σταθερές  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  δεν είναι όλες απαραίτητες σε συστήματα SISO αλλά χρησιμοποιούνται εδώ για λόγους ομοιομορφίας με τα συστήματα MIMO). Ο λόγος γι' αυτό το υπόδειγμα είναι ότι η θεωρία που έπεται απαιτεί  $\|\Delta\| < 1$ .

Θέλουμε να αναπαραστήσουμε αυτό το αβέβαιο σύστημα στη μορφή του Σχ. 5.17. Η διαδικασία έχει τρία βήματα:

**Βήμα 1.** Αναπαριστούμε την αβέβαιη  $G(s)$  σ' ένα κλασσικό δομικό διάγραμμα όπου οι αβεβαιότητες εμφανίζονται μόνες τους σε ξεχωριστά τμήματα (Σχ. 5.20):

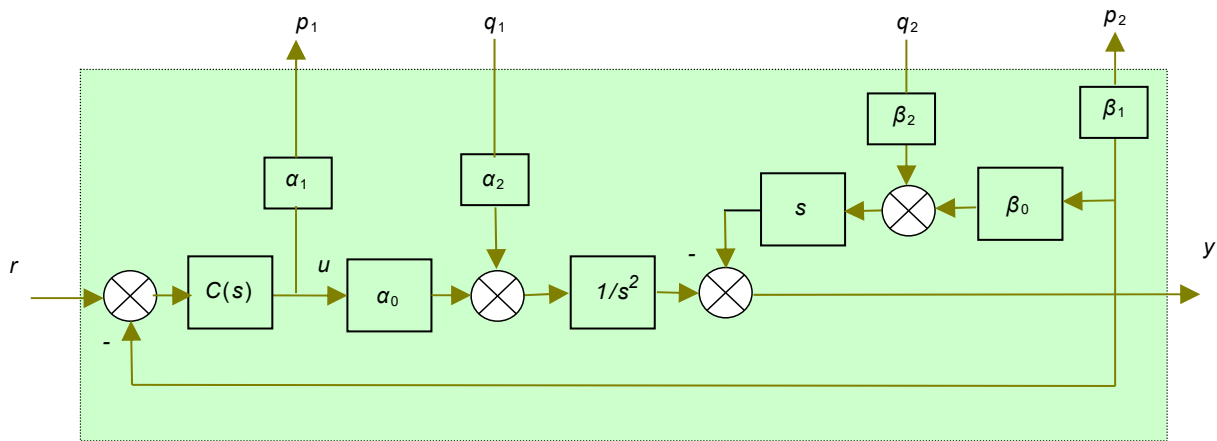


Σχήμα 5.20 Αβέβαιη  $G$

Το τέχνασμα εδώ είναι να αναπαραστήσουμε τον παρανομαστή της  $G$  σαν βρόχο ανάδρασης. Τα υπόλοιπα προκύπτουν εύκολα.

**Βήμα 2. Αποσύνδεση των  $\Delta$ :** «βαφτίζουμε» τις εισόδους και εξόδους των  $\Delta$ ,  $p_i$  και  $q_i$  αντίστοιχα.

**Βήμα 3. Υπολογισμός του  $M$ :** γράφουμε τις εξισώσεις που συνδέουν τις εισόδους του συστήματος με τις εξόδους τους, με τα  $\Delta$  όμως αποσυνδεδεμένα (Σχ. 5.21).



Σχήμα 5.21 Υπολογισμός του  $M$

Οι είσοδοι είναι τα  $q_1, q_2, r$  ενώ οι έξοδοι τα  $p_1, p_2, y$ . Για τα  $p_i$  ισχύει,:

$$p_2/\beta_1 = -s(\beta_2 q_2 + (\beta_0/\beta_1)p_2) + \frac{1}{s^2}(a_2 q_1 + a_0 C(s)(r - p_2/\beta_1))$$

$$\therefore p_2 = \frac{\alpha_2 \beta_1 \frac{1}{s^2}}{1 + s\beta_0 + \frac{1}{s^2} C(s)\alpha_0} q_1 - \frac{\beta_1 \beta_2 s}{1 + s\beta_0 + \frac{1}{s^2} C(s)\alpha_0} q_2 + \frac{\beta_1 \frac{1}{s^2} a_0 C(s)}{1 + s\beta_0 + \frac{1}{s^2} C(s)\alpha_0} r$$

$$\therefore p_2 = \frac{\alpha_2 \beta_1 \frac{1}{s^2}}{\chi(s)} q_1 - \frac{\beta_1 \beta_2 s}{\chi(s)} q_2 + \frac{\beta_1 \frac{1}{s^2} \alpha_0 C(s)}{\chi(s)} r$$

με  $\chi(s) = 1 + s\beta_0 + \frac{1}{s^2} C(s)\alpha_0$ .

Επειδή τώρα  $p_1/\alpha_1 = C(s)(r - p_2/\beta_1)$ ,

$$\therefore p_1 = -\frac{\alpha_1 \alpha_2 \frac{1}{s^2} C(s)}{\chi(s)} q_1 + \frac{\alpha_1 \beta_2 s C(s)}{\chi(s)} q_2 + \frac{\alpha_1 \chi(s) C(s) - \frac{1}{s^2} \alpha_0 \alpha_1 C^2(s)}{\chi(s)} r$$

και προφανώς  $y = p_2/\beta_1$ . Γράφοντας τα παραπάνω σε μορφή πίνακα προκύπτει,

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\chi(s)} \begin{bmatrix} -\alpha_1\alpha_2 \frac{1}{s^2} C(s) & \alpha_1\beta_2 s C(s) & \alpha_1\chi(s)C(s) - \alpha_0\alpha_1 \frac{1}{s^2} C^2(s) \\ \alpha_2\beta_1 \frac{1}{s^2} & -\beta_1\beta_2 s & \alpha_0\beta_1 \frac{1}{s^2} C(s) \\ \alpha_2 \frac{1}{s^2} & \beta_2 s & \alpha_0 \frac{1}{s^2} C(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ r \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιώντας τέλος την 5.18, παίρνουμε την ζητούμενη μορφή,

$$y = F_u(M, \Delta)r = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]r \quad (5.20)$$

με,

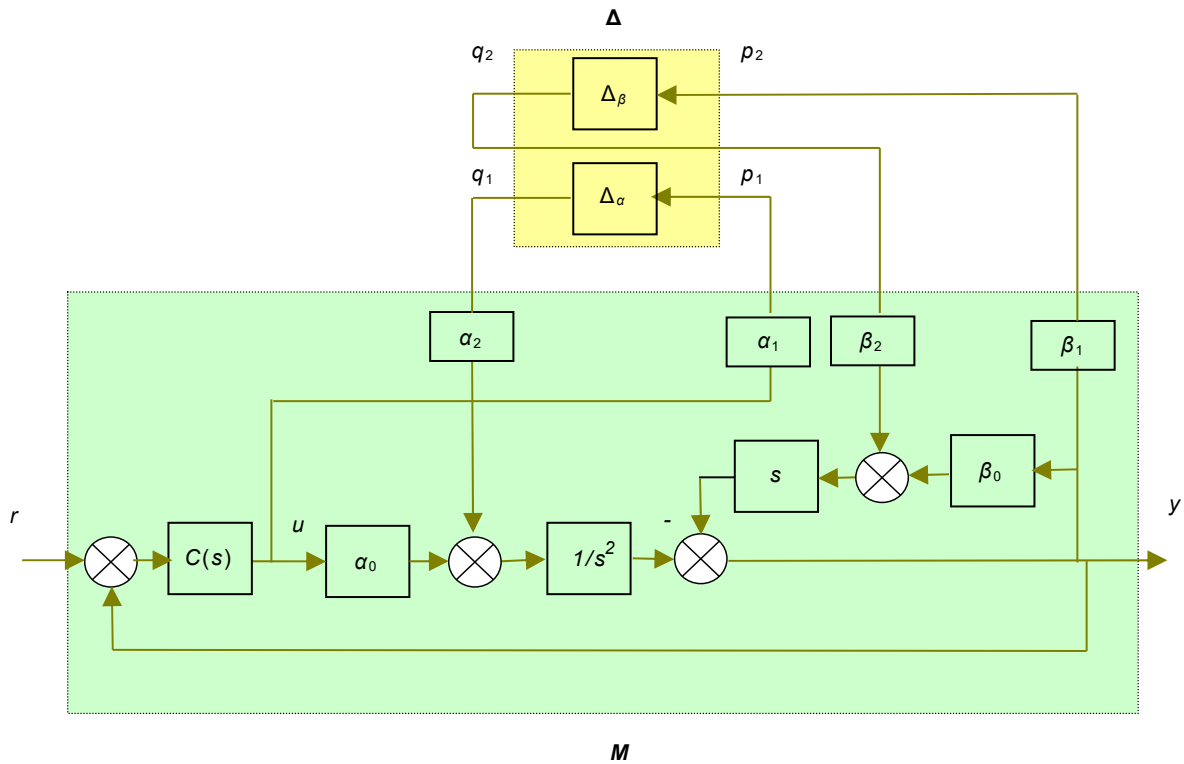
$$M = \frac{1}{\chi(s)} \begin{bmatrix} -\alpha_1\alpha_2 \frac{1}{s^2} C(s) & \alpha_1\beta_2 s C(s) & \alpha_1\chi(s)C(s) - \alpha_1 \frac{1}{s^2} \alpha_0 C^2(s) \\ \alpha_2\beta_1 \frac{1}{s^2} & \beta_1\beta_2 - s & \beta_1 \frac{1}{s^2} \alpha_0 C(s) \\ \alpha_2 \frac{1}{s^2} & \beta_2 s & \frac{1}{s^2} \alpha_0 C(s) \end{bmatrix}$$

και,

© Α. Πουλιέζος

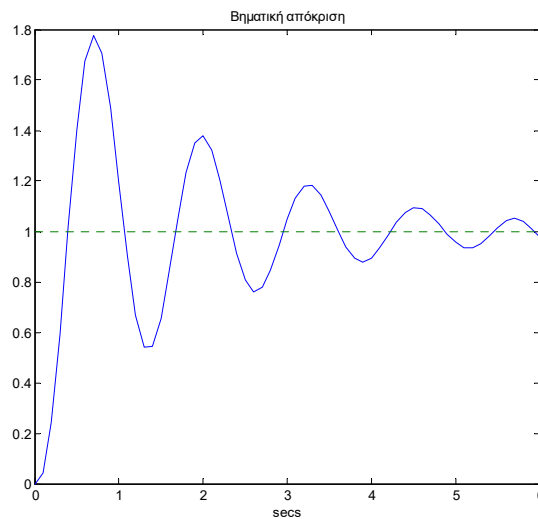
$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_\alpha & \\ & \Delta_\beta \end{bmatrix}$$

Η τελική δομή φαίνεται στο Σχ. 5.22:



Σχήμα 5.22 Δομή M-Δ για το Παρ. 5.1

Να τονίσουμε ότι η (5.20) είναι πλήρης απεικόνιση της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος για κάθε τιμή των  $\Delta$ ,  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ . Για παράδειγμα το Σχ. 5.23 δείχνει την βηματική απόκριση του συστήματος του Σχ. 5.19 για  $k=1$ ,  $T_d=\sqrt{2}$ ,  $T_0=0,1$ ,  $\Delta = \text{diag}(1, 1)$ ,  $\alpha_0=2,75$ ,  $\alpha_1=\alpha_2=\sqrt{2,25}$ ,  $\beta_0=0,1$ ,  $\beta_1=\beta_2=\sqrt{0,1}$ .

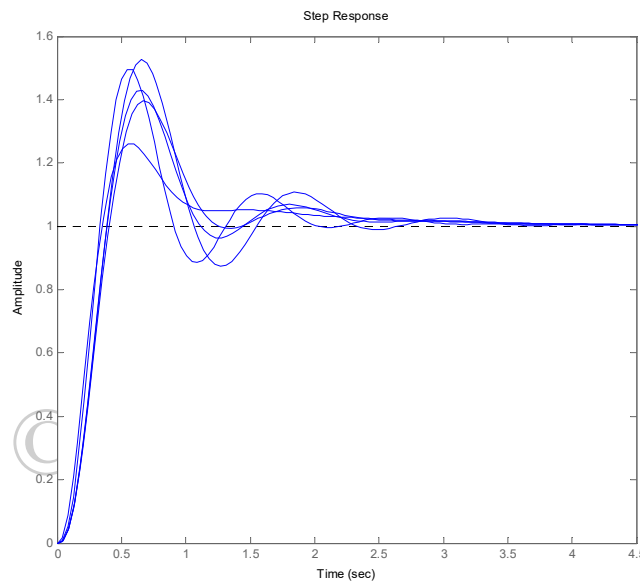


Σχήμα 5.23 Βηματική απόκριση αβέβαιου συστήματος

Οι εκδόσεις του MATLAB (v7 και νεότερες) παρέχουν πλέον σειρά εργαλείων για την ανάλυση αβέβαιων συστημάτων. Έτσι οι ακόλουθες εντολές δημιουργούν 5 τυ-

χαιά δείγματα του αβέβαιου συστήματος του Σχ. 5.22, με το αντίστοιχο διάγραμμα:

```
% δημιουργία αβέβαιης παραμέτρου ονομαστικής τιμής a0 και εύρος sqrt(a1*a2)
a03 = ureal('a0', a0, 'plusminus', a1*a2)
% δημιουργία αβέβαιης παραμέτρου ονομαστικής τιμής b0 και εύρος sqrt(b1*b2)
b03 = ureal('b0', b0, 'plusminus', b1*b2)
% δημιουργία αβέβαιης συνάρτησης μεταφοράς G
G3 = tf([a03], [b03 1 0 0])
% ελεγκτής
C = tf([sqrt(2) 1], [0.1 1])
% σύνδεση εν σειρά ελεγκτή-εγκατάστασης
GC3 = series(C, G3)
GCF3 = feedback(GC3, 1)
plot(usample(GCF3, 5))
```



Σχήμα 5.24 Αποκρίσεις του συστήματος του Σχ. 5.22 για διάφορα  $\alpha_i, \beta_i$

## 5.2.2 Αδόμητη αβεβαιότητα

Τα πρότυπα αδόμητης αβεβαιότητας θέτουν φράγματα στα μεγέθη των πιθανών αβεβαιοτήτων χωρίς όμως να εντοπίζονται σε συγκεκριμένα στοιχεία του συστήματος. Τα προκύπτοντα πρότυπα είναι σχετικά απλά και καταλήγουν σ' έναν **πλήρη** μιγαδικό πίνακα αβεβαιότητας  $\Delta$ , όπου σε κάθε συχνότητα επιτρέπεται οποιοδήποτε  $\Delta(j\omega)$  που ικανοποιεί την  $\bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) \leq 1$ .

Υπάρχουν δύο βασικά πρότυπα της ομάδας αυτής: **προσθετικά** και **πολλαπλασιαστικά**.

Το προσθετικό πρότυπο δίνεται από τον τύπο:

$$G(s) = G_0(s) + \Delta_a(s) \quad (5.21)$$

όπου  $G(s)$  είναι η πραγματική συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης,  $G_0(s)$  η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς και  $\Delta_a(s)$  η προσθετική αβεβαιότητα. Ο μόνος πε-

ριορισμός στην  $\Delta_a(s)$  είναι στο μέγεθος της, μέσω π.χ.

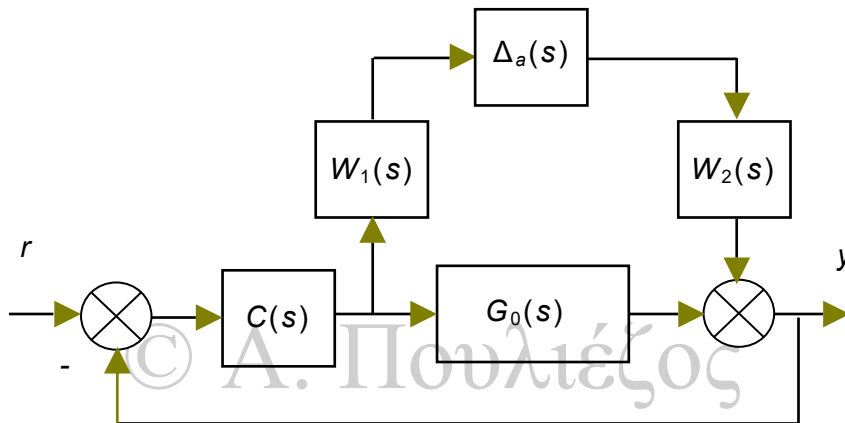
$$\|\Delta_a(s)\|_\infty < k$$

ή,

$$\|W_1(s)\Delta_a(s)W_2(s)\|_\infty < 1$$

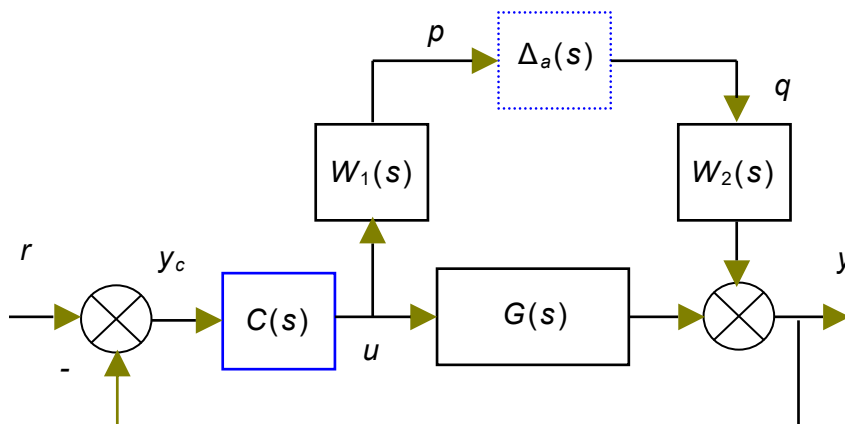
όπου οι  $W_i(s)$  είναι κατάλληλες συναρτήσεις μεταφοράς βαρών (ελάχιστης φάσης: χωρίς πόλους ή μηδενικά στο δεξιό ημιεπίπεδο). Η χρήση δύο βαρών εξασφαλίζει ότι το φράγμα της ανισότητας θα είναι πάντα κανονικοποιημένο στη μονάδα.

Η προσθετική αβεβαιότητα αναπαρίσταται στο κλασικό δομικό διάγραμμα ως (Σχ. 5.25),



Σχήμα 5.25 (Κλαστικό) δομικό διάγραμμα προσθετικής αβεβαιότητας

Για να αναπαραστήσουμε την αβεβαιότητα αυτή στο διάγραμμα του Σχ. 5.17, εργαζόμαστε όπως και στην περίπτωση της δομημένης αβεβαιότητας. Απομονώνοντας λοιπόν το κομμάτι της αβεβαιότητας παίρνουμε το Σχ. 5.26.



Σχήμα 5.26 (Κλαστικό) δομικό διάγραμμα προσθετικής αβεβαιότητας

Οι εξισώσεις εισόδων-εξόδων που διέπουν το διάγραμμα αυτό είναι:

$$y = W_2 q + Gu = W_2 q + Gu = W_2 q + G[C(r-y)]$$

$$\Rightarrow y = (I + GC)^{-1} W_2 q + (I + GC)^{-1} GC r$$

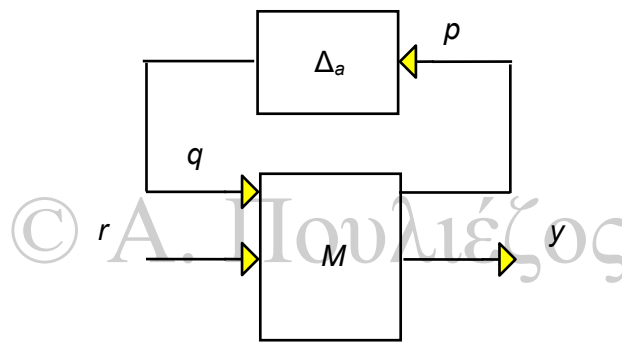
$$p = W_1 u = W_1 [C(r-y)] = W_1 Cr - W_1 C[(I + GC)^{-1} W_2 q + (I + GC)^{-1} GC r]$$

$$\Rightarrow p = -W_1 C(I + GC)^{-1} W_2 q + W_1 C[I - (I + GC)^{-1} GC] r$$

και σε μορφή πίνακα,

$$\begin{bmatrix} p \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_1 C(I + GC)^{-1} W_2 & W_1 C[I - (I + GC)^{-1} GC] \\ (I + GC)^{-1} W_2 & (I + GC)^{-1} GC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} q \\ r \end{bmatrix}$$

Τέλος το Σχ. 5.26 μετατρέπεται στο ισοδύναμο του 5.27.



Σχήμα 5.27 Δομικό διάγραμμα δύο θυρών για σύστημα με προσθετική αβεβαιότητα

Το πολλαπλασιαστικό πρότυπο δίνεται από τον τύπο:

$$G(s) = [I + \Delta_o(s)] G_0(s) \quad (5.22)$$

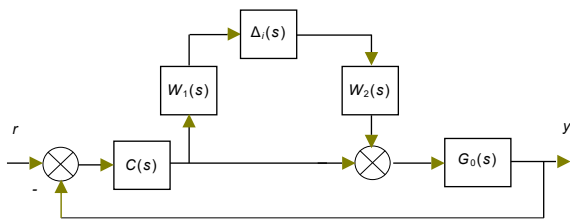
ή

$$G(s) = G_0(s) [I + \Delta_i(s)] \quad (5.23)$$

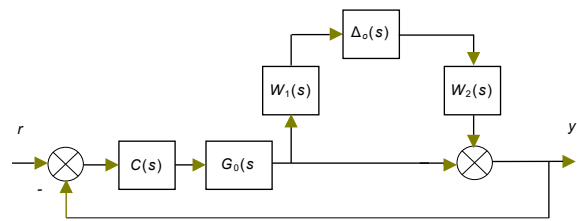
όπου  $G(s)$  είναι η πραγματική συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης,  $G_0(s)$  η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς και  $\Delta_i(s)$ ,  $\Delta_o(s)$  η πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εισόδου/εξόδου αντίστοιχα.

Τα αντίστοιχα διαγράμματα είναι τα ακόλουθα:





Σχήμα 5.28α Πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εισόδου



Σχήμα 5.28β Πολλαπλασιαστική αβεβαιότητα εξόδου

Η προσέγγιση αυτή είναι πολύ χρήσιμη στις περιπτώσεις όπου η αβεβαιότητα είναι συνάρτηση της συχνότητας (δυναμική αβεβαιότητα) καθώς τα εμπλεκόμενα όρια μεταβάλλονται με την συχνότητα.

Σε γενικές γραμμές τα πολλαπλασιαστικά πρότυπα είναι πιο ρεαλιστικά καθώς δηλώνουν σχετικές αποκλίσεις και όχι απόλυτες. Για παράδειγμα  $\|\Delta_i(s)\|_\infty < 0,1$  υπονοεί ότι το μέγεθος της απόκλισης θα είναι το πολύ 10% του μεγέθους της  $G_0$ , αφού,

$$\|G - G_0\|_\infty = \|G_0 - \Delta_i\|_\infty \leq \|G_0\|_\infty \|\Delta_i\|_\infty \leq 0,1 \|G_0\|_\infty$$

ενώ  $\|\Delta_o(s)\|_\infty < 0,1$  υπονοεί

$$\|G - G_0\|_\infty = \|\Delta_o\|_\infty \leq 0,1$$

Ο πίνακας  $\Delta$  μπορεί να είναι διαγώνιος όταν υπάρχει αβεβαιότητα σε καθέναν από τους διαύλους εισόδου ή εξόδου (να τονίσουμε ότι η αβεβαιότητα αυτή είναι πάντα υπαρκτή). Στη περίπτωση αυτή,

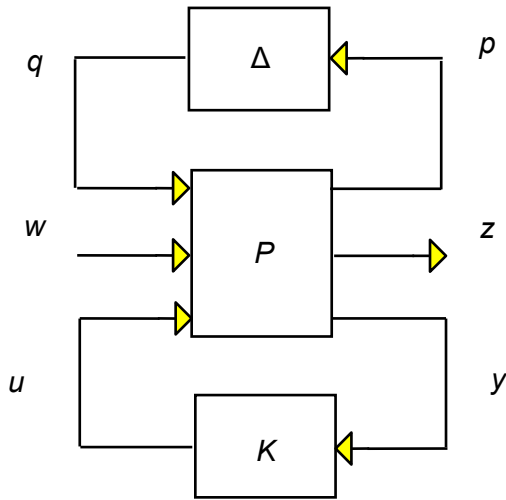
$$\Delta(s) = \text{διαγ}\{\delta_i(s)\} \text{ με } |\delta_i(j\omega)| \leq 1 \text{ για κάθε } \omega, i$$

### 5.3 Ανάλυση

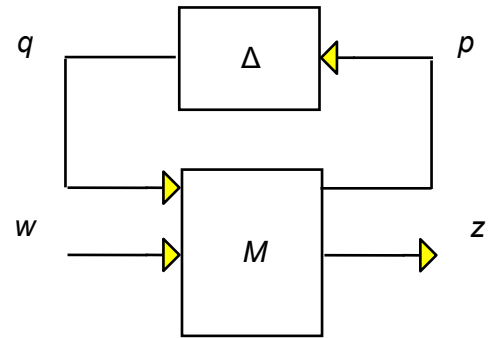
#### 5.3.1 Βασικά θεωρήματα

Έχοντας συγκεκριμενοποιήσει τα μαθηματικά υποδείγματα που θα χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση της συμπεριφοράς των αβέβαιων συστημάτων, ας δούμε πόσο μακριά μπορούμε να πάμε.

Για την συνέχεια θα αναφερθούμε στα συστήματα που απεικονίζονται στα Σχ. 5.16 και 5.17 και ξαναπαραθέτουμε εδώ:



Σχήμα 5.16



Σχήμα 5.17

Υποθέτουμε ότι,

1. Ο ελεγκτής  $K$  είναι ονομαστικά σταθεροποιητικός, δηλαδή σταθεροποιεί την εγκατάσταση  $P$  με την ονομαστική της δομή.
2. Το σύνολο αβεβαιότητας  $\Delta \in B_\Delta$  απαρτίζεται από ευσταθείς πίνακες και ορίζεται ως,

$$B_\Delta = \{ \Delta \in D : \|\Delta\|_\infty \leq 1 \} \tag{5.24}$$

(είναι δηλαδή η **κλειστή μοναδιαία μπάλλα**), ενώ η δομή είναι της μορφής,

$$D = \left\{ \text{diag}[\phi_1 I_{k_1}, \dots, \phi_{S_r} I_{k_{S_r}}, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{S_c} I_{r_{S_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \phi_i \in \mathbb{R}, \delta_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l} \right\} \tag{5.25}$$

Στη μορφή αυτή η αβεβαιότητα απαρτίζεται από τρία διακριτά τμήματα,

1.  $S_r$  επαναλαμβανόμενα πραγματικά βαθμωτά τμήματα (που αντιστοιχούν σε αβεβαιότητα σε πραγματικές παραμέτρους της εγκατάστασης)
2.  $S_c$  επαναλαμβανόμενα μιγαδικά βαθμωτά τμήματα (που αντιστοιχούν σε δυναμικές αβεβαιότητες) και,
3.  $F$  πλήρη τμήματα (που αντιστοιχούν επίσης σε δυναμικές αβεβαιότητες) που ικανοποιούν την σχέση,

$$\sum_{i=1}^{S_r} k_i + \sum_{j=1}^{S_c} r_j + \sum_{l=1}^F m_l = n$$

(δηλαδή το  $i$ -στό επαναλαμβανόμενο πραγματικό τμήμα είναι  $k_i \times k_i$ , το  $j$ -στό επαναλαμβανόμενο μιγαδικό τμήμα είναι  $r_j \times r_j$  και το  $l$ -στό πλήρες τμήμα είναι  $m_l \times m_l$ ).

Το πρόβλημα της ανάλυσης ορίζεται ως:

Δοθέντος του  $K$ , να απαντηθεί αν το σύστημα κλειστού βρόχου είναι εσωτερικά ευσταθές για όλες τις αποδεκτές  $\Delta$  και  $\|T_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma$  για κάποιο προδιαγεγραμμένο  $\gamma$ .

**Ορισμός 5.3** Το αβέβαιο σύστημα  $(M_{11}, \Delta)$  είναι *στιβαρά ευσταθές* αν ο  $(I - M_{11}\Delta)^{-1}$  υπάρχει στο  $\mathcal{L}(L_2)$  και είναι αιτιακός, για κάθε  $\Delta \in D$ .

**Ορισμός 5.4** Το αβέβαιο σύστημα  $(M, \Delta)$  επιδεικνύει *στιβαρή απόδοση* αν το  $(M_{11}, \Delta)$  είναι στιβαρά ευσταθές και  $\|F_u(M, \Delta)\| < 1$  για κάθε  $\Delta \in D$ .

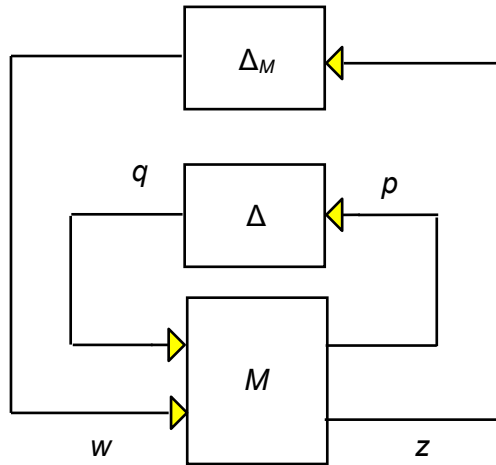
Αν και οι δύο αυτοί ορισμοί φαίνονται ξεχωριστοί, μπορεί ν' αποδειχθεί ότι το πρόβλημα της στιβαρούς απόδοσης μπορεί να τεθεί σαν ένα πρόβλημα στιβαρούς ευστάθειας. Το επόμενο θεώρημα μας λέει πώς:

**Θεώρημα 5.1 (Θεώρημα στιβαρούς απόδοσης - Doyle et al., 1982):** Το σύστημα του Σχ. 5.17 επιδεικνύει στιβαρή απόδοση αν και μόνον αν είναι στιβαρά ευσταθές ως προς την επαυξημένη (δομημένη πλέον) δομή αβεβαιότητας,

$$\Delta_a = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_M \end{bmatrix}$$

όπου η  $\Delta_M$  έχει την ίδια δομή με την  $\Delta$  αλλά διάσταση ανάλογη των  $(w, z)$ .

Αυτό σημαίνει ότι αν ξέρουμε την συνθήκη στιβαρούς ευστάθειας για το σύστημα του Σχ. 5.17, μπορούμε αυτόματα να βρούμε την συνθήκη στιβαρούς απόδοσης εφαρμόζοντας την συνθήκη στιβαρούς ευστάθειας στο σύστημα του Σχ. 5.29.



Σχήμα 5.29 Δομή στιβαρούς απόδοσης

Στην συνέχεια λοιπόν θα μελετήσουμε το θέμα της στιβαρούς ευστάθειας. Οι συνθήκες στιβαρούς απόδοσης προκύπτουν αυτόματα με την χρήση του Θεωρήματος 5.1.

Κεντρικό εργαλείο για την εύρεση της λύσης στο πρόβλημα της στιβαρούς απόδοσης είναι το,

**Θεώρημα 5.2: Θεώρημα της μικρής απολαβής** (small gain theorem). Ποιοτική διατύπωση: *ικανή συνθήκη* για να παραμείνει ευσταθής ένας βρόχος ανάδρασης που συναποτελείται από ευσταθείς τελεστές είναι το γινόμενο όλων των απολαβών των τελεστών να είναι μικρότερο από την μονάδα. Αυτό ισχύει για γραμμικούς και μη γραμμικούς τελεστές.

Στη συνέχεια θα παραθέσουμε τις συνθήκες στιβαρούς ευστάθειας για διάφορες δομές αβεβαιότητας.

### 5.3.2 Αδόμητη αβεβαιότητα (νορμικά φραγμένη)

Στην περίπτωση αυτή η αβεβαιότητα δίνεται από το σύνολο,

$$B_{\Delta} = \{ \Delta \in \mathbb{C}^{m \times n} : \| \Delta \|_{\infty} \leq 1 \} \tag{5.26}$$

Εξειδικεύοντας το θεώρημα της μικρής απολαβής στο σύστημα του Σχ. 5.17, προκύπτει ότι,

**Θεώρημα 5.3** Το σύστημα  $(M, \Delta)$  είναι στιβαρά ευσταθές αν και μόνον αν,

$$\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) \cdot \bar{\sigma}(\Delta(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \tag{5.27}$$

Η συνθήκη αυτή είναι εκφρασμένη σε μία από διάφορες ισοδύναμες μορφές, π.χ.  $\| \Delta \|_{\infty} \| M_{11} \|_{\infty} < 1$ . Εναλλακτικά λοιπόν αφού  $\| \Delta \|_{\infty} \leq 1$ , η (5.27) μετατρέπεται στην

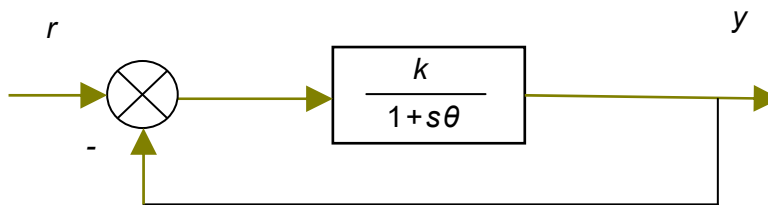
απλούστερη της,

$$\bar{\sigma}(M_{11}(j\omega)) < 1 \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (5.28)$$

Να σημειώσουμε ότι η επιλογή της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$  επιτρέπει την χρήση του θεωρήματος μικρής απολαβής λόγω της υποποπολλαπλασιαστικής της ιδιότητας (ως επαγόμενη νόρμα,  $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ ). Η ιδιότητα αυτή δεν ισχύει για την νόρμα  $\mathcal{H}_2$ , και ως εκ τούτου καθιστά την νόρμα αυτή ακατάλληλη στην μελέτη στιβαρούς ευστάθειας.

Το πρόβλημα με το θεώρημα αυτό έγκειται στο ότι οδηγεί σε συντηρητικές εκτιμήσεις όταν η αβεβαιότητα δεν είναι της ακριβούς μορφής που έχει υποτεθεί. Τα ακόλουθα παραδείγματα καταδεικνύουν το γεγονός αυτό.

**Παράδειγμα 5.2** Έστω το σύστημα ανάδρασης,



Σχήμα 5.30

Εφαρμογή του θεωρήματος μικρής τιμής απαιτεί η συνάρτηση μεταφοράς να είναι ευσταθής, άρα  $\theta > 0$ . Ταυτίζοντας την απολαβή με την νόρμα και θεωρώντας σήματα πεπερασμένης ενέργειας ( $\mathcal{L}_2$ ) οδηγούμαστε στις σχέσεις,

$$\left\| \frac{k}{1+s\theta} \right\|_\infty < 1 \Rightarrow \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \left| \frac{k}{1+j\omega\theta} \right| < 1 \Rightarrow |k| < 1 \Rightarrow -1 < k < 1$$

Η σχέση αυτή υποδηλώνει ότι το σύστημα είναι σίγουρα ευσταθές αν  $-1 < k < 1$  αλλά μπορεί να είναι ευσταθές και για άλλες τιμές του  $k$  (όπως εξάλλου θα δούμε αμέσως).

Ας εφαρμόσουμε τώρα την γνωστή, από την κλασική θεωρία, προϋπόθεση στο κλειστό σύστημα (δηλ. όλοι οι πόλοι του χαρακτηριστικού πολυώνυμου στο αριστερό ημιεπίπεδο):

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι  $a(s) = s\theta + k + 1$  με πόλο στο  $-(1+k)/\theta$ . Άρα το σύστημα είναι ευσταθές αν και μόνον αν  $-1 < k$ . Προφανώς η περιοχή αυτή είναι πολύ μεγαλύτερη από την προηγούμενη.

**Παράδειγμα 5.3** Έστω το σύστημα του Παρ. 5.1, όπου ο πίνακας  $M$  βρέθηκε ως,

$$M = \frac{1}{\chi(s)} \left[ \begin{array}{cc|c} -\frac{1}{s^2}C(s) & sC(s) & \chi(s)C(s) - \frac{1}{s^2}a_0C^2(s) \\ \frac{1}{s^2} & -s & \frac{1}{s^2}a_0C(s) \\ \hline \frac{1}{s^2} & -s & \frac{1}{s^2}a_0C(s) \end{array} \right]$$

με  $\chi(s)=1+s\beta_0+\frac{1}{s^2}C(s)\alpha_0$ . Πριν προχωρήσουμε ας εισάγουμε δεξιά και αριστερά βάρη  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  στις αβεβαιότητες, έτσι ώστε,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta \alpha \alpha_2, \beta = \beta_0 + \beta_1 \Delta \beta \beta_2$$

(ο λόγος για την μετατροπή αυτή είναι επειδή πρέπει  $\|\Delta\|_\infty \leq 1$ ).

Μπορεί να βρεθεί ότι,

$$\bar{\sigma}^2[M_{11}(j\omega)] = \frac{(a_1^2(k^2 + \omega^2 T_d^2) + \beta_1^2(1 + \omega^2 T_0^2))(\alpha_2^2 + \beta_2^2 \omega^6)}{|\lambda(j\omega)|^2}$$

με  $\lambda(s) = \beta_0 T_0 s^4 + (\beta_0 + T_0) s^3 + s^2 + \alpha_0 T_d s + \alpha_0 k$  (χαρακτηριστικό πολυώνυμο κλειστού βρόχου).

Ας βάλουμε τιμές:

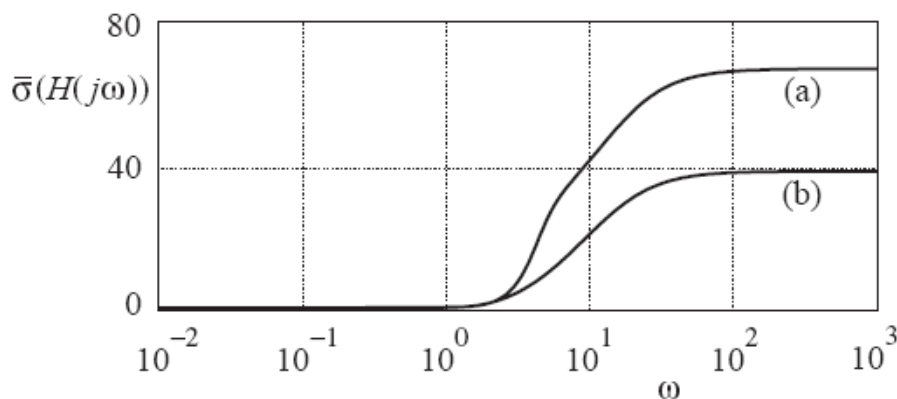
$$0 \leq \beta \leq 0,2 \text{ δηλαδή } \beta_0 = 0,1, \beta_1 \beta_2 = 0,1.$$

(a)  $0,5 \leq \alpha \leq 5$ , δηλαδή  $\alpha_0 = 2,75, \alpha_1 \alpha_2 = 2,25$ .

(b)  $0,5 \leq \alpha \leq 2$ , δηλαδή  $\alpha_0 = 1,25, \alpha_1 \alpha_2 = 0,75$

και ας είναι  $\alpha_1 = \alpha_2, \beta_1 = \beta_2$ .

Στο Σχ. 5.31 φαίνονται τα γραφήματα της  $\bar{\sigma}(\omega)$  για τις περιπτώσεις (a), (b).



Σχήμα 5.31

Προφανώς και στις δύο περιπτώσεις η συνθήκη 5.28 παραβιάζεται κατά πολύ παρ' όλο που το σύστημα είναι ευσταθές για τις τιμές αυτές. Επειδή αυτό (η ευστάθεια) δεν είναι προφανές, ας το δούμε λίγο σε λεπτομέρεια.

Κατ' αρχήν να υπενθυμίσουμε ότι,  $k=1$ ,  $T_d=\sqrt{2}$ ,  $T_0=0,1$ . Με τις τιμές αυτές το χαρακτηριστικό πολυώνυμο  $\lambda(s)$  γίνεται,

$$\lambda(s)=0,1\beta s^4+(\beta+0,1)s^3+s^2+\sqrt{2}\alpha s+\alpha$$

και ο αντίστοιχος πίνακας Routh-Hurwitz,

$0,1\beta$	$1$	$a$
$0,1+\beta$	$\sqrt{2}\alpha$	
$\frac{0,1+\beta-0,1\sqrt{2}\alpha\beta}{\beta+0,1}$	$\alpha$	
$\frac{(0,1+\beta-0,1\sqrt{2}\alpha\beta)\sqrt{2}-(\beta+0,1)^2}{\beta+0,1-0,1\sqrt{2}\alpha\beta}\alpha$		
$\alpha$		

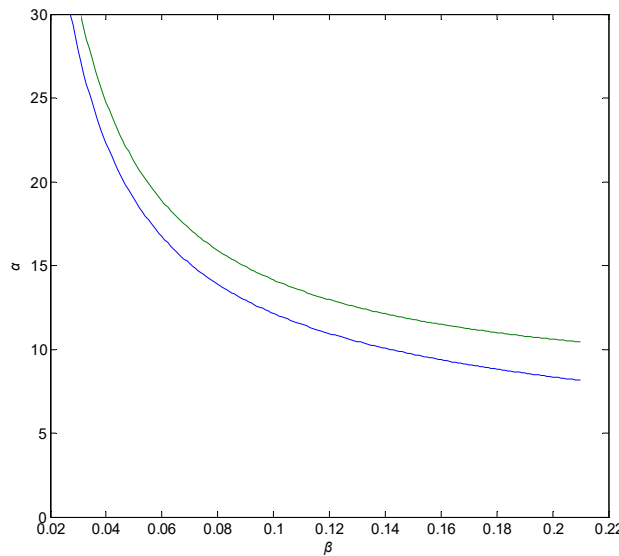
Μια ματιά στους συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυώνυμου δείχνει ότι για ευστάθεια απαιτείται  $\alpha, \beta > 0$ . Επομένως το πρώτο, δεύτερο και πέμπτο στοιχείο της πρώτης στήλης του πίνακα είναι θετικά. Το τρίτο στοιχείο είναι θετικό αν,

$$\alpha < \frac{5\sqrt{2}(\beta+0,1)}{\beta} = f_1(\beta)$$

ενώ το τέταρτο αν,

$$\alpha < \frac{5(0,1+\beta)-(\sqrt{2}-0,1-\beta)}{\beta} = f_2(\beta)$$

Οι γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών συναρτήσεων φαίνονται στο Σχ. 5.34.



Σχήμα 5.32

Το σχήμα αυτό δείχνει καθαρά ότι το σύστημα είναι ευσταθές για τα εύρη των τιμών των παραμέτρων  $\alpha, \beta$  που εξετάζονται.

Ο αναγνώστης δεν πρέπει να παρασυρθεί από την δυνατότητα αναλυτικής εύρεσης των ορίων ευστάθειας για το προηγούμενο παράδειγμα, γεγονός που θα καθιστούσε όλη την θεωρία στιβαρούς ευστάθειας άχρηστη: η διαδικασία αυτή είναι σχεδόν αδύνατη για πάνω από δύο παραμέτρους.

Ο λόγος για τον οποίο η συνθήκη αυτή δεν δίνει καλά αποτελέσματα (είναι συντηρητική) είναι ότι δεν επιβάλλει καμμία ειδική δομή στην αβεβαιότητα  $\Delta$  πέραν του φράγματος στη νόρμα. Μπορεί δηλαδή να περιέχει μεταξύ άλλων και δυναμικά στοιχεία (όπως π.χ. συναρτήσεις μεταφοράς). Θα δείξουμε στη συνέχεια πως το κριτήριο αυτό μπορεί να δώσει καλύτερα αποτελέσματα εξειδικεύοντας σε συγκεκριμένες μορφές αβεβαιότητας.

### 5.3.3 Δομημένη αβεβαιότητα

Στην μορφή αυτή η αβεβαιότητα δίνεται από το σύνολο,

$$B_{\Delta} = \{ \Delta \in \mathbb{C}^{m \times n} : \|\Delta\|_{\infty} \leq 1 \} \tag{5.29}$$

με δομή που ορίζεται από την (5.25),

$$D = \left\{ \text{diag}[\phi_1 I_{k_1}, \dots, \phi_{S_r} I_{k_{S_r}}, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{S_c} I_{r_{S_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \phi_i \in \mathbb{R}, \delta_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l} \right\} \tag{5.25}$$

όπου κάποια μπλοκ μπορεί να λείπουν. Η δομή αυτή μπορεί να παρουσιασθεί σε προβλήματα στιβαρούς ευστάθειας λόγω των συγκεκριμένων αβεβαιοτήτων, αλλά



είναι πάντα παρούσα στην ανάλυση στιβαρούς απόδοσης λόγω του Θεωρήματος 5.1. Για τη δομή αυτή η (5.28) ισχύει ως ικανή συνθήκη μόνον (όπως είδαμε και από τα παραδείγματα). Μπορούμε όμως και στην περίπτωση της δομημένης αβεβαιότητας να βρούμε ικανές και αναγκαίες συνθήκες για στιβαρή ευστάθεια. Ο επόμενος ορισμός είναι το βασικό εργαλείο για την εύρεση τους.

**Ορισμός 5.5** Έστω  $M$  ένας  $n \times m$  μιγαδικός πίνακας και  $B_\Delta$  ένα σύνολο  $n \times m$  δομημένων πινάκων αβεβαιότητας. Η **δομημένη ιδιόμορφη τιμή** του πίνακα  $M$  δοθέντος του  $B_\Delta$ , συμβολίζεται με  $\mu_B(M)$  και ορίζεται ως,

$$\frac{1}{\mu_B(M)} = \begin{cases} \inf_{\Delta \in B_\Delta, \det(I-M\Delta)=0} \bar{\sigma}(\Delta) \\ 0 \text{ αν δεν υπάρχει } \Delta \text{ τέτοιο ώστε } \det(I-M\Delta)=0 \end{cases}$$

όπου έχει τονισθεί η εξάρτηση του  $\mu$  τόσο από τον  $M$  όσο και από το  $\Delta$ .

Οπλισμένοι με τον ορισμό αυτό μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε τις προϋποθέσεις στιβαρούς ευστάθειας (και στιβαρούς απόδοσης) για το σύστημα του Σχ. 5.16.

**Θεώρημα 5.4** Το σύστημα του Σχ. 5.16 είναι στιβαρά ευσταθές για το σύνολο αβεβαιότητας  $B_\Delta$ , αν και μόνον αν,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_\Delta(M_{11}(j\omega)) < 1 \quad (5.30)$$

και επιδεικνύει στιβαρή απόδοση αν και μόνον αν,

$$\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \mu_{\Delta_a}(M(j\omega)) < 1$$

Η συνθήκη (5.30) μπορεί να θεωρηθεί σαν το **γενικευμένο θεώρημα της μικρής απολαβής**.

Ο ορισμός αυτός υπονοεί ότι η  $\mu(M)$  είναι ένα μέτρο (αντίστροφο) της επιτρεπόμενης αβεβαιότητας του συστήματος: όσο μεγαλύτερη είναι, τόσο μικρότερη είναι η αβεβαιότητα που θα αποσταθεροποιήσει το σύστημα.

Αρκετοί συγγραφείς ισοδυναμούν την  $\mu(M)$  σαν την  $\mu$ -νόρμα του  $M$ ,

$$\|M\|_\mu = \mu(M)$$

Αυτό όμως δεν είναι σωστό, αφού η  $\mu(M)$  δεν ικανοποιεί τα κριτήρια μιας νόρμας, αλλά χρησιμοποιείται συνειδητά αυθαίρετα, επειδή λειτουργεί στο πλαίσιο του ελέγχου βέλτιστης νόρμας.

Μπορεί επίσης να δειχθεί ότι,

$$\mu(M) = \max_{\Delta \in \text{BD}} \rho_{\mathbb{R}}(M\Delta) \quad (5.31)$$

όπου  $\rho_{\mathbb{R}}(M)$  η πραγματική φασματική ακτίνα του πίνακα  $M$  (δηλαδή το μεγαλύτερο μέτρο ανάμεσα στις πραγματικές ιδιοτιμές του  $M$ ).

**Παράδειγμα 5.4** Έστω ο μιγαδικός πίνακας,

$$M = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix}$$

και η πραγματική δομή αβεβαιότητας,

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \\ & \Delta_2 \end{bmatrix}$$

με  $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R}$ . Ισχύει,

$$\bar{\sigma}(\Delta) = \max(|\Delta_1|, |\Delta_2|), \det(I + M\Delta) = 1 + m_{11}\Delta_1 + m_{22}\Delta_2 + m\Delta_1\Delta_2$$

με  $m = \det(M) = m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}$ . Επομένως, η δομημένη ιδιόμορφη τιμή του  $M$  δίνεται από την,

$$\frac{1}{\mu(M)} = \inf_{\Delta_1, \Delta_2 \in \mathbb{R} : \det(I + M\Delta) = 0} \max(|\Delta_1|, |\Delta_2|)$$

Απαλείφοντας (λόγω του περιορισμού), έστω το  $\Delta_2$ , δίνει την ισοδύναμη έκφραση,

$$\frac{1}{\mu(M)} = \inf_{\Delta_1 \in \mathbb{R}} \max\left(|\Delta_1|, \left| \frac{1 + m_{11}\Delta_1}{m_{22} + m\Delta_1} \right| \right)$$

Αν,  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ , εφαρμογή των παραπάνω δίνει  $\mu(M) = 5,3723$ .

### 5.3.4 Υπολογισμός του $\mu$

Η μεγιστοποίηση που υπονοείται στην (5.30) είναι ένα πρόβλημα δυσκολίας NP, δηλαδή είναι πιθανόν να μην λύνεται σε πολυωνυμικό χρόνο. Αυτό δεν σημαίνει ότι κάθε τέτοιο πρόβλημα δεν μπορεί να λυθεί, απλά μερικά ίσως δεν λύνονται. Αυτό που συμβαίνει στη πράξη είναι η εύρεση άνω και κάτω φραγμάτων μέσω κατάλληλων επαναληπτικών αλγόριθμων (Young *et al.*, 1992).

Στη περίπτωση που ο πίνακας αβεβαιότητας δεν περιέχει πραγματικά στοιχεία, δηλαδή,

$$D = \left\{ \text{diag}[\delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{S_c} I_{r_{S_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \delta_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l} \right\} \quad (5.25)$$

μπορεί ν' αποδειχθεί ότι,

$$\max_{U \in \mathcal{U}} \rho(UM) \leq \mu_{\Delta}(M) \leq \min_{D \in \mathcal{D}} \bar{\sigma}(DMD^{-1}) \quad (5.32)$$

όπου,

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{διαγ}[D_1, \dots, D_{S_c}, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : \\ D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0 \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{U} = \{U \in \text{B}\Delta : UU^* = I_n\}$$

Αν ο πίνακας αβεβαιότητας περιέχει και πραγματικά στοιχεία, δηλαδή,

$$D = \left\{ \text{diag}[\phi_1 I_{k_1}, \dots, \phi_{S_r} I_{k_{S_r}}, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{S_c} I_{r_{S_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \phi_i \in \mathbb{R}, \delta_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l} \right\} \quad (5.25)$$

υπάρχουν δύο προσεγγίσεις. Η μία είναι να αναπαραστήσουμε τα διαστήματα των πραγματικών στοιχείων με μιγαδικούς δίσκους και να χρησιμοποιήσουμε την 5.32. Μία καλύτερη προσέγγιση είναι να εκμεταλλευτούμε την φάση των πραγματικών παραμέτρων. Για να το κάνουμε αυτό χρειαζόμαστε το σύνολο  $\mathcal{Q}$ ,

$$\mathcal{Q} = \{ \Delta \in \mathcal{D} : \phi_i \in [-1, 1], |\delta_i| = 1, \Delta_i \Delta_i^* = I_{m_i} \}$$

το σύνολο  $\mathcal{G}$ ,

$$\mathcal{G} = \left\{ \text{διαγ}[G_1, \dots, G_{S_r}, 0, \dots, 0] : G_i = G_i^* \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i} \right\}$$

και το επαυξημένο σύνολο  $\mathcal{D}$ ,

$$\mathcal{D} = \left\{ \begin{array}{l} \text{διαγ}[\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_{S_r}, D_1, \dots, D_{S_c}, d_1 I_{m_1}, \dots, d_{F-1} I_{m_{F-1}}, I_{m_F}] : \\ \tilde{D}_i \in \mathbb{C}^{k_i \times k_i}, \tilde{D}_i = \tilde{D}_i^* > 0, D_i \in \mathbb{C}^{r_i \times r_i}, D_i = D_i^* > 0, d_j \in \mathbb{R}, d_j > 0 \end{array} \right\}$$

Τότε μπορεί να δειχθεί ότι,

$$\mu(M) \leq \inf_{D \in \mathcal{D}, G \in \mathcal{G}} \min_{\beta} \left\{ \beta : M^*DM + j(GM - M^*G) - \beta^2 D \leq 0 \right\} \quad (5.33)$$

Εναλλακτικά η (5.33) μπορεί να διατυπωθεί σε μία πιο χρήσιμη μορφή μέσω του ακόλουθου θεωρήματος.

**Θεώρημα 5.5** Δοθέντος  $\beta > 0$ , υπάρχουν  $D \in \mathcal{D}$  και  $G \in \mathcal{G}$  τέτοιοι που,

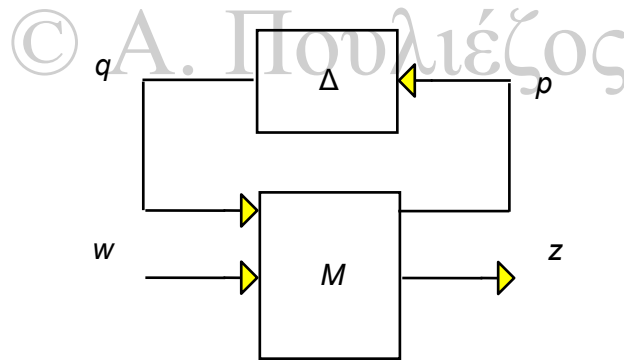
$$M^*DM + j(GM - M^*G) - \beta^2 D \leq 0$$

αν και μόνον αν υπάρχουν  $D_1 \in \mathcal{D}$  και  $G_1 \in \mathcal{G}$  τέτοιοι ώστε,

$$\bar{\sigma} \left( \left( \frac{D_1 M D_1^{-1}}{\beta} - jG_1 \right) (I + G_1^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \leq 1.$$

### 5.3.5 Ανακεφαλαίωση συνθηκών

Για ευκολία χρήσης των προηγούμενων αποτελεσμάτων, ας εκθέσουμε συνοπτικά τις ευρεθείσες συνθήκες. Έστω λοιπόν το αβέβαιο σύστημα του Σχ. 5.17,



Σχήμα 5.33 Απλουστευμένο διάγραμμα ελέγχου υπό αβεβαιότητα

όπου

$$z = \mathcal{F}_u(M, \Delta)w = [M_{22} + M_{21}\Delta(I - M_{11}\Delta)^{-1}M_{12}]w = Fw \quad (5.18)$$

με  $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$  και κριτήριο απόδοσης  $\|F\|_{\infty} \leq 1$ . Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

Ονομαστική ευστάθεια (ΟΕ)  $\Leftrightarrow M$  εσωτερικά ευσταθής

Ονομαστική απόδοση (ΟΑ)  $\Leftrightarrow \bar{\sigma}(M_{22}) = \mu_{\Delta_p} < 1, \forall \omega$  και ΟΕ

Στιβαρή ευστάθεια (ΣΕ)  $\Leftrightarrow \mu_{\Delta}(M_{11}) < 1, \forall \omega$  και ΟΕ

Στιβαρή απόδοση (ΣΑ)  $\Leftrightarrow \mu_{\Delta_A}(M) < 1, \forall \omega$  και ΟΕ

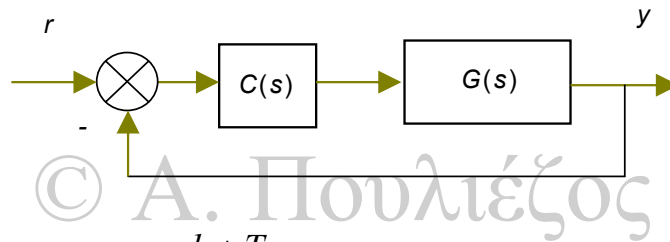
όπου,

$$\Delta_A = \begin{bmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta_M \end{bmatrix}$$

με  $\Delta$  μπλοκ διαγώνιο πίνακα, και  $\Delta_M$  πλήρη μιγαδικό πίνακα.

### 5.3.6 Παραδείγματα

**Παράδειγμα 5.5** Έστω για μια ακόμη φορά το σύστημα του Παρ. 5.1,



με  $G(s) = \frac{\alpha}{s^2(1+\beta s)}$  και  $C(s) = \frac{k+T_d s}{1+T_0 s}$ . Οι παράμετροι  $\alpha, \beta$  είναι αβέβαιοι με ονομαστικές τιμές  $\alpha_0, \beta_0$  αντίστοιχα, με υπόδειγμα,

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 \Delta_\alpha \alpha_2$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 \Delta_\beta \beta_2$$

Οι τιμές είναι:

$$0 \leq \beta \leq 0,2 \text{ δηλαδή } \beta_0 = 0,1, \beta_1 \beta_2 = 0,1.$$

(1)  $0,5 \leq \alpha \leq 5$ , δηλαδή  $\alpha_0 = 2,75, \alpha_1 \alpha_2 = 2,25$ .

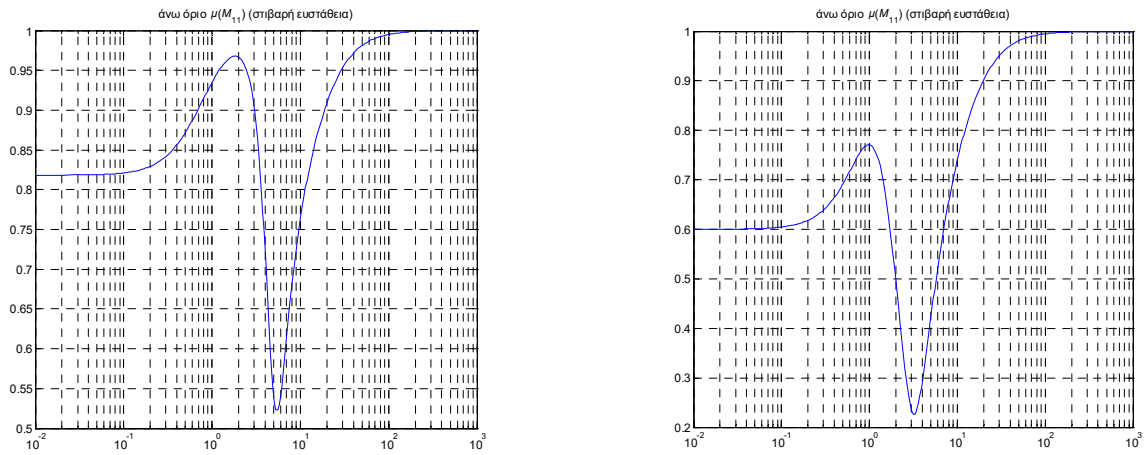
(2)  $0,5 \leq \alpha \leq 2$ , δηλαδή  $\alpha_0 = 1,25, \alpha_1 \alpha_2 = 0,75$

και  $\alpha_s$  είναι  $\alpha_1 = \alpha_2 = \sqrt{2,25}$  ή  $\sqrt{0,75}$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = \sqrt{0,1}$ .

Στα Σχ. 5.34 φαίνονται οι μέγιστες δομημένες ιδιόμορφες τιμές για το παράδειγμα αυτό, υποθέτοντας μιγαδικές αβεβαιότητες στο  $\Delta$ , δηλαδή,

$$\Delta = \Delta_c = \begin{bmatrix} \delta_1 I_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 I_2 \end{bmatrix}, \delta_i \in \mathbb{C}, I_i = 1, i = 1,2$$

με  $|\delta_i| \leq 1 \Rightarrow \sqrt{\delta_{i_x}^2 + \delta_{i_y}^2} \leq 1$ ,  $\delta_i = \delta_{i_x} + j\delta_{i_y}$  (με βάση την δομή της (5.25)).



Σχήμα 5.34

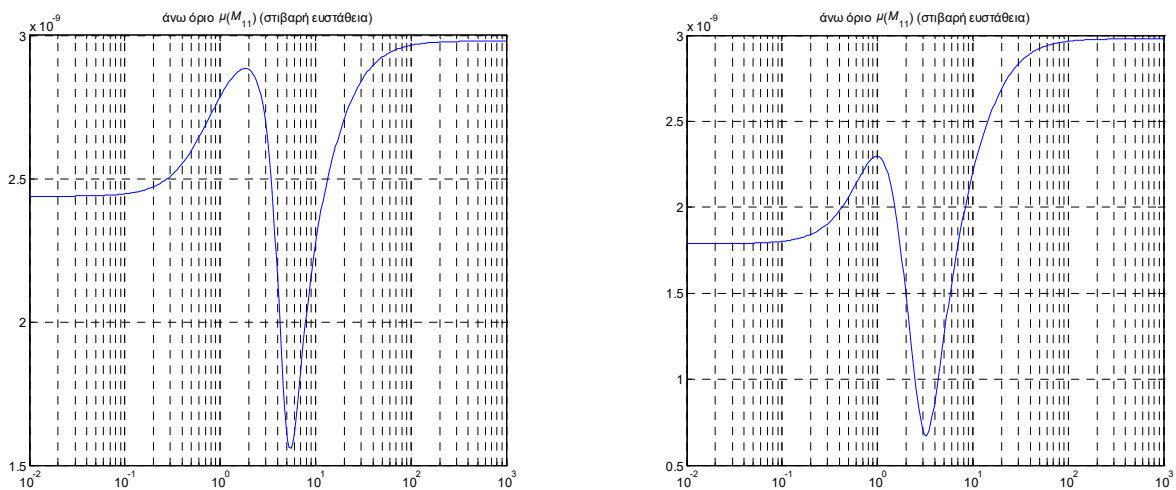
(α)  $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$  για  $a_0=2,75$

(β)  $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$  για  $a_0=1,25$

Όπως φαίνεται τα γραφήματα δείχνουν οριακή στιβαρή ευστάθεια παρόλο που το σύστημα επιδεικνύει αρκετή στιβαρότητα για τις τιμές αυτές, όπως δείχνει και το Σχ. 5.34. Αλλάζοντας την δομή της αβεβαιότητας σε διαγώνια πραγματική, δηλαδή,

$$\Delta = \Delta_r = \begin{bmatrix} \delta_1 I_1 & 0 \\ 0 & \delta_2 I_2 \end{bmatrix}, \quad \delta_i \in \mathbb{R}, \quad I_i = 1, \quad i=1,2$$

με  $|\delta_i| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \delta_i \leq 1$ , δίνει τελικά τα σωστά αποτελέσματα όπως δείχνει και το Σχ. 5.35.



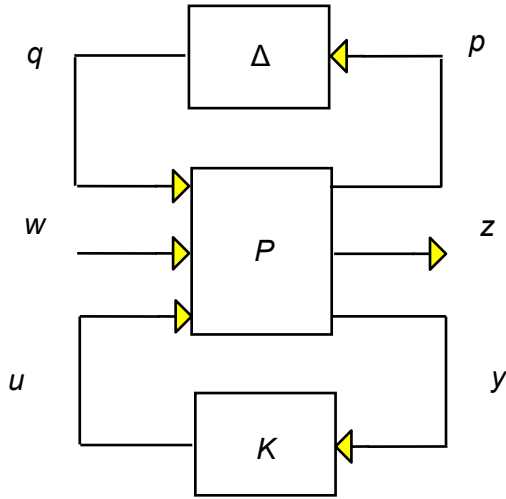
Σχήμα 5.35

(α)  $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$  για  $a_0=2,75$

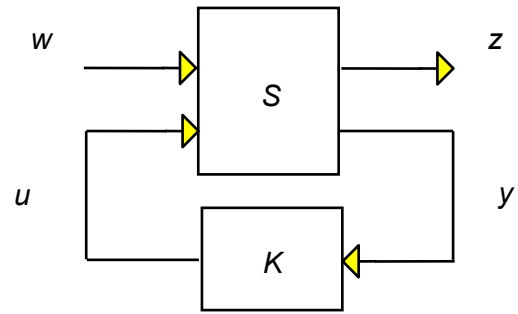
(β)  $\mu_{\Delta}(M_{11}(j\omega))$  για  $a_0=1,25$

### 5.4 Σύνθεση

Ας θεωρήσουμε τα δύο ισοδύναμα συστήματα των Σχ. 5.16, 5.36.



Σχήμα 5.16



Σχήμα 5.36

Στο Σχ. 5.36 έχει ενσωματωθεί η αβεβαιότητα  $\Delta$  μέσω της σχέσης που διέπει μία ανωτέρα LFT,

$$z = \mathcal{F}_u(P, \Delta)w = [P_{22} + P_{21}\Delta(I - P_{11}\Delta)^{-1}P_{12}]w = Sw \tag{5.34}$$

Το πρόβλημα της σύνθεσης ορίζεται ως:

Να ευρεθεί εσωτερικά σταθεροποιητικός ελεγκτής  $K$  για όλες τις αποδεκτές  $\Delta$  και  $\|F_{zw}\|_{\infty} \leq \gamma$  για κάποιο προδιαγεγραμμένο  $\gamma$ .

Όπως υπονοεί ο παραπάνω ορισμός σαν κριτήριο απόδοσης λαμβάνεται και  $\gamma$  η νόρμα της συνάρτησης μεταφοράς.

Η γενική μορφή της αβεβαιότητας  $D \in \mathbb{C}^{n \times n}$  δίνεται από την,

$$D = \left\{ \text{diag}[\phi_1 I_{k_1}, \dots, \phi_{S_r} I_{k_{S_r}}, \delta_1 I_{r_1}, \dots, \delta_{S_c} I_{r_{S_c}}, \Delta_1, \dots, \Delta_F] : \phi_i \in \mathbb{R}, \delta_j \in \mathbb{C}, \Delta_l \in \mathbb{C}^{m_l \times m_l} \right\} \tag{5.25}$$

δηλαδή η δομή αβεβαιότητας που περιλαμβάνει πραγματικές αβεβαιότητες  $\phi_i$ , (σε διαγώνιο μορφή), μιγαδικές αβεβαιότητες  $\delta_j$ , (επίσης σε μπλοκ διαγώνια μορφή) και πλήρεις μιγαδικές αβεβαιότητες,  $\Delta_l$ .

Η λύση στο πρόβλημα αυτό είναι προς το παρόν προσεγγιστική και βασίζεται στα άνω και κάτω φράγματα της δομημένης ιδιόμορφης τιμής. Οι λεπτομέρειες είναι αρκετά περίπλοκες και αναγκαστικά θα περιορισθούμε στα βασικά βήματα. Για τους ενδιαφερόμενους υπάρχουν οι πρωτότυπες δημοσιεύσεις (Young, 1993).

Με βάση την (5.33) το πρόβλημα της εύρεσης ενός  $\mu$ -βέλτιστου ελεγκτή, δηλαδή ενός  $K$  τέτοιου που  $\mu(\mathcal{F}_l(S(j\omega), K(j\omega))) \leq \beta$ ,  $\forall \omega$ , μετατρέπεται στην εύρεση πινάκων συναρτήσεων συχνότητας  $D(\omega) \in \mathcal{D}$  και  $G(\omega) \in \mathcal{G}$ , τέτοιους ώστε,

$$\sup_{\omega} \bar{\sigma} \left[ \left( \frac{D(\omega)(\mathcal{F}_l(S(j\omega), K(j\omega)))D^{-1}(\omega)}{\gamma} - jG(\omega) \right) (I + G^2(\omega))^{-\frac{1}{2}} \right] \leq 1, \forall \omega$$

Το πρόβλημα αυτό λύνεται μέσω της επαναληπτικής μεθόδου γνωστής ως  $D$ ,  $G$ - $K$ . Πρέπει όμως να τονισθεί ξανά ότι η μέθοδος αυτή δεν εγγυάται ούτε καν τοπικά ελάχιστα.

Προς το παρόν το MATLAB υλοποιεί την μέθοδο  $D$ - $K$ , μία μέθοδο παρόμοια με την προεκτεθείσα, αλλά για σύνολα αβεβαιότητας που δεν περιλαμβάνουν πραγματικές αβεβαιότητες (βλέπε (5.32)). Το πρόβλημα αυτό είναι κάπως ευκολότερο, αλλά όμως και δω ισχύουν οι αδυναμίες που προαναφέρθηκαν.

© Α. Πουλιέζος



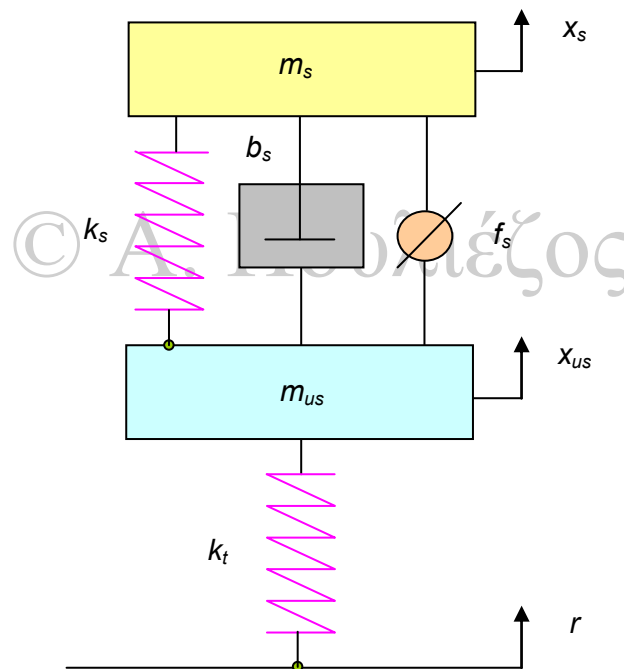
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Παραδείγματα εφαρμογών

#### 6.1 Σύστημα ενεργητικής ανάρτησης αυτοκινήτου (1/4)

Το παράδειγμα αυτό παρουσιάζεται στο Matlab Robust Toolbox (v.3.0) και βασίζεται στον Lin (1997). Ο πλήρης κώδικας MATLAB για την εκτέλεση του παρατίθεται στο Παράρτημα.

Το υπόδειγμα που θα χρησιμοποιηθεί για την μελέτη του συγκεκριμένου παραδείγματος φαίνεται στο Σχ. 6.1.



Σχήμα 6.1 Ενεργητική ανάρτηση αυτοκινήτου

Στο υπόδειγμα αυτό το  $m_s$  παριστάνει την μάζα του ταλαντευόμενου μέρους του αυτοκινήτου (σασί),  $m_{us}$  την μάζα του σταθερού τμήματος (σύστημα τροχών),  $k_s$  και  $b_s$  περιγράφουν την σταθερά παθητικού ελατηρίου και αποσβεστήρα που είναι τοποθετημένα μεταξύ του ταλαντευόμενου και σταθερού τμήματος του αυτοκινήτου και τέλος το  $k_t$  αναπαριστά την συμπίεσιτικότητα των ελαστικών. Οι μεταβλητές  $x_s$ ,  $x_{us}$  και  $r$  συμβολίζουν την (κάθετη) μετατόπιση του σώματος του αυτοκινήτου, την μετατόπιση των τροχών και την μορφή του οδοστρώματος (διαταραχή) αντίστοιχα. Η δύναμη  $f_s$  εφαρμόζεται μεταξύ του ταλαντευόμενου και σταθερού τμήματος και είναι

το ενεργητικό τμήμα του συστήματος ανάρτησης. Η δύναμη αυτή υπολογίζεται από το σύστημα ελέγχου που εφαρμόζεται.

Στόχος της σχεδίασης είναι η εύρεση ενός βέλτιστου, ως προς την άνεση των επιβαινόντων, ελεγκτή, ιδιότητα που σχετίζεται με την κάθετη επιτάχυνση του οχήματος.

Οι γραμμικοποιημένες διαφορικές που διέπουν το σύστημα, είναι,

$$\frac{d^2 x_s}{dt^2} = -\frac{1}{m_s} [k_s(x_s - x_{us}) + b_s \left( \frac{dx_s}{dt} - \frac{dx_{us}}{dt} \right) - f_s]$$

$$\frac{d^2 x_{us}}{dt^2} = \frac{1}{m_{us}} [k_s(x_s - x_{us}) + b_s \left( \frac{dx_s}{dt} - \frac{dx_{us}}{dt} \right) - k_t(x_{us} - r) - f_s]$$

Για την περιγραφή του συστήματος σε μορφή χώρου κατάστασης έστω,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_s \\ \frac{dx_s}{dt} \\ x_{us} \\ \frac{dx_{us}}{dt} \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} r \\ f_s \end{bmatrix}$$

τότε,

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_s}{m_{us}} & \frac{b_s}{m_{us}} & -\frac{k_s + k_t}{m_{us}} & -\frac{b_s}{m_{us}} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_s} \\ 0 & 0 \\ \frac{k_t}{m_{us}} & -\frac{1}{m_{us}} \end{bmatrix} u$$

ενώ η μέτρηση είναι,

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_s}{m_s} & -\frac{b_s}{m_s} & \frac{k_s}{m_s} & \frac{b_s}{m_s} \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u = \begin{bmatrix} x_1 \\ -\frac{k_s}{m_s} x_1 - \frac{b_s}{m_s} x_2 + \frac{k_s}{m_s} x_3 + \frac{b_s}{m_s} x_4 + \frac{1}{m_s} u_2 \\ x_1 - x_3 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Όπως φαίνεται από την παραπάνω διατύπωση σαν μεταβλητές κατάστασης έχουν ορισθεί οι κάθετες μετατοπίσεις του σώματος του αυτοκινήτου και του συστήματος των τροχών και οι αντίστοιχες επιταχύνσεις, σαν μεταβλητές εισόδου η δύναμη της

ενεργητικής ανάρτησης και η διαταραχή λόγω του οδοστρώματος, ενώ σαν μέτρηση η επιτάχυνση του σώματος.

Οι τιμές των μεταβλητών είναι οι ακόλουθες (Lin, 1997):

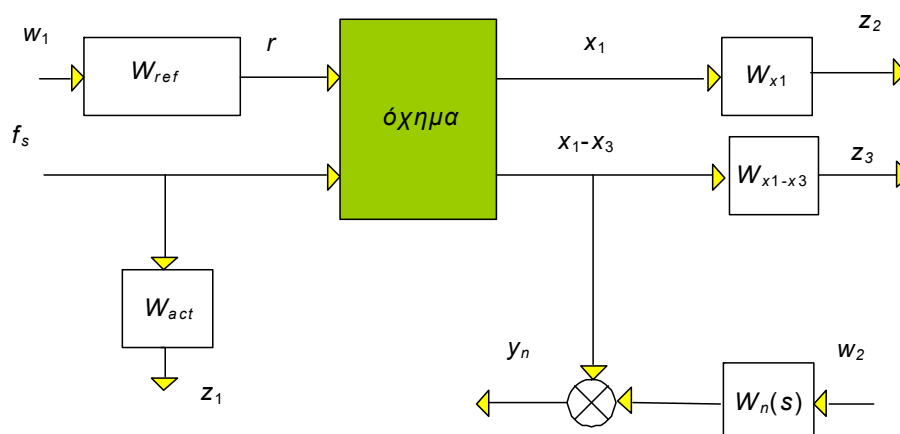
$m_s$ :	290	kg
$m_{us}$ :	59	kg
$b_s$ :	1000	N/m/s
$k_s$ :	16182	N/m
$k_t$ :	190000	N/m

### 6.1.1 Ονομαστική σχεδίαση

**Στόχοι ονομαστικής σχεδίασης:** Οι στόχοι της σχεδίασης σ' ένα τέτοιο σύστημα είναι αφ' ενός μεν η μεγιστοποίηση της άνεσης των επιβαινόντων (μέσω της ελαχιστοποίησης της απόκλισης του σώματος του αυτοκινήτου,  $x_1$ ) και αφ' ετέρου η ελαχιστοποίηση της απόκλισης της ανάρτησης ( $x_1-x_3$ ).

Είναι γνωστό (Hedrick, 1990) ότι η συνάρτηση μεταφοράς της επιτάχυνσης περιέχει ένα αναλλοίωτο σημείο στη συχνότητα αναπήδησης ελαστικών (tyrehop),  $\omega_1=56,7$  rad/sec. Παρόμοια, η συνάρτηση μεταφοράς απόκλισης ανάρτησης περιέχει ένα αναλλοίωτο σημείο στη συχνότητα τριξίματος (rattle space),  $\omega_2=23,3$  rad/sec. Η δυσκολία στην σχεδίαση έγκειται στο γεγονός ότι δεν είναι δυνατόν να καταστήσουμε ταυτόχρονα και τις δύο αυτές συναρτήσεις μεταφοράς μικρές γύρω από αυτές τις συχνότητες.

Για την επίλυση του προβλήματος στα πλαίσια της θεωρίας  $\mathcal{H}_\infty$ , ας θεωρήσουμε το σχετικό Σχ. 6.2.



Σχήμα 6.2 Δομικό διάγραμμα ελέγχου ανάρτησης

Στο διάγραμμα αυτό η  $W_n(s)$  χρησιμεύει για τον χαρακτηρισμό του θορύβου της μέ-

τησης. Θέτουμε,

$$W_n(s)=0,01$$

(η μορφή αυτή δεν είναι πολύ ρεαλιστική, κανονικά θα έπρεπε να είναι συνάρτηση της συχνότητας).

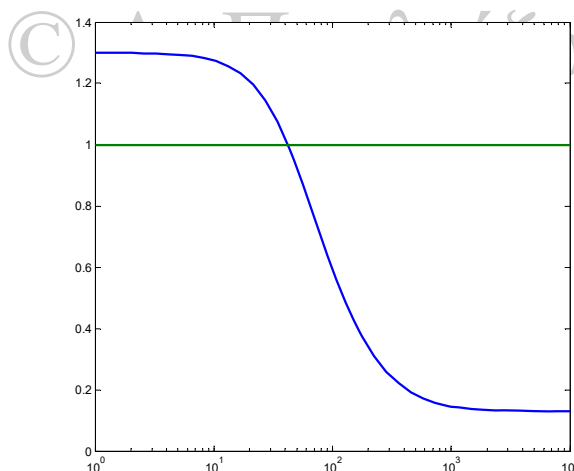
Η  $W_{ref}(s)$  σταθμίζει το μέγεθος των ανωμαλιών του δρόμου. Θεωρώντας μέγιστο μέγεθος τα 7cm., θέτουμε,

$$W_{ref}(s)=0,07$$

Το μέγεθος και το φάσμα συχνοτήτων της δύναμης ελέγχου  $f_s$ , περιορίζεται από την συνάρτηση  $W_{act}(s)$ . Θέτοντας,

$$W_{act}(s) = \frac{100s + 50}{13s + 500}$$

θεωρούμε ότι η  $f_s$  θα έχει την μορφή του αντίστροφου βάρους  $W_{act}^{-1}(s)$  που φαίνεται στο Σχ. 6.3. Το βασικό χαρακτηριστικό είναι η εξασθένιση (roll-off) για συχνότητες  $>50$  rad/sec.



Σχήμα 6.3 Αντίστροφη συνάρτηση βάρους ελέγχου

Τα βάρη  $W_{x_1}(s)$ ,  $W_{x_1-x_3}(s)$  χρησιμοποιούνται για να υποχρεώσουν τον ελεγκτή να κρατήσουν την απόκλιση του σώματος ( $x_1$ ) και την απόκλιση της ανάρτησης ( $x_1-x_3$ ) σε χαμηλά επίπεδα στις συχνότητες που ενδιαφέρουν.

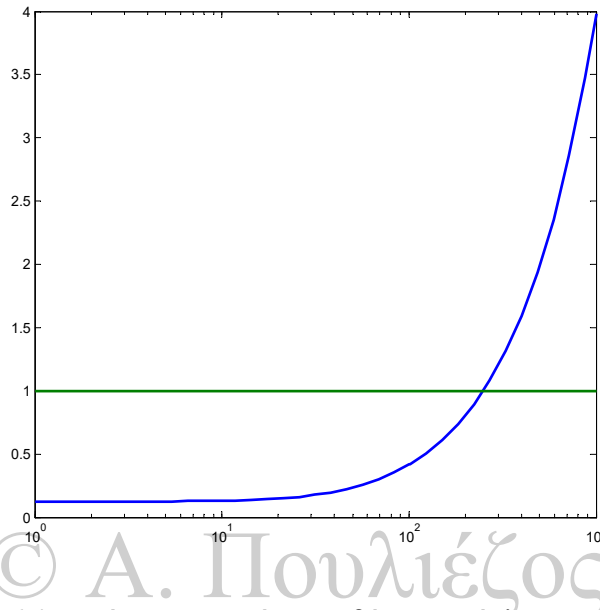
Στη συνέχεια θα σχεδιάσουμε δύο διαφορετικούς ελεγκτές:

- (1) βέλτιστο ως προς την απόκλιση του σώματος
- (2) βέλτιστο ως προς την απόκλιση της ανάρτησης

Στόχος 1: Ας θέσουμε,

$$W_{x_1}(s) = 8 \frac{2\pi \times 5}{s + 2\pi \times 5}$$

$W_{x_1-x_3}(s)$ : δεν λαμβάνεται υπ' όψη



Σχήμα 6.4 Αντίστροφη συνάρτηση βάρους απόκλισης σώματος

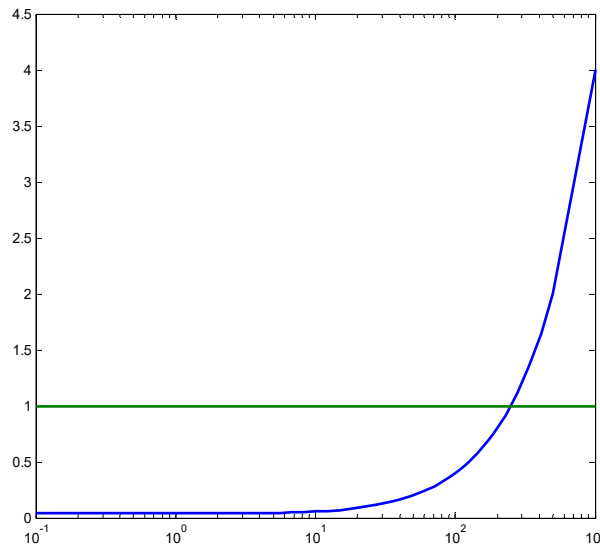
Η συνάρτηση αυτή εξασθενεί σε συχνότητες  $> 5 \times 2\pi$  rad/sec (32), ακολουθώντας έναν προσεγγιστικό κανόνα που υποδεικνύει ότι τα βάρη απόδοσης πρέπει να εξασθενούν πριν από ένα μηδενικό ανοικτού βρόχου (56,7 rad/sec).

Μέσω της εντολής `hinfsyn` συνθέτουμε έναν ελεγκτή  $\mathcal{H}_\infty$  που δίνει  $\gamma = \|T_{zw}\|_\infty = 0,56698$ .

Στόχος 2: Ας θέσουμε,

$W_{x_1}(s)$ : δεν λαμβάνεται υπ' όψη

$$W_{x_1-x_3}(s) = 25 \frac{1}{0,1s + 1}$$



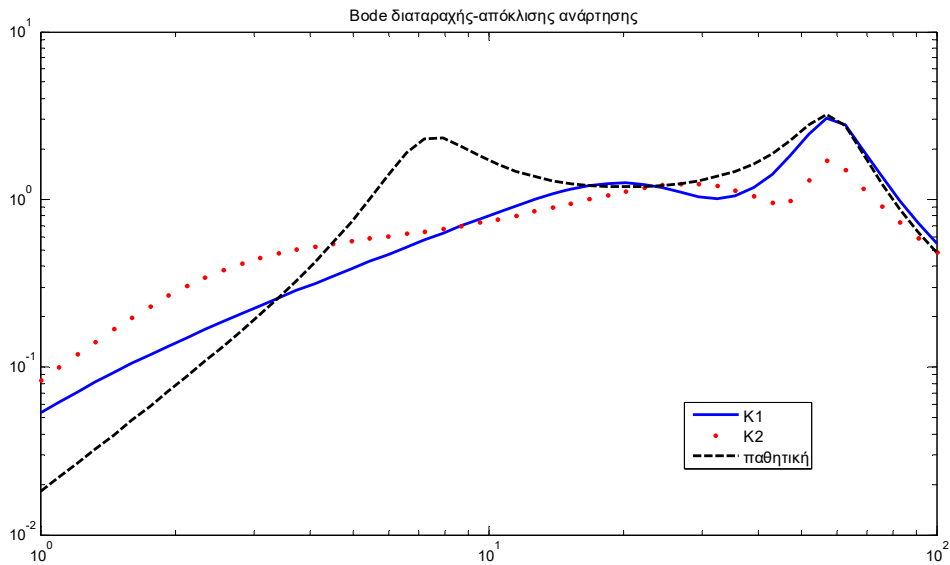
Σχήμα 6.5 Αντίστροφη συνάρτηση βάρους απόκλισης ανάρτησης

Η συνάρτηση αυτή εξασθενεί σε συχνότητες  $>10$  rad/sec (10), δηλαδή πριν από το μηδενικό ανοικτού βρόχου στα 23,3 rad/sec.

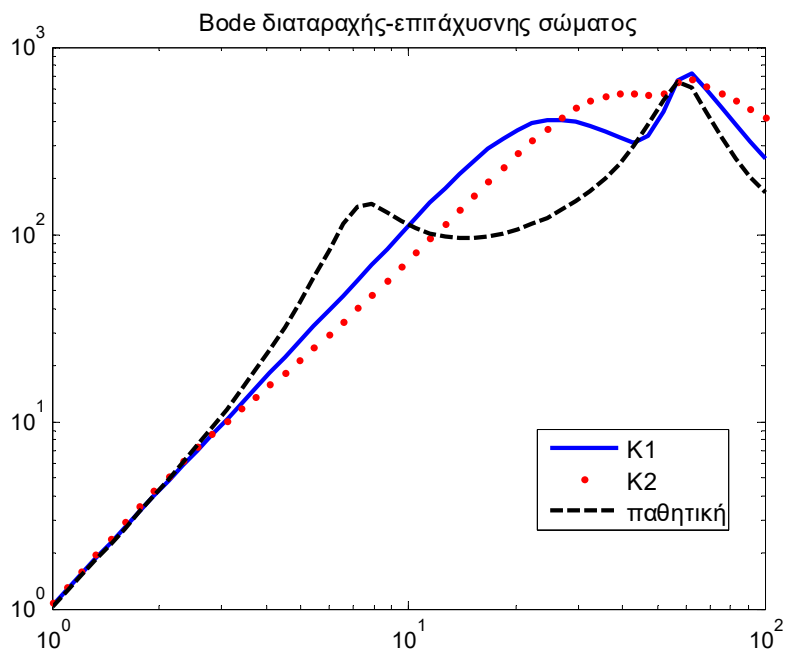
Μέσω της εντολής `hinfsyn` συνθέτουμε έναν ελεγκτή  $\mathcal{H}_\infty$  που δίνει  $\gamma = \|T_{zw}\|_\infty = 0,89949$ .

Η απόδοση των δύο αυτών ελεγκτών αποτυπώνεται στα επόμενα διαγράμματα.

Στα Σχ. 6.6, 6.7 φαίνεται η απόδοση των ελεγκτών στο πεδίο της συχνότητας μέσω των διαγραμμάτων Bode μέτρου των δύο ελεγχόμενων (ενεργητικών) συστημάτων και του συστήματος με παθητική ανάρτηση. Τα σημεία ενδιαφέροντος είναι οι συχνότητες  $\omega_1=56,7$  και  $\omega_2=23,3$ . Μέσω του πρώτου στόχου επιτυγχάνεται εξασθένηση γύρω από την συχνότητα τριξίματος, ενώ το δεύτερο σύστημα βελτιώνει την απόδοση και στις δύο συχνότητες.



Σχήμα 6.6 Διάγραμμα Bode μέτρου απόκλισης ανάρτησης



Σχήμα 6.7 Διάγραμμα Bode μέτρου επιτάχυνσης σώματος

Στο Σχ. 6.8 φαίνεται η απόδοση των ελεγκτών στο πεδίο του χρόνου μέσω των χρονικών αποκρίσεων σε είσοδο διαταραχής,

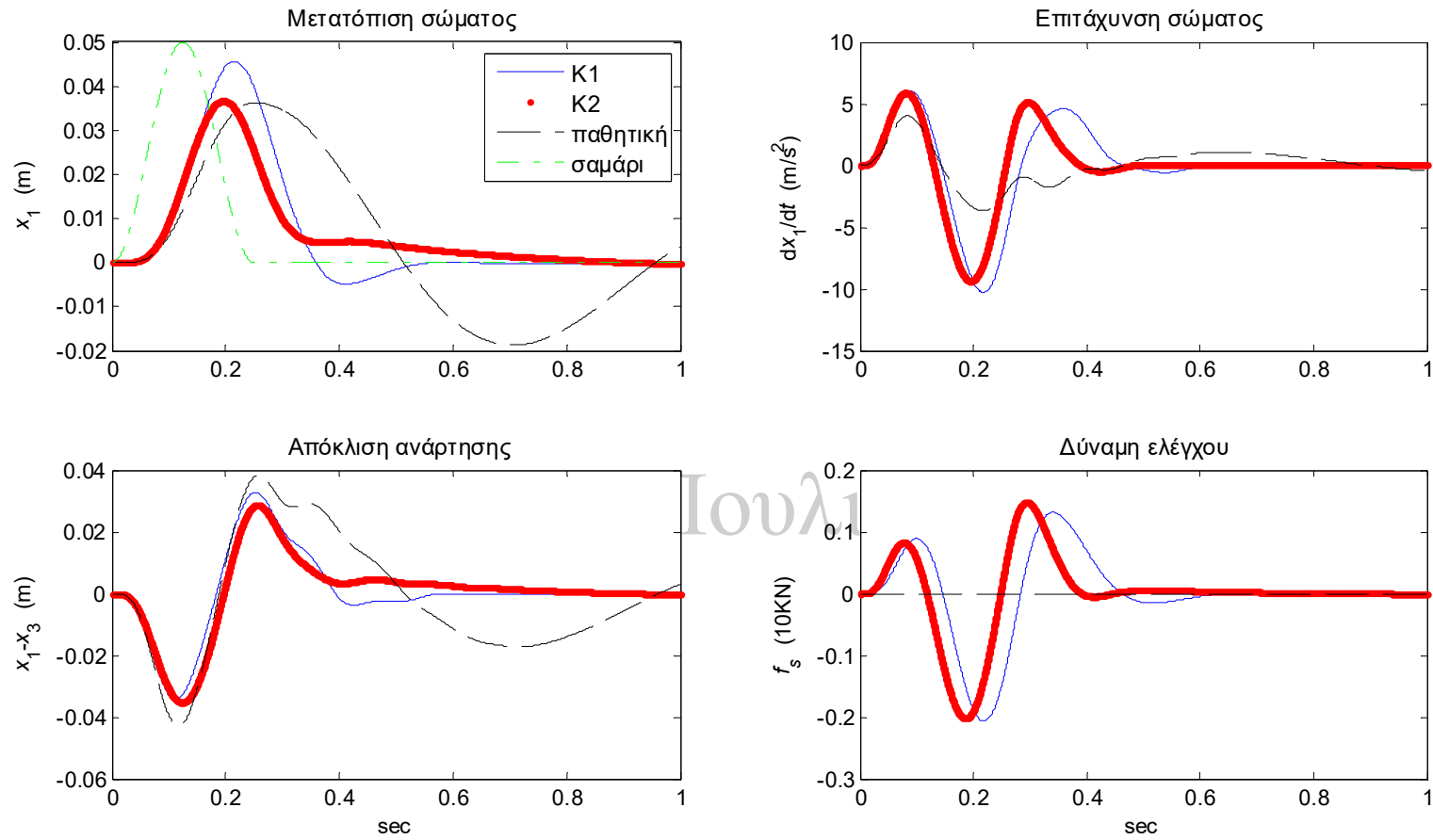
$$\begin{aligned}
 r(t) &= 0,025(1 - \sin 8\pi t), \quad t < 0,25 \text{ sec} \\
 &= 0, \quad t \geq 0,25 \text{ sec}
 \end{aligned}$$

που αντιστοιχεί σ' ένα «σαμαράκι» μέγιστου ύψους 5cm.

Όπως φαίνεται ο πρώτος ελεγκτής έχει καλή απόδοση στην επιτάχυνση του σώματος, ενώ υστερεί στην απόκλιση ανάρτησης, ενώ ο δεύτερος ελεγκτής έχει αντίστροφη συμπεριφορά. Αυτό εξηγείται από τον τρόπο με τον οποίο ο κάθε ελεγκτής «τιμωρεί» τις συγκεκριμένες αποκρίσεις.

© Α. Πουλιέζος

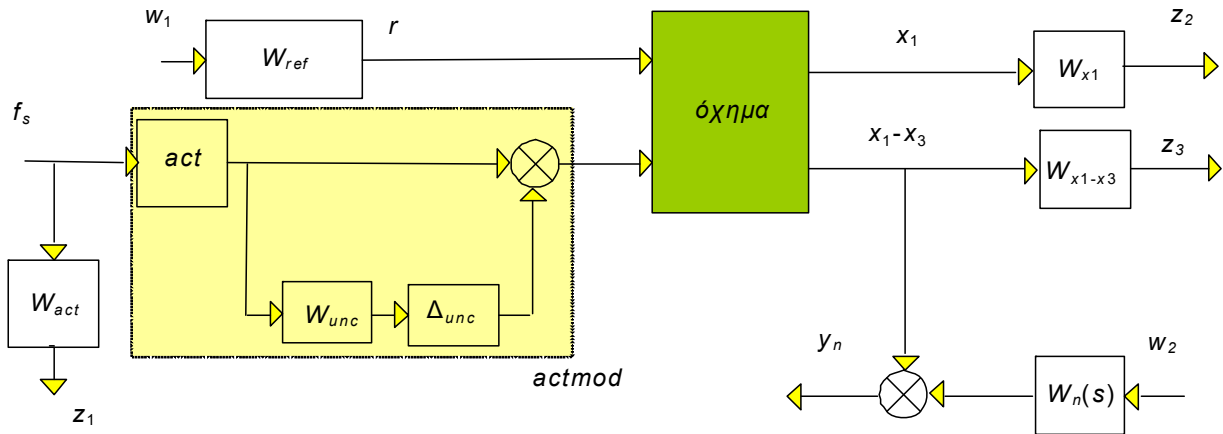




Σχήμα 6.8 Χρονικές αποκρίσεις ονομαστικού συστήματος

### 6.1.2 Στιβαρή σχεδίαση

Στη συνέχεια θα συμπεριλάβουμε στο υπόδειγμα της ανάρτησης και την δυναμική του επενεργητή. Η δυναμική αυτή θα προσεγγισθεί με μία διαδικασία πρώτης τάξης, η οποία θα επαυξηθεί με ένα υπόδειγμα αβεβαιότητας. Συγκεκριμένα ας θεωρήσουμε το τροποποιημένο διάγραμμα του Σχ. 6.9.



Σχήμα 6.9 Αβέβαιο δομικό διάγραμμα ανάρτησης

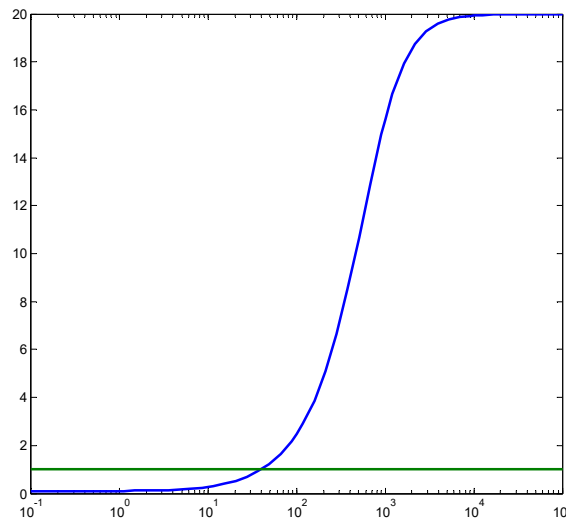
Οι εμπλεκόμενες συναρτήσεις μεταφοράς είναι:

$$act(s) = \frac{1}{\frac{1}{60}s + 1}$$

$$W_{unc}(s) = 0,1 \frac{\frac{1}{4}s + 1}{\frac{1}{800}s + 1}$$

και  $\| \Delta_{unc} \|_{\infty} \leq 1, \Delta_{unc} \in \mathbb{C}$ . Προφανώς,  $actmod = act(1 + W_{unc} \times \Delta_{unc})$ .

Η συνάρτηση μεταφοράς βάρους της αβεβαιότητας φαίνεται στο Σχ. 6.9. Η μορφή της υποδηλώνει ότι σε συχνότητες κάτω των 4 rad/sec η ονομαστική συνάρτηση μεταφοράς (act) μπορεί να είναι λάθος έως και 10%. Το λάθος αυτό αυξάνει από την συχνότητα αυτή και μετά φτάνοντας το 400% στα 800 rad/sec.

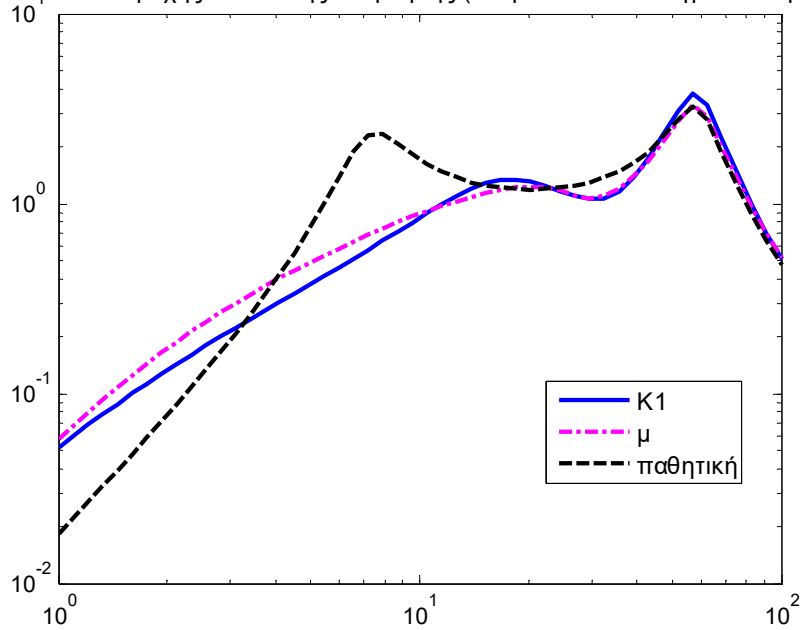


Σχήμα 6.10 Βάρος αβεβαιότητας

Η εντολή `dksyn` του Robust Control Toolbox (v3.0), υπολογίζει έναν υποβέλτιστο ελεγκτή  $\mu$ , μέσω της επαναληπτικής διαδικασίας D-K, για αβέβαια συστήματα με μιγαδικές αβεβαιότητες. Για το συγκεκριμένο παράδειγμα η διαδικασία βρίσκει έναν τέτοιο ελεγκτή με νόρμα 0,5829.

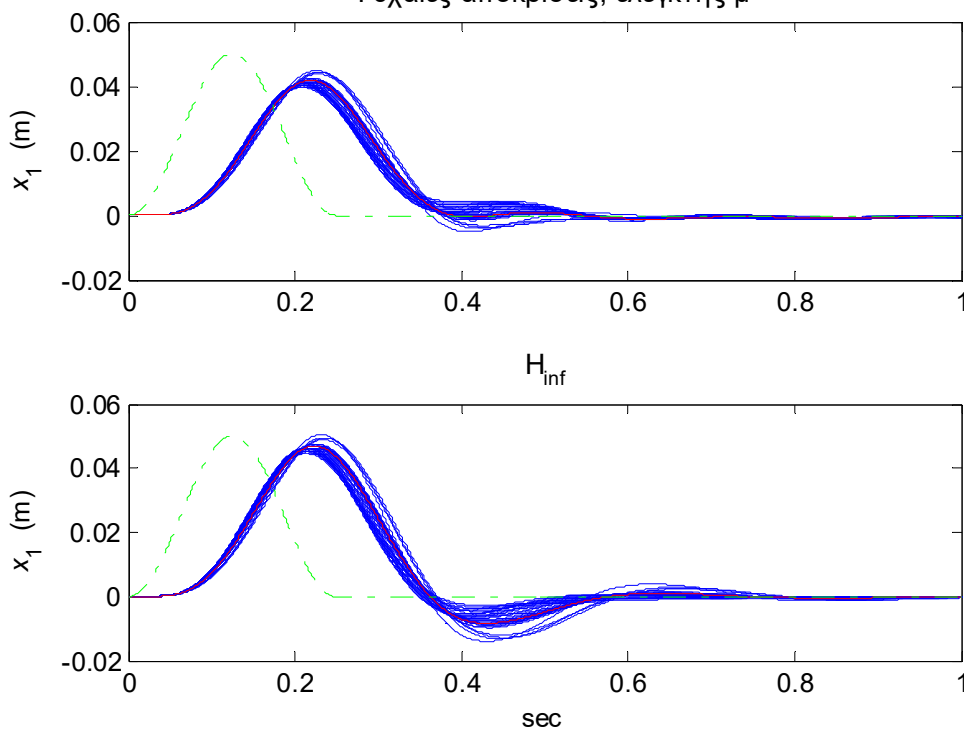
Στο Σχ. 6.11 φαίνεται ότι ο ελεγκτής  $\mu$  αποδίδει καλύτερα γύρω από την  $\omega_2=23,3$ , όμως είναι χειρότερος σε συχνότητες κάτω των 3 rad/sec. Τέλος στο Σχ. 6.12 φαίνονται οι χρονικές αποκρίσεις ενός τυχαίου δείγματος 40 συστημάτων εντός των ορίων της αβεβαιότητας, στην είσοδο  $r(t)$ . Όπως φαίνεται ο ελεγκτής  $\mu$ , επιδεικνύει καλύτερη συμπεριφορά (μικρότερη υπερύψωση και χρόνο αποκατάτασης) από τον  $\mathcal{H}_\infty$  του στόχου 1.

Βode διαταραχής-απόκλισης ανάρτησης (ονομαστικό υπόδειγμα επενεργητή)



Σχήμα 6.11 Διάγραμμα Bode μέτρου αβέβαιου συστήματος

Τυχαίες αποκρίσεις, ελεγκτής μ



Σχήμα 6.12 Χρονικές αποκρίσεις τυχαίου δείγματος

## Επιμύθιο

Στο σύγγραμμα αυτό παρουσίασα συνοπτικά την μεθοδολογία σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου,  $\mathcal{H}_\infty$ . Το βάρος στην παρουσίαση αυτή ήταν κυρίως στον τρόπο υλοποίησης της και λιγότερο στο μαθηματικό της υπόβαθρο. Ο λόγος είναι ότι τα μαθηματικά που χρειάζονται είναι αρκετά προχωρημένα, και μία πλήρης ανάλυση πιθανόν να δυσκόλευε και τελικά να σκίαζε, στους μη έχοντες το απαραίτητο μαθηματικό υπόβαθρο, τα ουσιαστικά στοιχεία. Εξ άλλου υπάρχει πλούσια ξενόγλωσση βιβλιογραφία για τα θέματα αυτά, από την οποία θα ξεχώριζα το βιβλίο των Dullerud και Paganini (2000). Επίσης θέλοντας να κρατήσω το μέγεθος όσο πιο μικρό γίνεται, έτσι ώστε η ύλη να είναι εύχρηστη, έχω παραλείψει κάποια θέματα που είναι αρκετά σημαντικά. Δύο από αυτά είναι οι εγγενείς περιορισμοί που μπορεί να υπάρχουν στην σχεδίαση των συστημάτων (π.χ. μηδενικά στο δεξιό ημιπίεδο) και τρόποι μείωσης της τάξης των ελεγκτών (που όπως προκύπτουν από την αρχική σχεδίαση είναι αρκετά, ίσως δε απαγορευτικά, υψηλοί).

Η σχεδιαστική μέθοδος που επέλεξα να παρουσιάσω δεν είναι φυσικά μοναδική. Απλά θεωρώ ότι μπορεί να δώσει ικανοποιητικές απαντήσεις σε όλες τις απαιτήσεις απόδοσης. Είναι όμως απαραίτητο να καταλαβαίνουμε τις παραδοχές που γίνονται, και τους περιορισμούς που αυτές υπονοούν, έτσι ώστε να μπορούμε να εκτιμούμε και την ποιότητα των παραγομένων υλοποιήσεων. Η συγκεκριμένη προσέγγιση λοιπόν, στηρίζεται σε δύο παραδοχές:

- Σαν μαθηματικό υπόδειγμα για την αβεβαιότητα θεωρήθηκε η χωρικά δομημένη μοναδιαία μπάλλα. Το υπόδειγμα αυτό είναι βέβαια αρκετά γενικό, και είδαμε πώς μέσω αυτού μπορέσαμε και χειριστήκαμε ένα μεγάλο φάσμα περιπτώσεων. Η αβεβαιότητα όμως μπορεί να εκφρασθεί και με πιο γενικές μορφές, όπως για παράδειγμα μέσω ολοκληρωματικών τετραγωνικών περιορισμών (IQC), Megretskii (1997).
- Πιο σημαντική είναι η υιοθέτηση του κριτηρίου  $\mathcal{H}_\infty$  σαν κατάλληλου για την αναπαράσταση του στόχου σχεδίασης. Το κριτήριο αυτό έχει σαν αποτέλεσμα έναν ελεγκτή «χειρότερης περίπτωσης» σε ότι αφορά στις διαταραχές και τον θόρυβο.

Αυτό που σημαίνει η προηγούμενη παράγραφος είναι το εξής: η χειρότερη περίπτωση σημάτων, με την έννοια της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$ , είναι σήματα με ενέργεια συγκεντρωμένη γύρω από την συχνότητα του μέγιστου μέτρου της απόκρισης του συστήματος, με χειρότερο σήμα ένα ημίτονο σε αυτή τη συχνότητα. Υιοθετώντας το κριτήριο  $\mathcal{H}_\infty$  αυτό που ουσιαστικά υποθέτουμε είναι ότι περιμένουμε τέτοια σήματα αλλά δεν ξέρουμε σε ποια συχνότητα. Αυτό μπορεί να είναι αφύσικο για δύο λόγους:

1. Αν πράγματι δεν ξέρουμε τίποτα για το φασματικό περιεχόμενο των σημάτων

διαταραχής ή θορύβου, τότε γιατί να υποθέσουμε ότι μπορεί να συμβεί το χειρότερο και να μη σχεδιάσουμε ένα σύστημα που να ελαχιστοποιεί την επίδραση του μέσου όρου των σημάτων; Μια τέτοια προσέγγιση οδηγεί στην υιοθέτηση του κριτηρίου  $\mathcal{H}_2$ .

2. Αν ξέρουμε προσεγγιστικά το φασματικό περιεχόμενο των σημάτων, τότε μπορούμε, μέσω κατάλληλων βαρών, να ενσωματώσουμε την πληροφορία αυτή στην σχεδίαση. Αυτό όμως επιτυγχάνεται πιο συστηματικά στο πλαίσιο του ελέγχου  $\mathcal{H}_2$  παρά του  $\mathcal{H}_\infty$ .

Για τους λόγους αυτούς η νόρμα  $\mathcal{H}_2$  φαίνεται πιο φυσική, από την πλευρά του μηχανικού, σε πολλές περιπτώσεις. Δυστυχώς όμως οι ιδιότητες της δεν την καθιστούν εφαρμόσιμη όταν εξετάζουμε την στιβαρότητα των συστημάτων ως προς την αβεβαιότητα. Ο λόγος είναι, όπως αναφέρθηκε και σε άλλα σημεία, ότι η νόρμα  $\mathcal{H}_\infty$  είναι επαγόμενη, γεγονός που οδηγεί σε δομή άλγεβρας Banach, όπου ισχύει το θεώρημα της μικρής απολαβής. Η νόρμα  $\mathcal{H}_2$  δεν είναι όμως επαγόμενη.

Θα μπορούσαμε λοιπόν να συνδυάσουμε τα προτερήματα των δύο προσεγγίσεων έτσι ώστε να καταλήξουμε σε μία πιο φυσική, εύρωστη σχεδίαση; Η απάντηση είναι ναι, και υπάρχουν πράγματι μέθοδοι που συνδυάζουν την εύρωστη απόδοση με την νόρμα  $\mathcal{H}_2$ . Τα αποτελέσματα είναι πάλι σε μορφή φραγμάτων με την διαφορά ότι δεν είναι τόσο σφικτά όσο στην περίπτωση της νόρμας  $\mathcal{H}_\infty$ . Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στον Yang (1999).

Εν κατακλείδει, μετά από είκοσι χρόνια έρευνας, έχουν αναπτυχθεί εργαλεία εύρωστου ελέγχου που να αντιμετωπίζουν το κλασικό πρόβλημα της ευρωστίας του ελέγχου LQG. Το γεγονός ότι η εικόνα δεν είναι τελείως καθαρή, είναι ίσως αναπόφευκτο, δεδομένης της συνύπαρξης δύο φιλοσοφιών: της χειρότερης περίπτωσης και του μέσου όρου.

## Βιβλιογραφία

### Βιβλία

- Dullerud G.E., Paganini F. *A course in robust control theory – A convex approach*. Springer, N.Y., 2000.
- Francis B.A. *A course in  $H_\infty$  control theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 1987.
- Goodwin G.C., Graebe S.F., Salgado M.E. *Control system design*. Prentice Hall, N.J., 2001.
- Halmos, P. *Finite dimensional vector spaces*. Van Nostrand Reinhold, Princeton, N.Y., 1958.
- Hung, Y.S., MacFarlane A.G.J. *Multivariable feedback: A quasi-classical approach*. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 40, Springer Verlag, Berlin, 1982.
- Jacobs O.L.R. *Introduction to Control Theory*. Oxford Science Publications, Oxford, 1993.
- Kolmogorov, A.N. and Fomin S.V. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Graylock, Rochester and Albany, 1957.
- Kwakernaak H and R. Sivan. *Linear optimal control systems*. Wiley, 1982.
- Lemmon M. *Loopshaping*. Course notes, Dept. of Electrical Engineering, University of Notre Dame, <http://www.nd.edu/~lemmon/courses/ee555>.
- Maciejowski, J.M. *Multivariable feedback design*. Addison-Wesley, 1994.
- Mayr, O. *The Origins of Feedback Control*. MIT Press, Cambridge, 1970.
- Naylor, A.W. and Sell, G.R. *Linear operator theory in Engineering and Science*. Holt, N. Y., 1971.
- Rosenbrock, M.M. *State space and multivariable theory*. John Wiley, 1970.
- Simmons, G.F. *Introduction to topology and modern analysis*. McGraw-Hill, N.Y., 1963.
- Skogestad S., Postlethwaite I. *Multivariable feedback control – Analysis and design*. Wiley, 1996.
- Young, P.M. *Robustness with parametric and dynamic uncertainty*. Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, 1993.
- Zhou, K. *Essentials of robust control*. Prentice Hall, N.J., 1998.

## Περιοδικά

- Boyd S., Desoer C.A, "Subharmonic functions and performance bounds in linear time invariant feedback systems", *IMA J. Math. Control and Info.*, **2**: 153-170.
- Lin, J. and I. Kanellakopoulos, "Road adaptive nonlinear design of active suspensions," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 714-718, 1997.
- Megretskii A. and A. Rantzer, "System analysis via integral quadratic constraints", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 42:819-830, 1997.
- Yang K.Y., Hall S.R. and E. Feron. Robust  $\mathcal{H}_2$  control. In *Recent Advances on LMI methods in Control*, eds. L. El Ghaoui, S. Niculescu, SIAM, 1999.
- Young, P., M. Newlin, and J. Doyle, "Practical computation of the mixed problem," *Proceedings of the American Control Conference*, pp. 2190-2194, June, 1992.
- Young, P. and J. Doyle, "Computation of mu with real and complex uncertainties," *Proceedings of the 29th IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 1230-1235, 1990.

## Ελληνική (ενδεικτική)

- Καρύμπακας Κ.Α., Σεργέτας Ε.Κ. Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (τόμοι 3), Αθήνα, 1977.
- Κινγκ Ρ.-Ε. Πληροφορικός έλεγχος, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1994.
- Κινγκ Ρ.-Ε. Βιομηχανικός έλεγχος, Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα, 1996.
- Κινγκ Ρ.-Ε. Υπολογιστική νοημοσύνη στον έλεγχο συστημάτων, Εκδόσεις Τραυλός-Κωσταράκη, Αθήνα, 1998.
- Κρικέλης Ν.Ι. Εισαγωγή στον αυτόματο έλεγχο, Αθήνα, 1985.
- Κρικέλης Ν.Ι. Μοντελοποίηση και βέλτιστος έλεγχος συστημάτων, Αθήνα, 1991.
- Κουμπουλής Φ.Ν. Βιομηχανικός έλεγχος, Εκδόσεις Νέων Τεχνολογιών, Αθήνα, 1999.
- Μάργαρης Ν.Ι. Μαθήματα εφαρμοσμένου αυτομάτου ελέγχου, Εκδόσεις Τζιόλα, Θεσσαλονίκη, 2002.
- Μπιτσιώρης Γ. Γραμμικά δυναμικά συστήματα, Πάτρα, 1989.
- Πακτίτης Σ. Συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα, 1987.
- Παρασκευόπουλος Π.Ν. Συστήματα αυτομάτου ελέγχου (τόμοι 2). Αθήνα, 1984.
- Παρασκευόπουλος Π.Ν. Βέλτιστος και στοχαστικός έλεγχος, Αθήνα, 1989.
- Παρασκευόπουλος Π.Ν. Έλεγχος συστημάτων με υπολογιστές, Αθήνα, 1991.



Παρασκευόπουλος Π.Ν. Αναγνώριση συστημάτων και προσαρμοστικός έλεγχος, Αθήνα, 1992.

Πετρίδης. Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (τόμοι 2).

Τζαφέστας Σ. Μαθήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Εισαγωγή στον κλασσικό αυτόματο έλεγχο, Αθήνα, 1999.

Τζαφέστας Σ. Μαθήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Τεχνικές ανάλυσης και σχεδίασης, βιομηχανικές εφαρμογές (2 τόμοι), Αθήνα, 1999.

Τζαφέστας Σ. Υπολογιστική νοημοσύνη, Αθήνα, 2002.

© Α. Πουλιέζος

## Ιστορικό εκδοχών

1.3

Ιστορικό εκδοχών.

Διόρθωση προτύπου ενεργητικής ανάρτησης.

© Α. Πουλιέζος