

# ΠΕΡΙ ΑΥΤΟΜΑΤΙΣΜΟΥ \*

**Α. Πουλιέζος**

**Χανιά**

**ΕΚΔΟΧΗ 3.9, Οκτώβριος 2011**

\* εκ του αυτός+μαίομαι (αναζητώ, ερευνώ): αυτό που λειτουργεί χωρίς εξωτερική επίδραση



## **ΜΕΡΟΣ 1ο**

### **I. Συστήματα μιας εισόδου μιας εξόδου**

#### **ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ**

**ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΚΑΙ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ  
ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ ΚΡΗΤΗΣ**

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>Κάποια μαθηματικά .....</b>	<b>6</b>
1.1	Ορισμοί .....	6
1.2	Μιγαδικοί αριθμοί και συναρτήσεις τους .....	6
1.3	Μετασχηματισμός Laplace.....	7
1.3.1	Εισαγωγή.....	7
1.3.2	Ιδιότητες και θεωρήματα του μετασχηματισμού Laplace.....	13
1.3.3	Μετασχηματισμοί Laplace τυπικών συναρτήσεων εισόδου .....	15
1.3.4	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ρητών συναρτήσεων .....	17
1.3.5	Επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω μετασχηματισμών Laplace .....	21
<b>2</b>	<b>Βασικές έννοιες.....</b>	<b>24</b>
2.1	Αναπαράσταση συστημάτων.....	24
2.1.1	Πράξεις επί δομικών διαγραμμάτων .....	32
2.2	Διαδικασία επίλυσης του προβλήματος σχεδίασης ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου .....	33
<b>3</b>	<b>Ανάλυση συστημάτων.....</b>	<b>35</b>
3.1	Διαδικασίες πρώτης τάξεως.....	35
3.2	Διαδικασίες δευτέρας τάξεως.....	39
3.2.1	Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας.....	41
3.3	Σχεδιαστικά κριτήρια χρονικής απόκρισης συστημάτων .....	45
3.3.1	Παράμετροι μεταβατικής απόκρισης .....	46
3.3.2	Ευστάθεια.....	54
3.3.3	Σφάλμα σταθερής κατάστασης .....	56
3.3.4	Μέγεθος ελέγχου.....	60
3.4	Συστήματα υψηλότερων τάξεων.....	61
3.4.1	Προσθήκη μηδενικών στην συνάρτηση μεταφοράς του απευθείας βρόχου .....	61
3.4.2	Προσθήκη πόλων στην συνάρτηση μεταφοράς του απευθείας βρόχου .....	63
3.4.3	Μέθοδος κυρίαρχων πόλων .....	65
<b>4</b>	<b>Σχεδίαση ελεγκτών.....</b>	<b>69</b>
4.1	Εισαγωγή .....	69
4.2	Ουσιώδη προτερήματα συστημάτων με ανατροφοδότηση .....	69
4.2.1	Ευαισθησία στην μεταβολή παραμέτρων .....	71
4.3	Είδη ελεγκτών .....	73
4.3.1	Ελεγκτής PID (αναλογικο-ολοκληρωτικο-διαφορικός).....	73
4.3.2	Πρακτική υλοποίηση ελεγκτών PID .....	89

4.3.3	Ελεγκτές προήγησης-καθυστέρησης φάσης .....	90
<b>5</b>	<b>Παραδείγματα .....</b>	<b>95</b>
5.1	Έλεγχος στάθμης.....	96
<b>6</b>	<b>Εν είδει επιλόγου.....</b>	<b>100</b>
	<b>Βιογραφίες .....</b>	<b>102</b>
	<b>Βιβλιογραφία .....</b>	<b>103</b>
	Ελληνική.....	103
	Αγγλική.....	104
	<b>Εκδοχολόγιο .....</b>	<b>108</b>

# 1 Κάποια μαθηματικά

## 1.1 Ορισμοί

Είναι συνηθισμένο φαινόμενο, όταν ένας κλάδος των φυσικών επιστημών χρησιμοποιεί μαθηματικές έννοιες, να αλλάζει την ορολογία έτσι ώστε αυτή να έχει φυσική σημασία. Η θεωρία των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου δεν αποτελεί εξαίρεση, γι' αυτό θα παραθέσουμε εξ αρχής τις αντιστοιχίες.

Ας δούμε για παράδειγμα, την μη ομογενή, γραμμική διαφορική εξίσωση δευτέρας τάξης με σταθερούς συντελεστές,

$$\ddot{\theta}(t) + 2\sigma\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = f(t)$$

Η γενική λύση αυτής της εξίσωσης είναι το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μίας συγκεκριμένης λύσης:

$$\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$$

Όταν η εξίσωση αναπαριστά φυσικά συστήματα, η λύση  $\theta_1(t)$  της ομογενούς ονομάζεται *φυσική απόκριση* ενώ η συγκεκριμένη λύση  $\theta_2(t)$  *εξαναγκασμένη απόκριση*. Στην θεωρία συστημάτων ελέγχου η συνάρτηση  $f(t)$  ονομάζεται *συνάρτηση εισόδου*, ενώ η  $\theta(t)$  *συνάρτηση εξόδου*.

## 1.2 Μιγαδικοί αριθμοί και συναρτήσεις τους

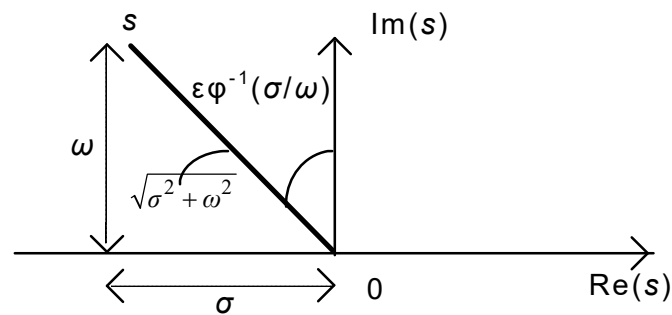
Στην μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου οι μιγαδικοί αριθμοί και οι συναρτήσεις τους εμφανίζονται πολύ συχνά. Για τον λόγο αυτό θα παραθέσουμε κάποιες βασικές έννοιες.

Οι μιγαδικές μεταβλητές αναπαριστώνται σ' ένα διάγραμμα ορθογωνίων συντεταγμένων που ονομάζεται *επίπεδο*  $s$ . Έτσι, μία μεταβλητή  $s = \sigma + j\omega$  αναπαρίσταται όπως δείχνει το Σχ. 1.1.

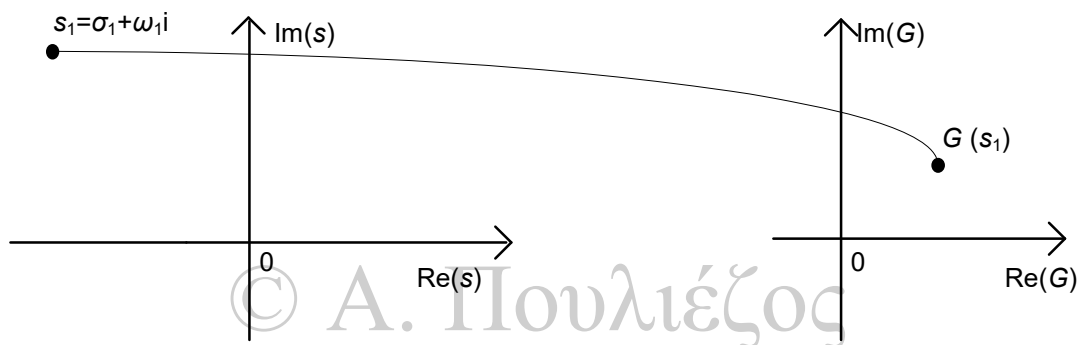
Το τμήμα του επιπέδου με αρνητικά  $\sigma$  ονομάζεται *αριστερό ημιεπίπεδο* ενώ τα θετικά  $\sigma$  ορίζουν το *δεξιό ημιεπίπεδο*. Ο άξονας  $\sigma = 0$  ονομάζεται *φανταστικός άξονας*.

Οι συναρτήσεις μιγαδικών μεταβλητών αναπαρίστανται και αυτές από πραγματικά και φανταστικά μέρη. Έτσι αν η  $G(s)$  είναι μιγαδική συνάρτηση,

$$G(s) = \text{Re } G + j \text{Im } G$$

Σχήμα 1.1 Επίπεδο  $s$ 

όπου  $\text{Re}$ ,  $\text{Im}$  δηλώνουν το πραγματικό και φανταστικό μέρος αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι για την γραφική απεικόνιση μίας μιγαδικής συνάρτησης απαιτούνται 4 διαστάσεις. Έτσι, το καλύτερο που μπορεί να γίνει είναι μία απεικόνιση της μορφής του Σχ. 1.2.



Σχήμα 1.2 Μιγαδική συνάρτηση

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφεί σε εκθετική μορφή ως,

$$s = \sigma + j\omega = |s|e^{j\angle s}, |s| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}, \angle s = \text{τοξεφ}\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

όπου  $|s|$  είναι το μέτρο και  $\angle s$  η γωνία του μιγαδικού αριθμού.

## 1.3 Μετασχηματισμός Laplace

### 1.3.1 Εισαγωγή

Ο μετασχηματισμός Laplace είναι μία μαθηματική διαδικασία με την οποία επετεύχθη η επίλυση γραμμικών, μη ομογενών διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές, με αυθαίρετες συναρτήσεις εισόδου (το μη ομογενές μέρος). Ουσιαστικά, δηλαδή ο μετασχηματισμός Laplace, είναι η επίλυση του προβλήματος της αναπαράστασης αυθαίρετων, μη περιοδικών συναρτήσεων στην μορφή  $Ce^{st}$ , όπου  $s$  μιγαδικός αριθμός. Για να γίνει αυτό κατανοητό, ας θεωρήσουμε ξανά την διαφορική εξίσωση

δευτέρας τάξης,

$$\ddot{\theta}(t) + 2\sigma\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = f(t) \quad (1.1)$$

Ξέρουμε (;) από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ότι η γενική λύση της (1.1) είναι το άθροισμα της λύσης της αντίστοιχης ομογενούς και μιας συγκεκριμένης λύσης της (1.1). Δηλαδή,

$$\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)$$

όπου,

$$\ddot{\theta}_1(t) + 2\sigma\dot{\theta}_1(t) + \omega_0^2\theta_1(t) = 0$$

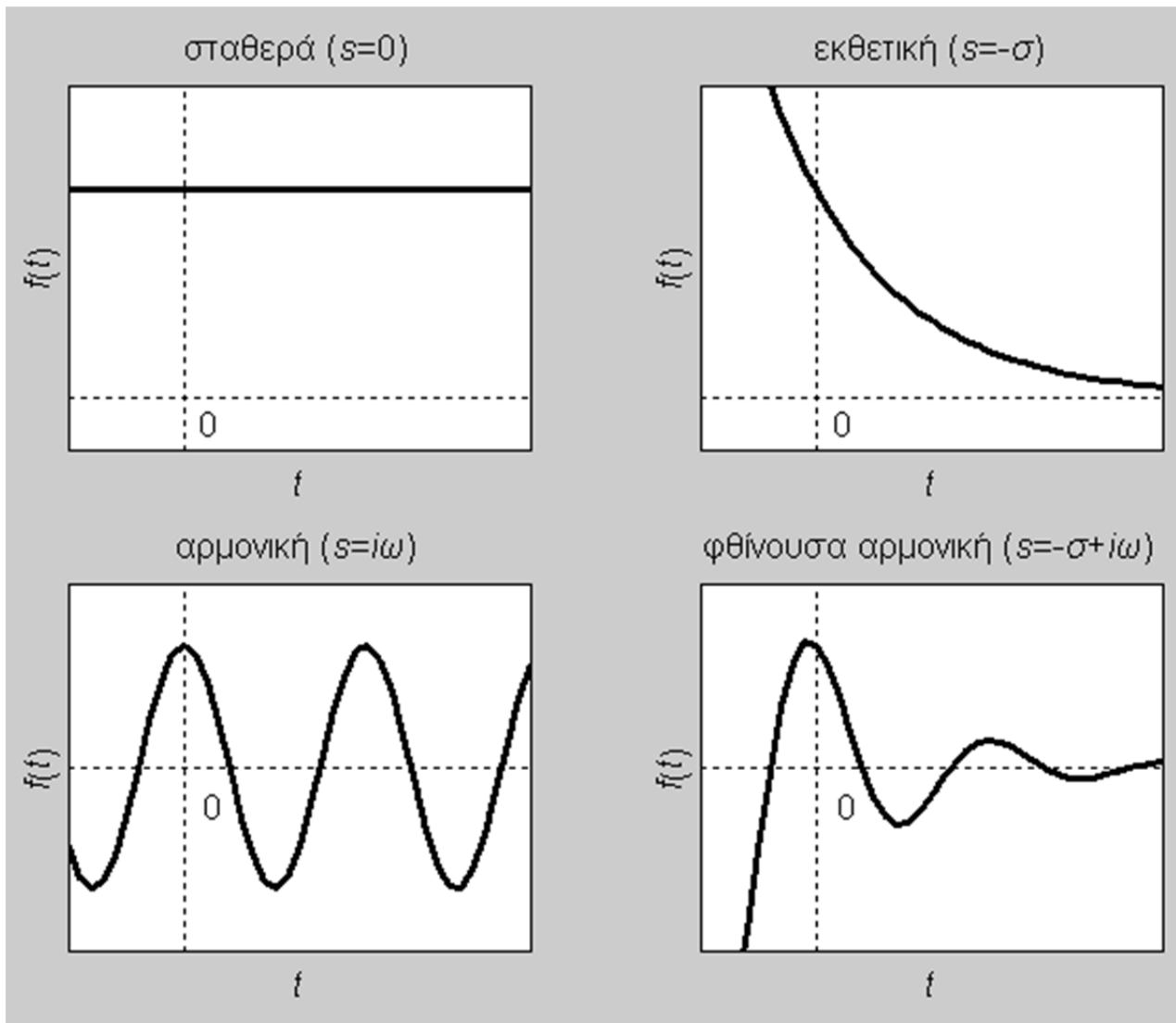
Αν η  $f(t)$  είναι της μορφής  $Fe^{st}$ , όπου  $F$  σταθερά και  $s$  μιγαδικός αριθμός, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την κλασική προσέγγιση σύμφωνα με την οποία η λύση  $\theta_2(t)$  είναι και αυτή της ίδιας μορφής  $\Theta e^{st}$ , και αντικαθιστώντας βρίσκουμε,

$$s^2\Theta e^{st} + 2\sigma s\Theta e^{st} + \omega_0^2\Theta e^{st} = Fe^{st} \Rightarrow \Theta = \frac{F}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \theta_2(t) = \frac{Fe^{st}}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2}$$

Υπενθυμίζουμε ότι στην ορολογία των φυσικών δυναμικών συστημάτων η συγκεκριμένη λύση  $\theta_2(t)$  καλείται **εξαναγκασμένη**, ενώ η  $\theta_1(t)$  **φυσική**. Κάποιοι τύποι συναρτήσεων που μπορούν να αναπαρασταθούν με τη μορφή  $e^{st}$  φαίνονται στο Σχ. 1.3.



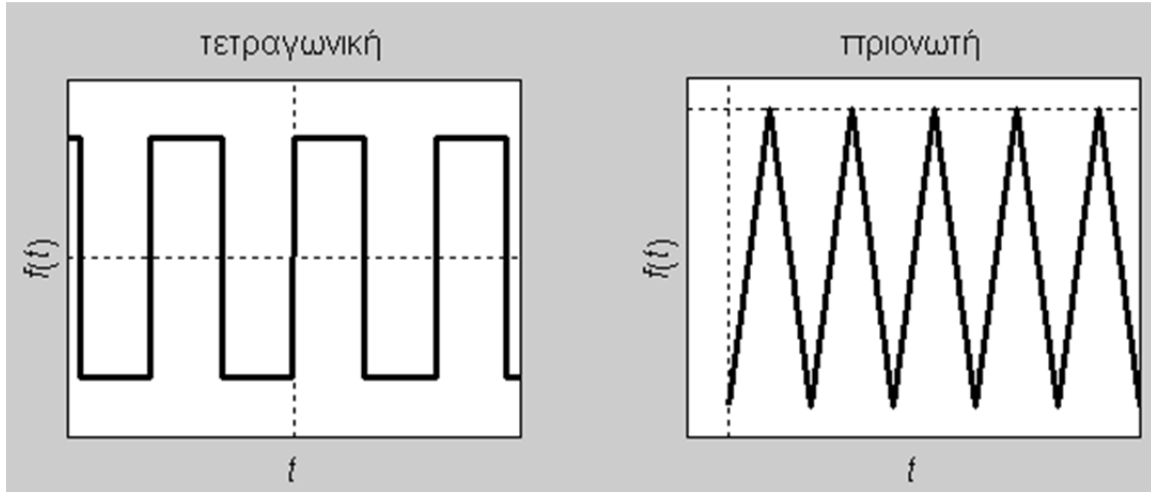
Σχήμα 1.3 Συναρτήσεις της μορφής  $e^{st}$ 

Τώρα εάν η  $f(t)$  δεν είναι της μορφής που προαναφέραμε, αλλά κάποια αυθαίρετη συνάρτηση, ίσως μη συνεχής, τότε η προσέγγιση αυτή δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί εκτός εάν η συνάρτηση  $f(t)$  μπορεί να αναπαρασταθεί σαν συνδυασμός όρων  $e^{st}$ . Θα δούμε αυτό το πρόβλημα της γενίκευσης κλιμακωτά. Μία πρώτη λύση δίνει η **μυγαδική σειρά Fourier**. Μέσω αυτής, μπορούμε να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε **περιοδική** συνάρτηση  $x(t)$  μέσω των τύπων,

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{st} \quad (1.2)$$

$$C_n = \int_{\tau}^{T+\tau} x(t) e^{-st} dt, \quad s = \frac{2\pi n}{T} i$$

που την ορίζουν. Με τον όρο «περιοδική» εννοείται οποιαδήποτε συνάρτηση επαναλαμβάνει τον εαυτό της κάθε  $T$  δεύτερα. Παραδείγματα φαίνονται στο Σχ. 1.4.



Σχήμα 1.4 Τυπικές περιοδικές συναρτήσεις

Η ιδέα πίσω από την σειρά Fourier μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να επεκτείνουμε την εφαρμογή της και σε **απεριοδικές** συναρτήσεις με το ακόλουθο τέχνασμα: θεωρούμε τις απεριοδικές συναρτήσεις περιοδικές με άπειρη περίοδο. Αυτό απαιτεί την εύρεση κάποιων ορίων. Κατ' αρχήν, ας γράψουμε την (1.2) στην ισοδύναμη μορφή,

$$x(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_0 C(s) e^{st} \right]_{s=n\omega_0 i} \tag{1.3}$$

$$C(s) = \left[ \int_{-\pi/\omega_0}^{\pi/\omega_0} x(t) e^{-st} dt \right]_{s=n\omega_0 i}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Τώρα ας θέσουμε  $T \rightarrow \infty$  στην (1.3). Αυτό που συμβαίνει είναι ότι το  $\omega_0$ , που δηλώνει την απόσταση μεταξύ διαδοχικών συχνοτήτων (την «ανάλυση» της αναπαράστασης), τείνει στο 0. Γράφοντάς το σαν  $d\omega = ds/i$  και αντικαθιστώντας τη πρόσθεση με το ολοκλήρωμα, παίρνουμε,

$$x(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{s=-\infty}^{s=\infty} ds C(s) e^{st} \right]_{s=\omega i} \tag{1.4α}$$

$$C(s) = \left[ \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t) e^{-st} dt \right]_{s=\omega i} \tag{1.4β}$$

Η εξίσωση (1.4α) ορίζει το **ολοκλήρωμα Fourier** ενώ η (1.4β) τον **μετασχηματισμό Fourier**. Οι εξισώσεις αυτές μεγαλώνουν την οικογένεια των συναρτήσεων  $x(t)$  που μπορούν να χρησιμοποιηθούν, αλλά οι απαιτήσεις σύγκλισης του ολοκληρώματος (1.4β) και το γεγονός ότι  $s=\omega i$  δρουν περιοριστικά. Για παράδειγμα η συνάρτηση μοναδιαίας βαθμίδας  $x(t)=x_0 u(t)$ , που χρησιμοποιείται ευρέως σαν μαθηματικό υπόδειγμα στη μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, δεν έχει πεπερασμένο

μετασχηματισμό Fourier. Για να διευρύνουμε ακόμη περισσότερο την οικογένεια των συναρτήσεων  $x(t)$ , θέτουμε  $s = \sigma + \omega i$  στην (1.4β), με το  $\sigma$  αρκετά μεγάλο ώστε το ολοκλήρωμα της (1.4β) να συγκλίνει:

$$C(s) = \left[ \int_{t=-\infty}^{t=\infty} x(t) e^{-\sigma t} e^{-\omega t i} dt \right]_{s=\sigma+\omega i} \quad (1.5)$$

Η (1.5) ορίζει τον **αμφίπλευρο μετασχηματισμό Laplace**. Οι συναρτήσεις  $x(t)$  που μπορούν πλέον να αναπαρασταθούν μέσω της (1.5) είναι όλες αυτές για τις οποίες ισχύει,

$$x(t) = A e^{\alpha t} u(t) \\ \operatorname{Re}(\alpha) < \operatorname{Re}(s)$$

Επειδή  $x(t) < 0$  για  $t < 0$  στα φυσικά συστήματα, η (1.5) γράφεται και ως,

$$X(s) = \left[ \int_{t=0^-}^{t=\infty} x(t) e^{-st} dt \right]_{s=\sigma+\omega i} \quad (1.6)$$

Η (1.6) ορίζει τον φημισμένο (μονόπλευρο) **μετασχηματισμό Laplace**. Συνοδεύεται από την αντίστοιχη αντίστροφη συνάρτηση,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[X(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} X(s) e^{st} ds \quad (1.7)$$

Ας ανακεφαλαιώσουμε λοιπόν τι πετύχαμε: μπορούμε πλέον να αναπαραστήσουμε οποιαδήποτε συνάρτηση  $x(t)$  ως ένα συνδυασμό εκθετικών όρων μέσω της (1.7) αρκεί το ολοκλήρωμα να συγκλίνει. Ευτυχώς ο όρος αυτός ικανοποιείται για τις περισσότερες από τις συναρτήσεις που χρησιμοποιούνται στα συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Έχοντας πετύχει το στόχο μας, ας γυρίσουμε πίσω στην αρχική διαφορική εξίσωση,

$$\ddot{\theta}(t) + 2\sigma\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = f(t)$$

και ας γράψουμε την  $f(t)$  μέσω της (1.7),

$$\ddot{\theta}(t) + 2\sigma\dot{\theta}(t) + \omega_0^2\theta(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} F(s) e^{-st} dt$$

Στη συνέχεια ας υποθέσουμε ότι και η  $\theta(t)$  έχει την ίδια μορφή, δηλαδή,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} \Theta(s) e^{-st} dt \right) + 2\sigma \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} \Theta(s) e^{-st} dt \right) + \omega_0^2 \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} \Theta(s) e^{-st} dt \right) \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{s=\sigma_0-\infty i}^{s=\sigma_0+\infty i} F(s) e^{-st} dt \end{aligned}$$

Κάνοντας τις πράξεις προκύπτει (υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες),

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} F(s) \Rightarrow \theta(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} F(s) \right\}$$

Με τη σχέση αυτή ολοκληρώνεται η διαδικασία επίλυσης των μη ομογενών, γραμμικών, διαφορικών εξισώσεων με σταθερούς συντελεστές με αυθαίρετες συναρτήσεις εισόδου.

Ο άνθρωπος που εισήγαγε την τεχνική των μετασχηματισμών Laplace στην μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου ήταν ο Oliver Heaviside (1850–1925). Η θεωρία που προέκυψε και που συνεχίστηκε μέχρι περίπου το 1960, ονομάζεται συλλήβδην<sup>1</sup> «κλασσικός έλεγχος». Όμως, κρίνοντας εκ των υστέρων, ένας πιο σωστός όρος θα ήταν «έλεγχος συστημάτων μίας εισόδου-μίας εξόδου».

### Ανακεφαλαιώνοντας,

Ο (ευθύς μονόπλευρος) μετασχηματισμός Laplace μίας συνάρτησης  $f(t)$  ορίζεται ως,

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_{t=0^-}^{\Delta \infty} f(t) e^{-st} dt = F(s) \quad (1.8)$$

όπου  $s=a+bi$  είναι μιγαδικός αριθμός. Ο συμβολισμός  $t=0^-$  δηλώνει τον χρόνο «λίγο πριν το 0». Ο λόγος γι' αυτή την λεπτομέρεια είναι ότι αρκετές συναρτήσεις που μας ενδιαφέρουν έχουν ασυνέχεια στο 0 (π.χ. η κρουστική συνάρτηση  $\delta(t)$ ). Επίσης η χρήση του μονόπλευρου και όχι του αμφίπλευρου (δηλαδή με όρια το  $\pm\infty$ ) μετασχηματισμού δικαιολογείται από το γεγονός ότι σε φυσικά συστήματα δεν ενδιαφέρει ο χρόνος πριν το μηδέν.

Προκειμένου το ολοκλήρωμα (1.8) να συγκλίνει, η  $f(t)$  πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη,

<sup>1</sup> συνολικά, εκ του συλλαμβάνω

$$\int_{t=0^-}^{\infty} |f(t)| e^{-\sigma t} dt < \infty \text{ για κάποιο } \sigma > \sigma_c \quad (1.9)$$

Αυτή ισχύει αν η  $f(t)$  είναι τμηματικά συνεχής και εκθετικής τάξης, δηλαδή αν,

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_c t}, \quad 0 \leq t < \infty \quad (1.10)$$

Η παράμετρος  $\sigma_c$  καλείται **περιοχή σύγκλισης** του μετασχηματισμού.

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ορίζεται ως,

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} F(s) e^{st} ds = f(t)$$

Ευτυχώς δεν θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τέτοια ολοκληρώματα, ο τύπος όμως παρατίθεται εδώ για λόγους πληρότητας. Ο λόγος είναι ότι με την χρήση διαφόρων ιδιοτήτων και θεωρημάτων του μετασχηματισμού Laplace, μπορούμε να βρούμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό πολύπλοκων συναρτήσεων έχοντας σαν βάση έναν αρχικό πίνακα τυπικών συναρτήσεων.

### 1.3.2 Ιδιότητες και θεωρήματα του μετασχηματισμού Laplace

Ο μετασχηματισμός Laplace έχει πολλές ιδιότητες και θεωρήματα. Στην συνέχεια παραθέτουμε τα πιο χρήσιμα για την μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

- **Γραμμικότητα.** Ο μετασχηματισμός Laplace είναι ένας γραμμικός μετασχηματισμός, δηλαδή ισχύει:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] &= \mathcal{L}[c_1 f_1(t)] + \mathcal{L}[c_2 f_2(t)] \\ &= c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s) \end{aligned}$$

όπου τα  $c_i$  είναι σταθερές.

- **Μετασχηματισμός Laplace παραγώγων.** Ο μετασχηματισμός Laplace της πρώτης παραγώγου μίας συνάρτησης, δίνεται από την σχέση,

$$\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] = sF(s) - f(0^-), \quad f^{(1)}(t) \equiv \frac{df(t)}{dt} \quad (1.11)$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό (1.8), έχουμε,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f^{(1)}(t)] &= \int_0^- \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) e^{-st} dt = \int_0^- e^{-st} df(t) = \\ &= f(t)e^{-st} \Big|_0^- + s \int_0^- f(t)e^{-st} dt = sF(s) - f(0^-)\end{aligned}$$

όπου έγινε χρήση του τύπου της ολοκλήρωσης κατά μέρη.

Ο τύπος αυτός μπορεί να γενικευθεί για την  $n$ -οστή παράγωγο,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-1-k)}(0^-) \quad (1.12)$$

Ο τύπος αυτός είναι ιδιαίτερα εύχρηστος όταν όλες οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές, μία υπόθεση που συνηθίζεται στην μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Στην περίπτωση αυτή,

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s)$$

● *Μετατόπιση στο πεδίο του χρόνου.*

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0 \quad (1.13)$$

● *Μετατόπιση στο πεδίο της συχνότητας.*

$$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a) \quad (1.14)$$

● *Θεώρημα τελικής τιμής.* Το θεώρημα αυτό χρησιμοποιείται ευρέως στην μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, αφού επιτρέπει τον υπολογισμό της τελικής τιμής της λύσης της διαφορικής εξίσωσης (δηλ.  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ ) χωρίς να χρειαστεί να επιλυθεί η εξίσωση.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad (1.15)$$

Η σχέση αυτή ισχύει εφόσον,

α. Το αριστερό όριο υπάρχει και,

β. Οι ρίζες του παρανομαστή της  $sF(s)$  έχουν αρνητικά πραγματικά μέρη. Ο περιορισμός αυτός εξασφαλίζει την ισχύ της (1.9).

Απόδειξη: Παίρνοντας το όριο και των δύο μελών της (1.11) καθώς το  $s \rightarrow \infty$ , έχουμε για μεν το αριστερό,

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \mathcal{L}[f^{(1)}(t)] &= \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \frac{df(t)}{dt} e^{-st} dt = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \int_0^x \frac{df(t)}{dt} dt = \lim_{x \rightarrow \infty} f(t) \Big|_0^x = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(0^-) \end{aligned} \quad (1.16)$$

ενώ για το δεξιό,

$$\lim_{s \rightarrow 0} [sF(s) - f(0^-)] = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(0^-) \quad (1.17)$$

Συγκρίνοντας τις (1.16), (1.17) προκύπτει η (1.15).

### 1.3.3 Μετασχηματισμοί Laplace τυπικών συναρτήσεων εισόδου

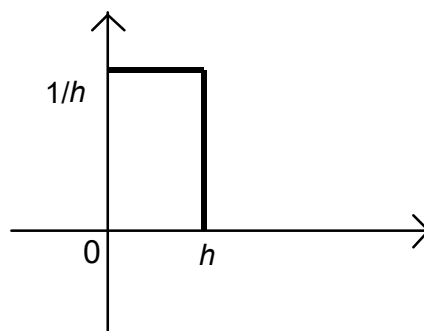
Στην μελέτη της συμπεριφοράς συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, χρησιμοποιούνται σαν είσοδοι (δηλαδή σήματα αναφοράς ή επιθυμητή συμπεριφορά) συγκεκριμένες συναρτήσεις, που έχουν φυσική σημασία. Αυτές χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες: πολυωνυμικές (βήμα, αναρρίχηση κλπ.) και αρμονικές (ημίτονο, συνημίτονο κλπ.). Επομένως οι μετασχηματισμοί Laplace αυτών των συναρτήσεων πρέπει να είναι γνωστοί.

A. Κρουστική συνάρτηση ή συνάρτηση Dirac (*impulse function*).

Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως,

$$\delta(t - T) = \begin{cases} 0 & t \neq T \\ \infty & t = T \end{cases} \quad (1.18)$$

Η γραφική της παράσταση φαίνεται στο Σχ. 1.5. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να εννοηθεί αν φανταστούμε ένα ορθογώνιο με πλευρές  $h$  και  $1/h$ , δηλαδή εμβαδού 1. Το όριο του ορθογωνίου καθώς το  $h \rightarrow 0$  είναι η κρουστική συνάρτηση.



Σχήμα 1.5 Κρουστική συνάρτηση

Η κρουστική συνάρτηση χρησιμοποιείται σαν μαθηματικό πρότυπο ξαφνικών διαταραχών πολύ μικρής διάρκειας, π.χ. βύθισμα τάσης. Χρησιμοποιείται επίσης για την προσομοίωση αρχικών συνθηκών σαν εξωγενείς μεταβλητές. Ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης βρίσκεται εύκολα από τον ορισμό:

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \Delta(s) = 1$$

B. Μοναδιαία βηματική συνάρτηση (*unit step function*).

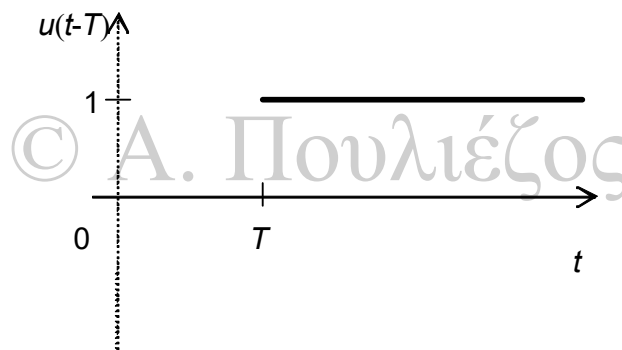
Η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως,

$$u(t-T) = \begin{cases} 1 & t > T \\ 0 & t < T \\ \text{αόριστο} & t = T \end{cases} \quad (1.19)$$

Η βηματική και κρουστική συνάρτηση σχετίζονται καθόσον,

$$\delta(t) = \frac{du}{dt}, u(t) = \int_{-\infty}^t \delta(\lambda) d\lambda$$

Η γραφική της παράσταση, φαίνεται στο Σχ. 1.6.



Σχήμα 1.6 Μοναδιαία βηματική συνάρτηση

Η βηματική συνάρτηση χρησιμοποιείται σαν το μαθηματικό υπόδειγμα σταθερής συμπεριφοράς, δηλαδή σε περιπτώσεις όπου είναι επιθυμητό η έξοδος να έχει σταθερή τιμή, π.χ. η τάση ενός συστήματος παροχής ηλεκτρικής ενέργειας, η ταχύτητα ενός κινητήρα κλπ. Ο μετασχηματισμός της βρίσκεται εύκολα από τον ορισμό,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t-T)] &= \int_{0^-}^{\infty} u(t-T)e^{-st} dt = \int_T^{\infty} u(t-T)e^{-st} dt \\ &= -\left. \frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{s} \right|_T^{\infty} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( -\frac{e^{-(\sigma+j\omega)t}}{s} \right) - \left( -\frac{e^{-sT}}{s} \right) \end{aligned}$$

Το όριο είναι μηδέν αν  $\sigma > 0$ . Άρα,



$$\mathcal{L}[u(t-T)] = \frac{e^{-sT}}{s}, \quad \forall s = \sigma + j\omega, \quad \sigma > 0$$

Ειδικότερα, αν  $T=0$ ,

$$\mathcal{L}[u(t)] = U(s) = \frac{1}{s}, \quad \forall s = \sigma + j\omega, \quad \sigma > 0$$

Γ. *Εκθετικές συναρτήσεις.*

Ο μετασχηματισμός της συνάρτησης  $Mu(t)e^{-at}$  είναι,

$$\mathcal{L}[Mu(t)e^{-at}] = \frac{M}{s+a}$$

Ο τύπος αυτός μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εύρεση μετασχηματισμών συναρτήσεων που μπορούν να γραφούν συναρτήσεις του  $e$ . Για παράδειγμα,

$$\mathcal{L}[u(t)\eta\mu\omega(t)] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

Η ύπαρξη του όρου  $u(t)$  υποδηλώνει ότι οι συναρτήσεις ορίζονται για  $t > 0$ .

### 1.3.4 Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace ρητών συναρτήσεων

Όπως θα δούμε και στην συνέχεια, θα χρειαστεί να υπολογίσουμε τον αντίστροφο μετασχηματισμό ρητών συναρτήσεων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής,

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} = \frac{b(s)}{a(s)}, \quad m < n$$

Αυτό θα επιτευχθεί όχι με την χρήση του αναλυτικού τύπου, αλλά με την μετατροπή της ρητής συνάρτησης σε απλούστερη μορφή, που να είναι αντιστρέψιμη με την χρήση των πινάκων Laplace. Η μετατροπή αυτή γίνεται με την χρήση της τεχνικής των μερικών κλασμάτων, γνωστής, φαντάζομαι και από άλλες περιπτώσεις. Η διαδικασία έχει τρεις μορφές ανάλογα με τις ρίζες του παρανομαστή της  $F(s)$ . Έστω  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  οι ρίζες του  $a(s)$ .

A. *Διακεκριμένες ρίζες.* Στην περίπτωση αυτή, η  $F(s)$  γίνεται,

$$F(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \dots + \frac{c_k}{s - \lambda_k} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

οπότε αντιστρέφοντας κάθε όρο παίρνουμε,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_k e^{\lambda_k t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

Οι συντελεστές  $c_i$  βρίσκονται από την σχέση,

$$c_k = \lim_{s \rightarrow \lambda_k} (s - \lambda_k) F(s), \quad k = 1, \dots, n \quad (1.20)$$

**Παράδειγμα 1.1** Να υπολογισθεί ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της

$$F(s) = \frac{4s + 2}{s(s+1)(s+2)}.$$

Λύση: Οι ρίζες της  $F(s)$  είναι διακεκριμένες (0, -1, -2). Οι συντελεστές είναι,

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{4s + 2}{(s+1)(s+2)} = 1$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1)F(s) = \lim_{s \rightarrow -1} \frac{4s + 2}{s(s+2)} = 2$$

$$c_3 = \lim_{s \rightarrow -2} (s+2)F(s) = \lim_{s \rightarrow -2} \frac{4s + 2}{s(s+1)} = -3$$

Επομένως,

© Α. Πουλιέζος

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{2}{s+1} - \frac{3}{s+2} \Rightarrow$$

$$f(t) = 1 + 2e^{-t} - 3e^{-2t}$$

**B.** Μη διακεκριμένες πραγματικές ρίζες. Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι η ρίζα  $\lambda_1$  του  $a(s)$  έχει πολλαπλότητα  $r$ , δηλαδή,

$$a(s) = (s - \lambda_1)^r \prod_{i=r+1}^n (s - \lambda_i)$$

Τότε η  $F(s)$  αναλύεται σε άθροισμα μερικών κλασμάτων ως εξής:

$$F(s) = \frac{c_1}{(s - \lambda_1)} + \dots + \frac{c_r}{(s - \lambda_1)^r} + \frac{c_{r+1}}{s - \lambda_{r+1}} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n} \quad (1.21)$$

Αντιστρέφοντας την (1.21) παίρνουμε,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = c_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + c_r t^{r-1} e^{\lambda_1 t} + c_{r+1} e^{\lambda_{r+1} t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

Οι συντελεστές  $c_i$  που αντιστοιχούν στην πολλαπλή ρίζα βρίσκονται από τον τύπο:

$$c_k = \operatorname{op}_{s \rightarrow \lambda_1} \left\{ \frac{1}{(r-k)!} \frac{d^{r-k}}{ds^{r-k}} \left[ (s - \lambda_1)^r F(s) \right] \right\}, \quad k = 1, \dots, r \quad (1.22)$$

ενώ οι υπόλοιποι από την (1.20).

**Παράδειγμα 1.2** Να βρεθεί η  $y(t)$  αν  $Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$ .

Λύση: Η ανάπτυξη του  $Y(s)$  σε μερικά κλάσματα δίνει,

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s + \omega_n} + \frac{c_3}{(s + \omega_n)^2}$$

όπου,

$$\begin{aligned} c_3 &= \operatorname{op}_{s \rightarrow -\omega_n} (s + \omega_n)^2 Y(s) = \operatorname{op}_{s \rightarrow -\omega_n} \left\{ \frac{\omega_n^2}{s} \right\} = -\omega_n \\ c_2 &= \operatorname{op}_{s \rightarrow -\omega_n} \left\{ \frac{d}{ds} \left[ (s + \omega_n)^2 Y(s) \right] \right\} = \operatorname{op}_{s \rightarrow -\omega_n} \left\{ -\frac{\omega_n^2}{s^2} \right\} = -1 \\ c_1 &= 1 \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση δε προκύπτει,

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \omega_n} - \frac{\omega_n}{(s + \omega_n)^2}$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace δίνει:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

*Γ. Μιγαδικές ρίζες.* Έστω, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι το  $a(s)$  έχει ένα ζευγάρι συζυγών μιγαδικών ριζών  $\lambda_{1,2} = \sigma \pm \omega i$ . Η περίπτωση αυτή δεν διαφέρει ουσιαστικά από την (Α), αφού βρίσκουμε,

$$F(s) = \frac{c_1}{s - \lambda_1} + \frac{\bar{c}_1}{s - \bar{\lambda}_1} + \dots + \frac{c_k}{s - \lambda_k} + \dots + \frac{c_n}{s - \lambda_n}$$

$$f(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} + \dots + c_k e^{\lambda_k t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t}$$

όπου το σύμβολο « $\bar{\phantom{x}}$ » σημαίνει συζυγές. Επίσης η περίπτωση πολλαπλών μιγαδικών ριζών αντιμετωπίζεται παρόμοια με την (B). Παρ' όλ' αυτά το πρόβλημα έγκειται στο ότι ενδιαφερόμαστε για πραγματικές ρίζες, και επομένως η μιγαδική συνάρτηση  $\bar{c}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t}$  πρέπει να μετατραπεί σε πραγματική. Η διαδικασία αυτή μπορεί να είναι όμως αρκετά κουραστική και βασικά περιέχει τα ακόλουθα βήματα:

1. Υπολογισμός του  $c_1$ ,

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow \lambda_1} (s - \lambda_1) F(s)$$

2. Υπολογισμός του αντίστοιχου όρου της χρονικής απόκρισης,

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + \bar{c}_1 e^{\bar{\lambda}_1 t} = |c_1| e^{\sigma t} \left[ e^{i\angle c_1} e^{i\omega t} + e^{-i\angle c_1} e^{-i\omega t} \right] \quad (1.23)$$

$$= 2|c_1| e^{\sigma t} \cos(\omega t + \angle c_1)$$

(Προσοχή: το  $c_1$  αντιστοιχεί στην ρίζα με θετικό πρόσημο)

**Παράδειγμα 1.3** Να βρεθεί ο μετασχηματισμός Laplace της  $F(s) = \frac{s+5}{s(s^2+8s+25)}$ .

Λύση: Σύμφωνα με τα προηγούμενα τα μερικά κλάσματα θα είναι

$$F(s) = \frac{c_1}{s + (4 + 3i)} + \frac{\bar{c}_1}{s + (4 - 3i)} + \frac{c_2}{s}$$

Οι συντελεστές είναι,

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) = \frac{s+5}{s^2+8s+25} \Big|_{s=0} = \frac{1}{5}$$

$$c_1 = \lim_{s \rightarrow -4-3i} (s+4+3i)F(s) = \frac{1-3i}{(-4-3i)(-6i)} = \frac{1-3i}{-18+24i} = \frac{1}{30}(-3+i)$$

Οπότε, σύμφωνα και με την (1.23),

$$f(t) = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{10}}{15} e^{-4t} \left[ \sin\left(3t + \varepsilon\varphi^{-1}\left(-\frac{1}{3}\right)\right) \right]$$

αφού  $|c_1| = \frac{1}{30}\sqrt{10}$ ,  $\angle c_1 = \varepsilon\varphi^{-1}(-1/3)$ .

### 1.3.5 Επίλυση διαφορικών εξισώσεων μέσω μετασχηματισμών Laplace

Ας θεωρήσουμε την γενική μη ομογενή διαφορική εξίσωση  $n$  τάξης με σταθερούς συντελεστές,

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = b_m r^{(m)}(t) + b_{m-1}r^{(m-1)}(t) + \dots + b_0r(t) \quad (1.24)$$

με τις αντίστοιχες  $n$  αρχικές συνθήκες της εξόδου,

$$y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace και τα δύο μέλη της διαφορικής παίρνουμε,

$$Y(s) = \frac{b(s)}{a(s)} R(s) + \frac{c(s)}{a(s)} = G(s)R(s) + \frac{c(s)}{a(s)} \quad (1.25)$$

όπου η

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \quad (1.26)$$

καλείται **συνάρτηση μεταφοράς** του συστήματος που περιγράφεται από την (1.24).

Από την μορφή της (1.25) είναι πλέον φανερό η επίλυση της διαφορικής η οποία προκύπτει αντιστρέφοντάς την:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} R(s) \right\} + \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{c(s)}{a(s)} \right\} \quad (1.27)$$

Το βασικό σημείο της (1.27) είναι ότι,

- Ο μετασχηματισμός Laplace μας επιτρέπει την επίλυση ενός προβλήματος αρχικών συνθηκών «αυτόματα», χωρίς την ανάγκη επίλυσης ενός συστήματος αλγεβρικών εξισώσεων για την εύρεση των συντελεστών.

Στη μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, συνήθως οι αρχικές συνθήκες είναι όλες μηδέν. Στην περίπτωση αυτή η (1.27) γίνεται,

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b(s)}{a(s)} R(s) \right\} \quad (1.28)$$

Αν οι αρχικές συνθήκες δεν είναι μηδέν, η πιο βολική μέθοδος είναι να θεωρήσουμε τις αρχικές συνθήκες ως επιπλέον κρουστικές εισόδους. Ας δούμε τη μέθοδο αυτή μ' ένα παράδειγμα. Έστω η εξίσωση (1.24) με  $n=2$ ,  $m=0$ , δηλαδή,

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 r(t), \quad y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0 \quad (1.29)$$

Παίρνοντας Laplace η (1.25) γίνεται,

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 R(s) + (s + a_1) y_0 + \dot{y}_0$$

ή ισοδύναμα

$$(s^2 + a_1 s + a_0) Y(s) = b_0 R(s) + (s + a_1) y_0 \Delta(s) + \dot{y}_0 \Delta(s)$$

όπου  $\Delta(s) \equiv 1$  είναι ο μετασχηματισμός Laplace της μοναδιαίας κρουστικής συνάρτησης  $\delta(t)$  (εξίσωση 1.18). Ο όρος  $\dot{y}_0 \Delta(s)$  μπορεί εύκολα να μεταφερθεί στο πεδίο του χρόνου αφού προέρχεται από την  $\dot{y}_0 \delta(t)$ . Ο όρος  $(s + a_1) y_0 \Delta(s)$  είναι λιγότερο προφανής λόγω του  $s y_0 \Delta(s)$ . Αυτός προέρχεται από τον,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [y_0 \delta(t)] &= y_0 \frac{d}{dt} \delta(t) \Rightarrow \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ y_0 \frac{d}{dt} \delta(t) \right\} &= y_0 s \Delta(s) \end{aligned}$$

Φαίνεται λοιπόν ότι το αρχικό σύστημα (1.29) μπορεί να περιγραφεί ισοδύναμα από το,

$$y^{(2)}(t) + a_1 y^{(1)}(t) + a_0 y(t) = b_0 r(t) + [a_1 y_0 + \dot{y}_0] \delta(t) + y_0 \dot{\delta}(t), \quad y(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$$

Εάν η είσοδος  $u(t)$  είναι μηδέν, η απόκριση ονομάζεται **απόκριση μηδενικής εισόδου** ενώ αν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδέν η προκύπτουσα απόκριση ονομάζεται **απόκριση μηδενικής κατάστασης**.

**Σύνοψη:** Ο μετασχηματισμός Laplace είναι χρήσιμος για την επίλυση γραμμικών διαφορικών εξισώσεων με αρχικές συνθήκες στο  $t=0$  και ασυνεχή δεξιά μέλη (π.χ. βηματική συνάρτηση). Η μέθοδος αυτή δεν είναι η μοναδική για τέτοιου είδους προβλήματα, προσφέρει όμως σχετική ευκολία σε συγκεκριμένα προβλήματα καθώς

επιλύει το πρόβλημα αρχικών συνθηκών σ' ένα βήμα.

© Α. Πουλιέζος

## 2 Βασικές έννοιες

### 2.1 Αναπαράσταση συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα εξετάσουμε τις βασικές συνιστώσες της θεωρίας των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου που θα χρησιμεύσουν για επόμενο κεφάλαιο που ασχολείται με την σχεδίαση τους. Όταν λέμε συστήματα αυτομάτου ελέγχου, εννοούμε βασικά *συστήματα αυτομάτου ελέγχου με ανατροφοδότηση* και όταν λέμε σχεδίαση εννοούμε σχεδίαση *ελεγκτών*.

Τα συστήματα αυτομάτου ελέγχου αναπαριστώνται γραφικά με τη χρήση των *δομικών διαγραμμάτων*<sup>2</sup>. Τα δομικά διαγράμματα απεικονίζουν την ακολουθία των διαδικασιών και τις σχέσεις μεταξύ των υποσυστημάτων που απαρτίζουν το συνολικό σύστημα. Αυτό είναι ιδιαίτερα απλό όταν οι σχέσεις είναι προς μία διεύθυνση μόνο.

Όπως έχει γίνει ήδη σαφές, σημείο εκκίνησης για την αναπαράσταση συστημάτων είναι η περιγραφή τους σε μορφή διαφορικής εξίσωσης,

$$a_n y^{(n)}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0 y(t) = r(t)$$

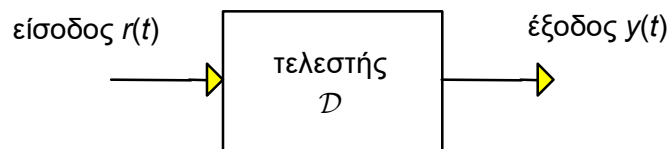
Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφτεί πιο σύντομα αν ορίσουμε τον τελεστή  $\mathcal{D}$  ως,

$$\mathcal{D} = a_n \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0$$

Τότε η διαφορική εξίσωση μπορεί να εκφρασθεί ως,

$$\mathcal{D}\{y(t)\} = r(t)$$

και μπορεί να αναπαρασταθεί γραφικά από το σχήμα,

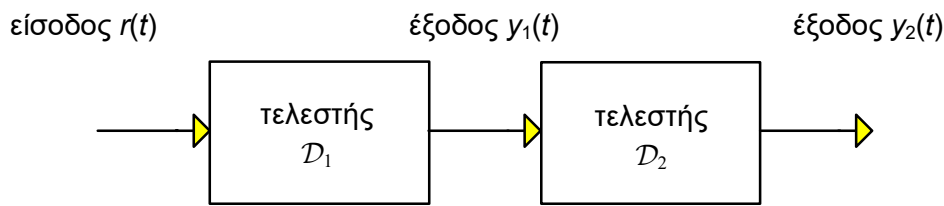


Σχήμα 2.1

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η έξοδος  $y(t)$  είναι είσοδος σε επόμενο σύστημα, όπως συμβαίνει στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου:

<sup>2</sup> Αναφέρονται και ως *διαγράμματα βαθμίδων*. Στα αγγλικά *block diagrams*.





Σχήμα 2.2

Μπορούμε να ανάγουμε (απλοποιήσουμε) το Σχ. 2.2 στο Σχ. 2.1; Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε τον τελεστή (διαδικασία) της **συνέλιξης**. Η συνέλιξη δύο συναρτήσεων  $f$  και  $g$  ορίζεται ως,

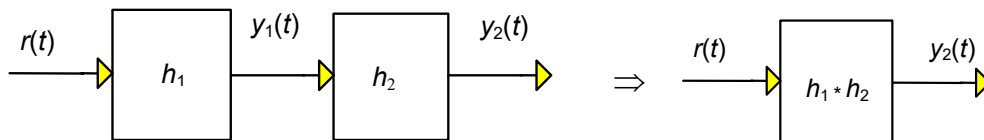
$$(f * g)(t) = \int_0^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)dt$$

Μπορεί τώρα ν' αποδειχθεί ότι,

$$y_1(t) = r(t) * h_1(t)$$

όπου  $h_1(t)$  είναι η **κρουστική απόκριση** του συστήματος, δηλαδή η έξοδος του σε κρουστική είσοδο (συνάρτηση Dirac).

Με τη χρήση του τελεστή αυτού μπορούμε να μετατρέψουμε το Σχ. 2.2 στο Σχ. 2.1:



Η προσέγγιση αυτή φαίνεται καλή αλλά δεν είναι βολική καθώς δεν υπάρχει συστηματοποιημένη διαδικασία για το πώς υπολογίζουμε τις συνέλιξεις. Μία πιο αποδοτική μέθοδος προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τον μετασχηματισμό Laplace. Έτσι αν,

$$Y_1(s) = H_1(s)R(s), \quad Y_2(s) = H_2(s)Y_1(s)$$

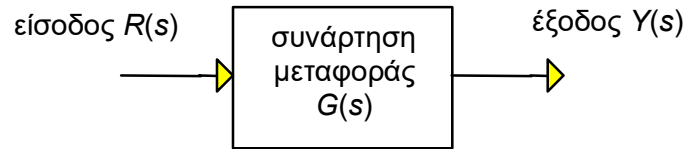
τότε εύκολα προκύπτει ότι,

$$Y_2(s) = H_1(s)H_2(s)R(s)$$

οπότε,

$$y_2(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ H_1(s)H_2(s)R(s) \}$$

Η προσέγγιση αυτή είναι πιο ικανοποιητική καθώς οι συστηματοποιημένες τεχνικές αντιστροφής του μετασχηματισμού Laplace καθιστούν πιο εύκολη τη μετάβαση στο πεδίο του χρόνου. Έτσι υιοθετούμε το ακόλουθο υπόδειγμα σαν το βασικό δομικό στοιχείο στην οικοδόμηση πιο σύνθετων συστημάτων,



Σχήμα 2.3 Βασικό δομικό στοιχείο δομικών διαγραμμάτων

που είναι το μαθηματικό ανάλογο του,

$$Y(s) = G(s)R(s) \quad (2.1)$$

με  $s = \sigma + \omega i$ .

Δεν πρέπει βέβαια να ξεχνάμε ότι η σχέση αυτή έχει προκύψει από μία αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, με μηδενικές αρχικές συνθήκες, για παράδειγμα την,

$$\ddot{y}(t) + 2\sigma\dot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = r(t)$$

η οποία αφού μετασχηματισθεί κατά Laplace δίνει,

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + 2\sigma s + \omega_0^2} R(s) = G(s)R(s)$$

Αυτό που δείχνει ουσιαστικά το δομικό στοιχείο είναι το τί θα συμβεί ( $Y(s)$ ) σ' ένα σύστημα ( $G(s)$ ) αν διεγερθεί από την  $R(s)$ .

Η συνάρτηση  $G(s)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς, η  $R(s)$  **είσοδος** και η  $Y(s)$  **έξοδος**. Οι ρίζες του παρανομαστή της  $G(s)$ , δηλαδή οι ρίζες του χαρακτηριστικού πολυωνύμου  $a(s)$ , ονομάζονται **πόλοι** του συστήματος ενώ οι ρίζες του αριθμητή  $b(s)$ , **μηδενικά**. Όπως είναι φανερό οι τιμές των πόλων και των μηδενικών παίζουν καθοριστικό ρόλο στην συμπεριφορά της λύσης  $y(t)$ , γι' αυτό και ορίζονται ιδιαίτερα. Ο ρόλος αυτός γίνεται πιο ευδιάκριτος αν εκφράσουμε τη συνάρτηση μεταφοράς σε μορφή πόλων-μηδενικών:

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

Αν  $r(t)=0$ , τότε,

$$y_o(t) = \sum_{k=1}^n c_k e^{p_k t}$$

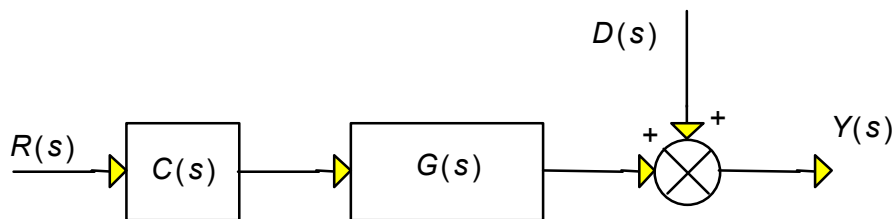
δηλαδή οι πόλοι είναι οι εκθέτες των εκθετικών συναρτήσεων που εμφανίζονται στη λύση της ομογενούς  $y_o(t)$ . Περαιτέρω αν  $r(t)=ce^{z't}$ , τότε το σήμα αυτό δεν επενεργεί καθώς το δεξί μέλος της (1.24) μηδενίζεται, αφού,

$$b_m r^{(m)}(t) + b_{m-1} r^{(m-1)}(t) + \dots + b_0 r(t) = B(b) c e^{z't} = 0$$

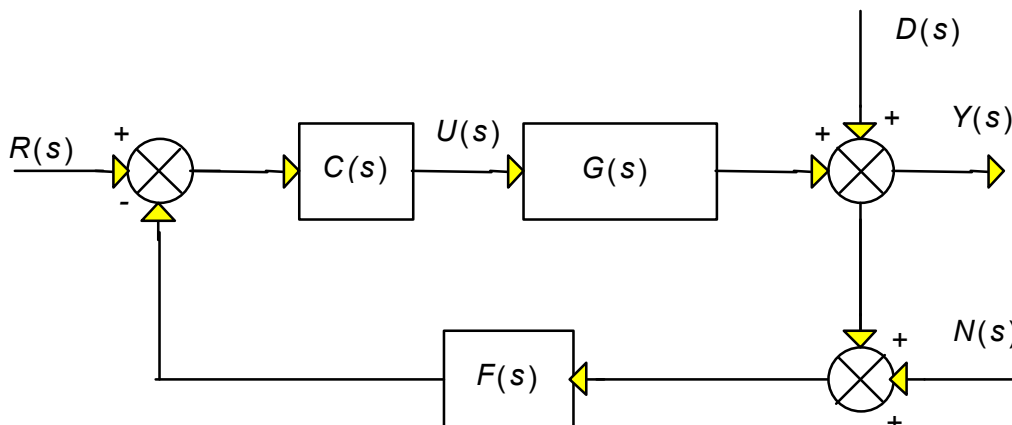
Οι λόγοι που επιλέγουμε να αναπαραστήσουμε τα συστήματα μέσω του Σχ. 2.3 και όχι μέσω της εξίσωσης (2.1) είναι οι εξής:

- Στο δομικό διάγραμμα είναι πιο παραστατική η σχέση αιτίου-αποτελέσματος που χαρακτηρίζει τα φυσικά συστήματα.
- Πολύπλοκα συστήματα με διασυνδεδεμένα υποσυστήματα, μετασχηματίζονται εύκολα σε απλούστερες μορφές μέσω απλών πράξεων που θα δούμε στη συνέχεια.

Στα Σχ. 2.4, 2.5 φαίνονται αντίστοιχα, τα δομικά διαγράμματα ενός ανοικτού (χωρίς ανατροφοδότηση) και ενός κλειστού (με ανατροφοδότηση) συστήματος.



Σχήμα 2.4 Σύστημα χωρίς ανατροφοδότηση (ανοικτό σύστημα)



Σχήμα 2.5 Σύστημα με ανατροφοδότηση (κλειστό σύστημα)

Οι μεταβλητές που εμφανίζονται στο Σχ. 2.5 έχουν την εξής σημασία:

$R(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση εισόδου*. Όπως θα δούμε και σε επόμενο παράδειγμα, η είσοδος αυτή δεν είναι απαραίτητα η φυσική είσοδος του συστήματος, αλλά η *είσοδος αναφοράς*, δηλαδή η επιθυμητή κατάσταση του συστήματος.

$Y(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση εξόδου*. Όπως θα δούμε και σε επόμενο παράδειγμα, η έξοδος δεν είναι απαραίτητα η φυσική έξοδος του συστήματος, αλλά η μεταβλητή που θέλουμε να ελέγξουμε.

$D(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση εξωτερικών διαταραχών*. Ο όρος αυτός παριστά γνωστές ή άγνωστες διαταραχές οι οποίες μπορεί να έχουν φυσική αντιστοιχία (διαταραχές φορτίου, άνεμος κλπ.) ή να συμβολίζουν σφάλματα μοντελοποίησης. Τα σφάλματα αυτά μπορεί να προέρχονται είτε από λανθασμένες τιμές παραμέτρων είτε από γραμμικοποίηση μη γραμμικών συστημάτων. Ο όρος αυτός δεν παρεμβαίνει στην διαδικασία σχεδίασης, αφού είναι ουσιαστικά άγνωστος, αλλά η σχεδίαση πρέπει να τον λαμβάνει υπόψη της όπως θα δούμε.

$N(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση θορύβου*. Παριστά αναπόφευκτο θόρυβο που εισάγεται στο σύστημα μέσω των αισθητήρων. Και αυτός ο όρος, αν και άγνωστος πρέπει να λαμβάνεται καταλλήλως υπόψη κατά την σχεδίαση (ουσιαστικά δηλαδή και ο θόρυβος και οι διαταραχές πρέπει να επηρεάζουν την λειτουργία του συστήματος το λιγότερο δυνατό).

$C(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση μεταφοράς ελεγκτή*. Αποτελεί το ζητούμενο της σχεδίασης. Είναι ουσιαστικά το "μυαλό" του συστήματος, ο τρόπος με τον οποίον επιτυγχάνονται οι σχεδιαστικές προδιαγραφές.

$G(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση εγκατάστασης*. Ο όρος εγκατάσταση δηλώνει την ελεγχόμενη διαδικασία. Η ορολογία προέρχεται από το αγγλικό *plant*.

$F(s)$  (Μετασχηματισμένη κατά Laplace) *συνάρτηση βρόχου ανατροφοδότησης*. Όταν ο όρος αυτός είναι 1 (σύνηθες) μιλάμε για *μοναδιαία ανατροφοδότηση*.

Επιπλέον η  $C(s)G(s)$  καλείται **απευθείας βρόχος** ενώ η  $F(s)$  **κλάδος ανατροφοδότησης**<sup>3</sup>.

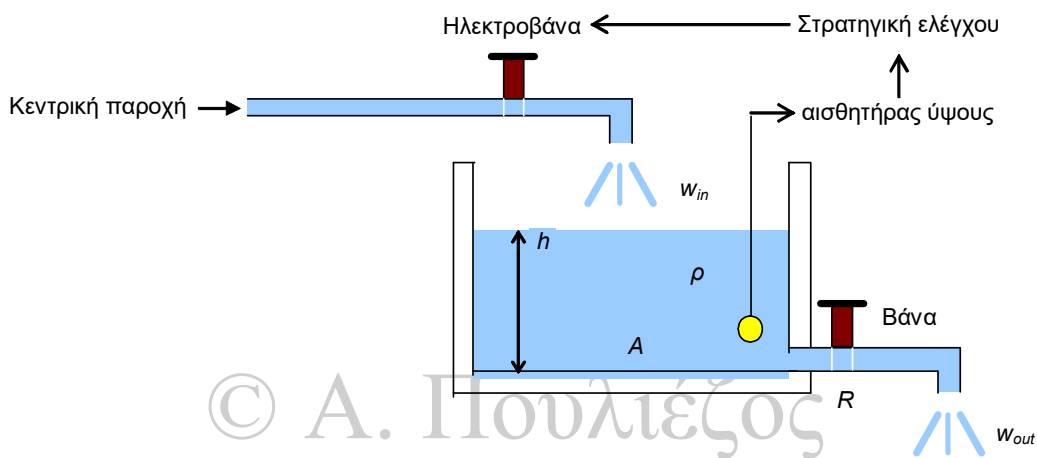
Οι μεταβλητές του ανοικτού συστήματος είναι παρόμοιες με την διαφορά ότι δεν υπάρχει ο κλάδος ανατροφοδότησης και επομένως οι  $N(s)$ ,  $F(s)$ . Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα για την κατανόηση των παραπάνω.

<sup>3</sup> βρόχος (~ θηλιά) και όχι βρόγχος (τραχεία αρτηρία)

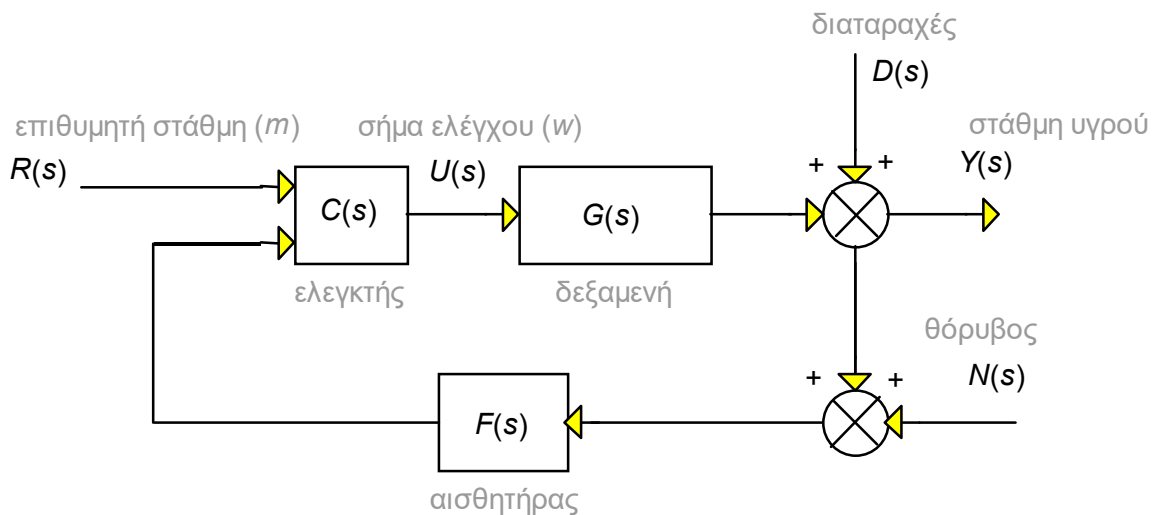
**Παράδειγμα 2.1** Σύστημα ελέγχου στάθμης υγρού. Στο Σχ. 2.6 φαίνεται το σχηματικό διάγραμμα ενός συστήματος στάθμης υγρού ενώ στο Σχ. 2.7 το δομικό του διάγραμμα.

Τα βασικά στοιχεία του συστήματος αυτού, με την σειρά που αναφέρθηκαν πριν, είναι:

Η είσοδος και η έξοδος του συστήματος, φυσιολογικά είναι η εισροή  $q_i$  και η εκροή  $q_o$ . Όμως, στο μοντελοποιημένο σύστημα που αναπαριστάται στο δομικό διάγραμμα, ως είσοδος νοείται η επιθυμητή στάθμη του υγρού και ως έξοδος η στιγμιαία στάθμη του.



Σχήμα 2.6 Σχηματικό διάγραμμα ελέγχου στάθμης υγρού



Σχήμα 2.7 Δομικό διάγραμμα συστήματος ελέγχου στάθμης υγρού

Οι εξωτερικές διαταραχές μπορεί να είναι μεταβολή στην ροή εισόδου (απρόβλεπτη), μεταβολή στην ζήτηση (ροή εξόδου) και σφάλματα λόγω γραμμικοποίησης του μη γραμμικού μοντέλου της δεξαμενής (θα διευκρινισθεί αργότερα).

Ο θόρυβος στην μέτρηση μπορεί να προέρχεται από σφάλματα του οργάνου μέτρησης (είτε φυσιολογικά, είτε λόγω φθοράς).

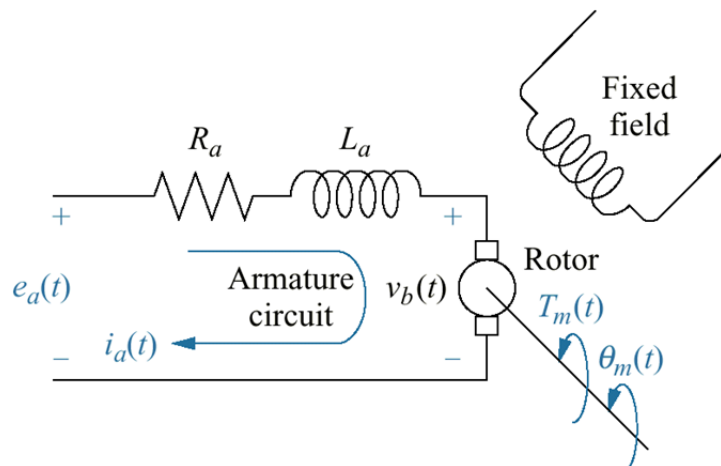
Ο ελεγκτής είναι το ζητούμενο.

Η συνάρτηση μεταφοράς της εγκατάστασης προκύπτει από τις φυσικές σχέσεις που διέπουν την διαδικασία της δεξαμενής υγρού.

Η συνάρτηση μεταφοράς του κλάδου ανατροφοδότησης προκύπτει από το όργανο μέτρησης (μηχανικό, ηλεκτρονικό κλπ.) και από το αν πρέπει η πληροφορία που παρέχει να μετατραπεί (π.χ. θέση σε ταχύτητα ή στάθμη σε τάση).

### Παράδειγμα 2.2 Κινητήρες συνεχούς ρεύματος.

Οι κινητήρες συνεχούς ρεύματος είναι εκ των πλέον χρησιμοποιούμενων εξαρτημάτων στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου. Από τους πολλούς τύπους κινητήρων που υπάρχουν θα εξετάσουμε την δυναμική συμπεριφορά αυτών που διεγείρονται από τον στάτορα.



Σχήμα 2.8 Σχηματικό διάγραμμα κινητήρα

Οι βασικοί φυσικοί νόμοι που διέπουν τη λειτουργία του κινητήρα είναι:

1. Η μετατροπή της ηλεκτρικής σε μηχανική ενέργεια βάσει του νόμου των κινητήρων,

$$F = Bli = K_m i \quad (2.2)$$

όπου  $F$  είναι η δύναμη που παράγεται αν ρεύμα  $i$  A κινείται σε αγωγό μήκους  $l$  m σε ορθή γωνία προς μαγνητικό πεδίο  $B$  tesla. Η γενική αυτή σχέση συνήθως εκφράζεται συναρτήσει της σταθεράς κινητήρα  $K_m$  που συνοψίζει τα χαρακτηριστικά του.

2. Η σχέση ηλεκτρικής ισχύος και κίνησης (νόμος γεννήτριας),

$$e(t) = Blv(t) = K_g \frac{d\theta}{dt} \quad (2.3)$$

όπου  $e$  είναι η τάση που αναπτύσσεται στα άκρα αγωγού μήκους  $l$  m που κινείται με ταχύτητα  $v$  m/s σε ορθή γωνία προς ένα μαγνητικό πεδίο  $B$  tesla. Για γεννήτριες η σχέση εκφράζεται συναρτήσει της σταθεράς γεννήτριας  $K_g$ .

3. Ο νόμος του Νεύτωνα για περιστροφική κίνηση,

$$J\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + k\theta = M(t) \quad (2.4)$$

όπου  $J$  είναι η ροπή αδρανείας,  $b$  ο συντελεστής τριβής και  $k$  ο συντελεστής μετατόπισης ροπής στρέψεως.

4. Ο νόμος τάσεων του Kirchoff: Το αλγεβρικό άθροισμα όλων των τάσεων γύρω από ένα κλειστό μονοπάτι κυκλώματος είναι μηδέν.

Με βάση τους παραπάνω νόμους η συνάρτηση μεταφοράς εξάγεται ως εξής:

α. Η ροπή δύναμης από την (2.2) είναι,

$$T_m(t) = K_m I_a \varphi(t) \quad (2.5)$$

β. Ο νόμος των τάσεων δίνει για το δίκτυο του στάτορα,

$$L_f \frac{di_f(t)}{dt} + R_f i_f(t) = v_f(t) \quad (2.6)$$

γ. Ο νόμος του Νεύτωνα δίνει για την περιστροφική κίνηση,

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) = T_m(t) \quad (2.7)$$

$$\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

όπου ο συντελεστής  $k$  της (2.4) θεωρήθηκε αμελητέος.

Επιπλέον η μαγνητική ροή  $\varphi(t)$  μεταξύ στάτορα και ρότορα είναι,

$$\varphi(t) = K_f i_f(t) \quad (2.8)$$

Αντικαθιστώντας την (2.8) στην (2.5) δίνει,

$$T_m(t) = K_m K_f I_a i_f(t)$$

Αντικαθιστώντας την τελευταία στην (2.7), δίνει,

$$J_m \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B_m \omega_m(t) = K_m K_f I_a i_f(t) \quad (2.9)$$

Μετασχηματίζοντας κατά Laplace τις (2.6), (2.9) παίρνουμε,

$$L_f s I_f(s) + R_f I_f(s) = v_f(s) \Rightarrow I_f(s) = \frac{v_f(s)}{L_f s + R_f}$$

$$J_m s^2 \Theta(s) + B_m s \Theta(s) = K_m K_f I_a I_f(s) \Rightarrow \Theta(s) = \frac{K_m K_f I_a}{J_m s^2 + B_m s} I_f(s)$$

Απαλείφοντας το  $I_f$  από τις παραπάνω εξισώσεις δίνει την συνάρτηση μεταφοράς γωνιακής θέσης εξόδου-τάσης εισόδου,

$$\frac{\Theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m K_f I_a}{(J_m s^2 + B_m s)(L_f s + R_f)}$$

Αν η αυτεπαγωγή  $L_f$  θεωρηθεί αμελητέα, προκύπτει μία διαδικασία δευτέρας τάξεως,

$$\frac{\Theta(s)}{V_f(s)} = \frac{K_m K_f I_a}{(J_m R_f s^2 + B_m R_f s)} = \frac{K}{s(\tau + s)}$$

όπου τα  $K$  και  $\tau$  προκύπτουν εύκολα ως,

$$\tau = B_m R_f (J_m R_f)^{-1}, K = K_m K_f I_a (J_m R_f)^{-1}$$

### 2.1.1 Πράξεις επί δομικών διαγραμμάτων

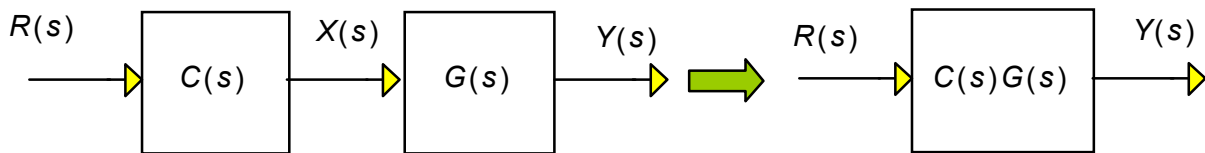
Αφού ο βασικός τρόπος αναπαράστασης των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου είναι μέσω των δομικών διαγραμμάτων, είναι απαραίτητη η γνώση χειρισμού τους. Ουσιαστικά κάθε δομικό διάγραμμα μπορεί να καταλήξει στην βασική μορφή,



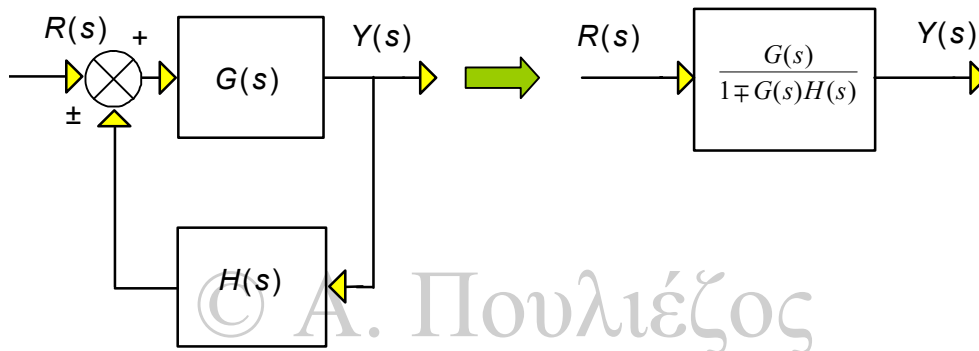


Οι πράξεις που επιτρέπουν τον μετασχηματισμό αυτό είναι βασικά δύο:

**Μετατροπή συναρτήσεων εν σειρά: γινόμενο συναρτήσεων**



**Μετατροπή συναρτήσεων σε διάταξη ανατροφοδότησης**



Η τελευταία αυτή σχέση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη, αφού μας επιτρέπει την εύρεση της (ισοδύναμης) συνάρτησης μεταφοράς ενός συστήματος με ανατροφοδότηση. Η απλοποίηση πιο πολύπλοκων διαγραμμάτων επιτυγχάνεται με την σταδιακή απλοποίηση των επιμέρους τμημάτων.

Αν στο σύστημα υπάρχουν παραπάνω από μία εισοδοι, όπως συμβαίνει στο Σχ. 2.5, η ολική απόκριση είναι το άθροισμα των αποκρίσεων από κάθε είσοδο, των υπολοίπων λαμβανομένων μηδέν. Έτσι, για το σύστημα του Σχ. 2.5, η ολική απόκριση είναι (για  $F(s)=1$ ),

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} R(s) + \frac{1}{1 + C(s)G(s)} D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} N(s) \quad (2.10)$$

**2.2 Διαδικασία επίλυσης του προβλήματος σχεδίασης ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου**

Το υπόλοιπο τμήμα των σημειώσεων είναι διαρθρωμένο έτσι ώστε να συμβαδίζει με τα βασικά βήματα που πρέπει να ακολουθήσει ένας μηχανικός αυτομάτου ελέγχου (ή καλύτερα μία ομάδα σχεδίασης, αφού συνήθως οι γνώσεις που χρειάζονται απαιτούν διεπιστημονική προσέγγιση). Τα βήματα αυτά είναι:

- Κατάστρωση φυσικού μοντέλου και εύρεση μαθηματικών εξισώσεων που το περιγράφουν. Πιθανές απλοποιήσεις λόγω μη γραμμικότητας. Το βήμα αυτό χρειάζεται ειδικές γνώσεις επί της ελεγχόμενης διαδικασίας, για παράδειγμα γνώση χημείας αν πρόκειται για χημικές διεργασίες, γνώση βιολογίας αν πρόκειται για βιολογικές διαδικασίες κ.ο.κ. Ως εκ τούτου δεν θα ασχοληθούμε διεξοδικά με το κομμάτι αυτό (που είναι ίσως και το πιο δύσκολο), αλλά θα θεωρήσουμε ότι τα χρησιμοποιούμενα μοντέλα έχουν παραχθεί με κάποιο τρόπο.
- Μελέτη της δυναμικής συμπεριφοράς του συστήματος μέσω μετασχηματισμών Laplace. Για τον λόγο αυτό απαιτείται ταξινόμηση των συστημάτων, ώστε η μελέτη τους να είναι ευκολότερη.
- Τυποποίηση προδιαγραφών συμπεριφοράς και σχεδίαση ελεγκτή που να τις ικανοποιεί. Το βήμα αυτό είναι μία διαδικασία δοκιμής-σφάλματος (trial and error) αφού οι προδιαγραφές είναι συνήθως αντικρουόμενες και πρέπει να βρεθεί μία διάταξη με αμοιβαίες παραχωρήσεις. Στη φάση αυτή το πλήρες μοντέλο της διαδικασίας (όχι αυτό που χρησιμοποιείται για τη σχεδίαση) μπορεί να φανεί χρήσιμο, αφού για την διαδικασία δοκιμής-σφάλματος η ελεγχόμενη διαδικασία μπορεί να προσομοιωθεί σε υπολογιστή, έτσι ώστε να αποφευχθούν πιθανές βλάβες στην εγκατάσταση.

© Α. Πουλιέζος

### 3 Ανάλυση συστημάτων

Στο κεφάλαιο αυτό θα δούμε τις βασικές ιδιότητες των συστημάτων που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής (1.24). Ειδικότερα θα δούμε πιο λεπτομερώς την συμπεριφορά συστημάτων ή διαδικασιών πρώτης και δεύτερας τάξης. Ο λόγος για την προτίμηση αυτή είναι ότι αφενός αυτό είναι πιο εύκολο και αφετέρου η συμπεριφορά συστημάτων μεγαλύτερης τάξης μπορεί να προσεγγισθεί από την γνώση της συμπεριφοράς των συστημάτων πρώτης και δεύτερας τάξεως.

Ας διευκρινίσουμε ότι με την έννοια σύστημα μπορεί να νοηθεί και μία απλή διαδικασία και όχι απαραίτητα ένα σύνολο από διασυνδεδεμένες διαδικασίες που αποτελούν ένα σύστημα. Έτσι, στη συνέχεια ο όρος διαδικασία θα χρησιμοποιείται για να δηλώσει είτε μία απλή διαδικασία, είτε ένα σύστημα που έχει μετασχηματισθεί σε απλή διαδικασία με τις μεθόδους της παραγράφου 2.1.1.

Για την ανάλυση, αλλά και την σύνθεση, συστημάτων χρησιμοποιούνται κάποιες τυπικές εισοδοί. Ο λόγος είναι ότι δεν είναι εφικτό να είναι γνωστή εκ των προτέρων η μορφή της εισόδου. Οι τυπικές εισοδοί αρχίζουν από την μοναδιαία βηματική και μοναδιαία συνάρτηση αναρρίχησης, για να φθάσουν σε αρμονικές (ημιτονοειδής, εκθετική) και τυχαίες. Μέθοδοι που βασίζονται στις πρώτες (βήμα, αναρρίχηση) ονομάζονται μέθοδοι *χρονικής απόκρισης* ενώ μέθοδοι που βασίζονται σε αρμονικές εισόδους ονομάζονται μέθοδοι *απόκρισης συχνότητας*.

#### 3.1 Διαδικασίες πρώτης τάξεως

Σύμφωνα με την (2.14), οι διαδικασίες πρώτης τάξης περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής,

$$\frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = b_0 r(t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (3.1)$$

της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace δίνει σύμφωνα με την (2.15),

$$Y(s) = \frac{b_0}{s + a_0} R(s) + \frac{y_0}{s + a_0} \quad (3.2)$$

Η συνάρτηση μεταφοράς έχει έναν πόλο στο  $-a_0$  ενώ δεν έχει μηδενικά. Επομένως, αναμένουμε η απόκριση να εξαρτάται μόνο από τον πόλο. Όσον αφορά την αρχική συνθήκη, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να την θεωρήσουμε μηδέν. Αν αυτό δεν συμβαίνει υπάρχουν τρεις τρόποι αντιμετώπισης:

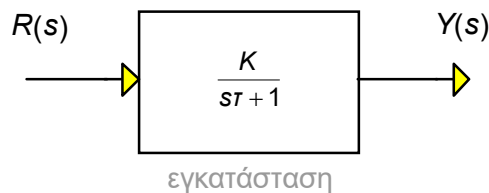
- Αντιστρέφουμε την (3.2) με τις αρχικές συνθήκες (ισχύει γενικότερα).
- Ορίζουμε νέα μεταβλητή  $y' = y - y_0$ , έτσι ώστε  $y'(t_0) = 0$  (δύσκολο για μεγαλύτερες τάξεις).
- Θεωρούμε την αρχική συνθήκη ως επιπλέον κρουστική είσοδο μεγέθους ίσου με

την αρχική συνθήκη  $y_0$ , και επιλύουμε το πρόβλημα με μηδενική αρχική συνθήκη (μέθοδο που είδαμε στην Ενότητα 1.3.5).

Ας γυρίσουμε στην μετασχηματισμένη εξίσωση και ας την γράψουμε στην τυπική της μορφή,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s\tau + 1} \quad (3.3)$$

Στην μορφή αυτή, η σταθερά  $K$  ονομάζεται *κέρδος* του συστήματος ενώ το  $\tau$  είναι η *χρονική σταθερά* του. Ο λόγος για την ορολογία αυτή θα διευκρινισθεί αμέσως. Προφανώς  $K=b_0/a_0$ ,  $\tau=1/a_0$ . Το (απλό) δομικό διάγραμμα της διαδικασίας πρώτης τάξης φαίνεται στο Σχ. 3.1.



Σχήμα 3.1 Δομικό διάγραμμα διαδικασίας πρώτης τάξης

Για να αντιστρέψουμε την (3.3), ας θεωρήσουμε ότι η συνάρτηση εισόδου είναι η μοναδιαία βηματική, επομένως  $R(s)=M/s$ . Τότε,

$$Y(s) = \frac{M}{s} \frac{K}{s\tau + 1}$$

Χρησιμοποιώντας μερικά κλάσματα,

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{s\tau + 1}$$

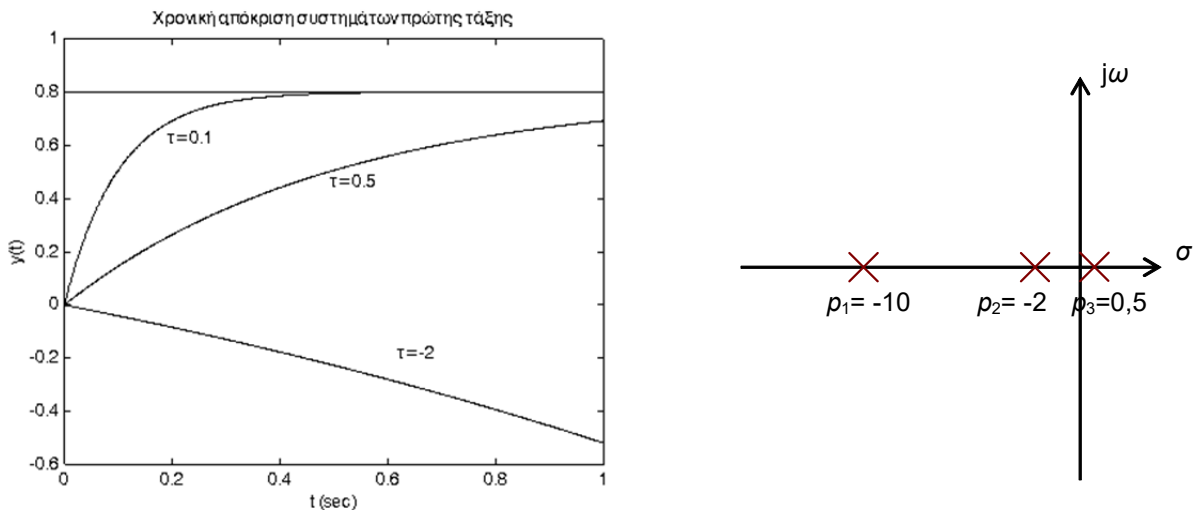
όπου,  $c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = MK$ ,  $c_2 = \lim_{s \rightarrow -1/\tau} (s\tau + 1)Y(s) = -MK\tau$ . Επομένως,

$$Y(s) = \frac{MK}{s} - \frac{MK\tau}{s\tau + 1} \Rightarrow y(t) = MK(1 - e^{-t/\tau}), t \geq 0 \quad (3.4)$$

Εξετάζοντας την λύση βλέπουμε ότι τείνει στο  $MK$  καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο, ενώ η ταχύτητα προσέγγισης εξαρτάται από το  $\tau$ . Στο Σχ. 3.2 βλέπουμε κάποιες μοναδιαίες βηματικές αποκρίσεις της  $\frac{0,8}{s\tau + 1}$  για διαφορετικές χρονικές σταθερές και τις αντίστοιχες θέσεις των πόλων.

Τα συμπεράσματα που προκύπτουν κοιτάζοντας το Σχ. 3.2 είναι:

- Αν η χρονική σταθερά είναι θετική, το σύστημα είναι *ευσταθές*, δηλαδή τείνει σε πεπερασμένη τιμή καθώς ο χρόνος τείνει στο άπειρο. Σε αντίθετη περίπτωση η απόκριση «εκρήγνυται», δηλαδή πάει στο άπειρο. Επομένως για ευστάθεια, απαιτείται ο πόλος να βρίσκεται στο αριστερό ημιεπίπεδο. Αν το σύστημα δεν είναι ευσταθές, πρέπει να σταθεροποιηθεί, γιατί ένα ασταθές σύστημα είναι ουσιαστικά άχρηστο. Μέθοδοι σταθεροποίησης θα συζητηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.



© Α. Πουλιέζος

Σχήμα 3.2 Χρονικές αποκρίσεις της  $\frac{0,8}{st+1}$  και αντίστοιχες θέσεις πόλων.

- Η ταχύτητα απόκρισης αυξάνεται όσο μικρότερη είναι η χρονική σταθερά. Επομένως όσο αριστερότερα βρίσκεται ο πόλος τόσο πιο γρήγορο είναι το σύστημα. Εάν η ταχύτητα απόκρισης δεν είναι αρκετά γρήγορη, απαιτείται τροποποίηση. Μέθοδοι γι' αυτό θα συζητηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.
- Η τελική τιμή της απόκρισης δεν είναι ίση με την είσοδο (μονάδα). Αυτό δεν είναι επιθυμητό. Μέθοδοι για την βελτίωση αυτού του μειονεκτήματος θα συζητηθούν στο επόμενο κεφάλαιο.

Τελειώνουμε με μία ποσοτική ερμηνεία του  $\tau$ . Θέτοντας  $t=\tau$  στην (3.4) παίρνουμε,

$$y(t) = Ku(t)(1 - e^{-1}) = Ku(t)(1 - 0,368) = 0,632Ku(t)$$

Επομένως το  $\tau$  είναι ο χρόνος που απαιτείται για να φτάσει η απόκριση στο 63% της τελικής της τιμής.

**Παράδειγμα 3.1** Μία δεξαμενή με σταθερά 1 min και αντίσταση  $1/9 \text{ cm}^{-2} \text{ min}$  λειτουργεί σε σταθερή κατάσταση με ροή εισόδου  $10 \text{ cm}^3/\text{min}$ . Σε χρόνο  $t=10 \text{ min}$  η ροή αυξάνεται σε  $100 \text{ cm}^3/\text{min}$  για 0,1 min. Σχεδιάστε την μεταβολή του ύψους της

δεξαμενής εξαιτίας της διαταραχής αυτής.

Λύση: Το μαθηματικό υπόδειγμα της δεξαμενής εξάγεται στην Ενότητα 5.1.

Λόγω του ότι  $\tau = AR \Rightarrow A = \frac{\tau}{R} = 9 \text{ cm}^2$ . Επομένως η εξίσωση που διέπει το σύστημα είναι,

$$H(s) = \frac{1/9}{s+1} W_{in}(s) + \frac{h(0^-)}{s+1}$$

Συγκρίνοντας την συνάρτηση μεταφοράς με την τυπική μορφή (3.3), επαληθεύεται ότι  $R=1/9$ ,  $\tau=1$ . Για να συνεχίσουμε την λύση:

1. Θεωρούμε αρχικό χρόνο  $t=0$ , αρχικές συνθήκες μηδέν και είσοδο την ροή από  $t=0$  και μετά. Η μαθηματική της έκφραση δίνεται από,

$$w_{in}(t) = 10u(t) + 90u(t-10) - 90u(t-10,1)$$

Επομένως η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται,

$$H(s) = \frac{1/9}{s+1} \left\{ \frac{10}{s} + \frac{90e^{-10s}}{s} - \frac{90e^{-10,1s}}{s} \right\}$$

Κάθε όρος είναι της μορφής  $\frac{\alpha_i}{s(s+1)}$  και αναπτύσσεται σε μερικά κλάσματα σύμφωνα με την (1.20). Έτσι,

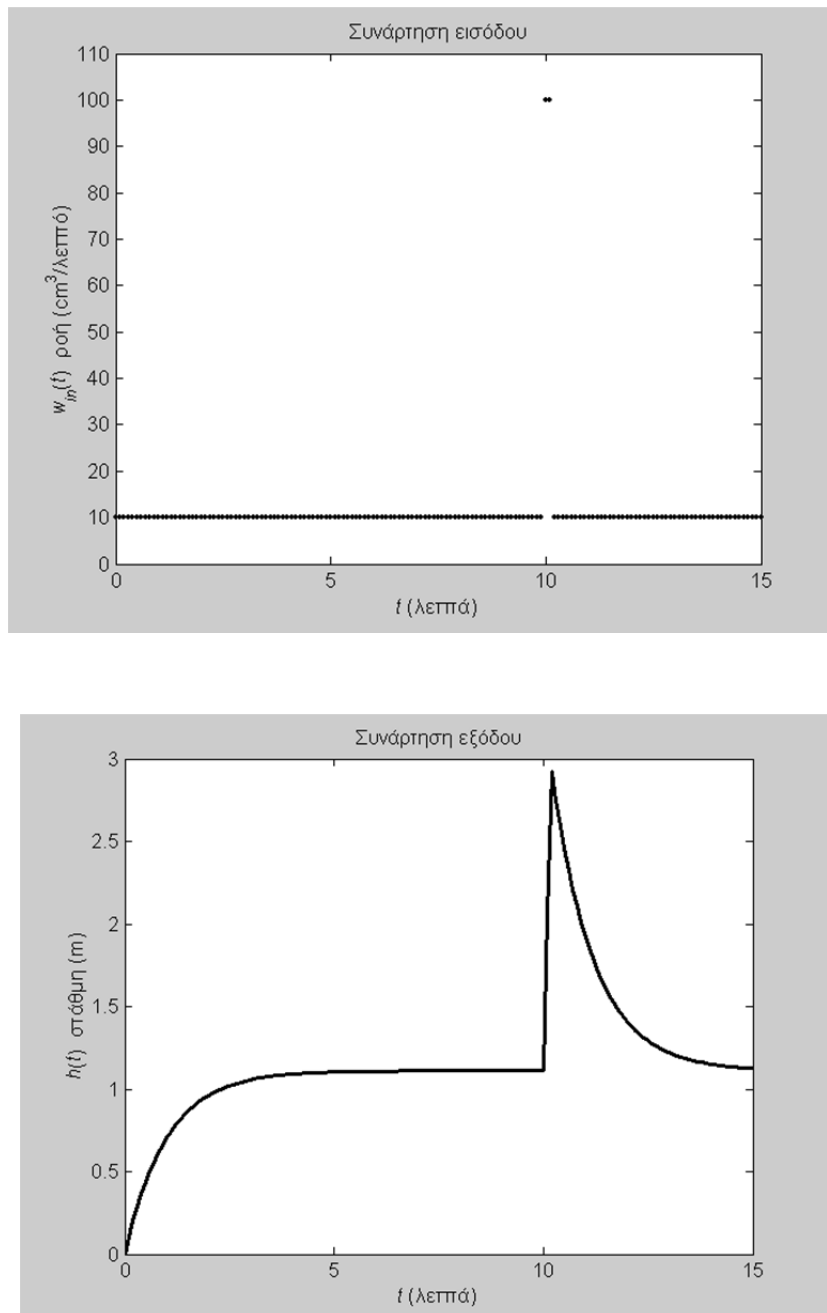
$$c_1 = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\alpha_i}{s(s+1)} = \alpha_i$$

$$c_2 = \lim_{s \rightarrow -1} (s+1) \frac{\alpha_i}{s(s+1)} = -\alpha_i$$

(συγκρίνετε και με την (3.4) για  $\tau=1$ ). Έτσι, για κάθε όρο ο αντίστροφος μετασχηματισμός δίνει, όρους της μορφής  $\alpha_i u(t) (1 - e^{-t})$ . Συλλέγοντας τους όρους και αντικαθιστώντας τα  $\alpha_i$  δίνει,

$$h(t) = \frac{10}{9} u(t) \{1 - e^{-t}\} + 10u(t-10) \{1 - e^{-(t-10)}\} - 10u(t-10,1) \{1 - e^{-(t-10,1)}\}$$

Οι χρονικές αποκρίσεις της εισόδου  $w_{in}(t)$  και της εξόδου  $h(t)$  φαίνονται στο Σχ. 3.3.



Σχήμα 3.3 Χρονικές αποκρίσεις εισόδου/εξόδου συστήματος 1<sup>ης</sup> τάξης

## 3.2 Διαδικασίες δευτέρας τάξεως

Η μελέτη των διαδικασιών δευτέρας τάξης είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην σχεδίαση των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου επειδή:

- Η γνώση της συμπεριφοράς τους χρησιμεύει για την πρόβλεψη της συμπεριφοράς διαδικασιών υψηλότερων τάξεων μέσω της έννοιας των κυρίαρχων πόλων

που θα δούμε στην συνέχεια.

Περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις της μορφής,

$$\ddot{y} + a_1\dot{y} + a_0y = b_0r(t), \quad y(t_0) = y_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0$$

Μετασχηματίζοντας την κατά Laplace δίνει,

$$b_0R(s) = s^2Y(s) + a_1sY(s) + a_0Y(s) - [\dot{y}_0 + y_0(a_1 + s)]$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}R(s) + \frac{[\dot{y}_0 + y_0(a_1 + s)]}{s^2 + a_1s + a_0}$$

Υποθέτοντας μηδενικές αρχικές συνθήκες (σε αντίθετη περίπτωση είπαμε τί θα κάνουμε) παίρνουμε,

$$Y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1s + a_0}R(s)$$

$$= H(s)R(s)$$

Όταν μελετάμε συστήματα αυτομάτου ελέγχου, είθισται<sup>4</sup> να γράφουμε την συνάρτηση μεταφοράς στην τυπική μορφή,

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.5)$$

επειδή η μορφή αυτή απαντάται συχνά και οι παράμετροι της  $\zeta$ ,  $\omega_n$  έχουν φυσική σημασία. Εξισώνοντας όμοιους όρους προκύπτει ότι,

$$\omega_n = +\sqrt{a_0}, \quad \zeta = \frac{a_1}{2\sqrt{a_0}}$$

Το χαρακτηριστικό πολυώνυμο της διαδικασίας είναι,

$$a(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

οι δε πόλοι,

---

<sup>4</sup> είθισται: συνηθίζεται (γ' ενικό παρακειμένου του εθίζομαι)



$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Η δυναμική συμπεριφορά των διαδικασιών δευτέρας τάξης μπορεί να περιγραφεί με τις δύο παραμέτρους  $\zeta$  και  $\omega_n$ .

Στην συνέχεια θα κάνουμε την παραδοχή ότι η διαδικασία είναι ευσταθής. Όπως θα δούμε στη συνέχεια αυτό σημαίνει  $\zeta\omega_n > 0$ .

### 3.2.1 Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας

1) *Υποαπόσβεση* ( $0 < \zeta < 1$ ) : Στην περίπτωση αυτή η χαρακτηριστική εξίσωση έχει δύο μιγαδικές συζυγείς ρίζες:

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \\ &= -\sigma_\alpha \pm j\omega_d \end{aligned}$$

όπου η παράμετρος  $\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}$  ονομάζεται *αποσβυσμένη φυσική συχνότητα*, ενώ η  $\sigma_\alpha = \zeta\omega_n$  *σταθερά εξασθένισης*.

Όταν η είσοδος είναι η μοναδιαία βηματική συνάρτηση,  $R(s) = 1/s$ , οπότε,

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \\ &= \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \end{aligned}$$

Από τους πίνακες μετασχηματισμών Laplace,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} &= u(t) e^{-\zeta\omega_n t} \text{συν}\omega_d t \\ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\omega_d}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} \right\} &= u(t) e^{-\zeta\omega_n t} \eta\mu\omega_d t \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο όρος  $u(t)$  υποδηλώνει ότι η συνάρτηση είναι μηδενική για  $t < 0$ . Πάντως για να μην μπλέκουμε υπερβολικά ο όρος αυτός θα απαλειφθεί στο μέλλον,

αλλά δεν πρέπει να λησμονηθεί ότι ο μετασχηματισμός ισχύει για  $t > 0$ . Αντιστρέφοντας παίρνουμε,

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left( \sin\omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta\mu\omega_d t \right) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \sqrt{1-\zeta^2} \sin\omega_d t + \zeta \eta\mu\omega_d t \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Θέτοντας,

$$\left. \begin{aligned} \eta\mu\theta &= \sqrt{1-\zeta^2} \\ \sigma\upsilon\upsilon\theta &= \zeta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \theta = \tau\omicron\zeta\epsilon\varphi \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

δίνει,

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} (\eta\mu\theta \cdot \sigma\upsilon\upsilon\omega_d t + \sigma\upsilon\upsilon\theta \cdot \eta\mu\omega_d t) \\ &= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta\mu(\omega_d t + \theta) \end{aligned} \quad (3.7)$$

Η λύση παριστάνει μία φθίνουσα ημιτονοειδή συνάρτηση με συχνότητα  $\omega_d (= \omega_n \sqrt{1-\zeta^2})$  και σταθερά εξασθένησης  $\sigma_\alpha = \zeta\omega_n$ .

Να σημειωθεί ότι η περίπτωση αυτή είναι η πιο σημαντική στη σχεδίαση συστημάτων αυτομάτου ελέγχου.

2) *Υπεραπόσβεση* ( $\zeta > 1$ ): Στην περίπτωση αυτή οι δύο πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι πραγματικοί, αρνητικοί και άνισοι,

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$$

Για είσοδο μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, έχουμε:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

Αναπτύσσοντας σε μερικά κλάσματα, δίνει

$$Y(s) = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s-s_1)} + \frac{c_3}{(s-s_2)}$$

Τα  $c_i$  υπολογίζονται με τον γνωστό τρόπο ως,

$$c_1 = 1, c_2 = \frac{\omega_n^2}{s_1(s_1 - s_2)}, c_3 = \frac{\omega_n^2}{s_2(s_2 - s_1)}$$

Αντικαθιστώντας τα  $s_i$  παίρνουμε,

$$c_2 = \frac{\omega_n^2}{\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})(2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{1}{2(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})(\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

$$c_3 = -\frac{\omega_n^2}{\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})(2\omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1})} = \frac{1}{2(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})(\sqrt{\zeta^2 - 1})}$$

Τελικά, αντιστρέφοντας,

$$y(t) = 1 + \frac{1}{2(\zeta^2 - 1 + \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t} + \frac{1}{2(\zeta^2 - 1 - \zeta\sqrt{\zeta^2 - 1})} e^{-(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})\omega_n t}$$

Η απόκριση περιλαμβάνει δύο φθίνουσες εκθετικές συναρτήσεις με χρονικές σταθερές  $T_1$  και  $T_2$ . Όταν το  $\zeta$  είναι σημαντικά μεγαλύτερο του 1, η μία εκθετική συνάρτηση φθίνει πολύ ταχύτερα από την άλλη, επομένως ο όρος που αντιστοιχεί στη μικρότερη χρονική σταθερά μπορεί να αμεληθεί. Με την απαλοιφή του εκθετικού όρου που φθίνει ταχύτερα, η απόκριση είναι όμοια με εκείνη ενός συστήματος πρώτης τάξης.

3) *Ειδικές περιπτώσεις: Α. Κρίσιμη απόσβεση ( $\zeta=1$ )*

Στη περίπτωση αυτή οι δύο πόλοι της συνάρτησης μεταφοράς είναι πραγματικοί και ίσοι,

$$s_1 = s_2 = -\omega_n$$

Για είσοδο  $R(s)=1/s$ , προκύπτει

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s + \omega_n)^2}$$

Από το Παράδειγμα 1.2,

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n t} - \omega_n t e^{-\omega_n t} = 1 - e^{-\omega_n t} (1 + \omega_n t)$$

Η συνάρτηση αυτή είναι εκθετικής μορφής με όριο το 1 (αν φυσικά  $\omega_n > 0$ ).

B. Μηδενική απόσβεση ( $\zeta=0$ ). Στη περίπτωση αυτή οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι φανταστικές,

$$s_{1,2} = \pm j\omega_n$$

και η απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης προκύπτει από την (4.7), αν θέσουμε  $\zeta=0$ , οπότε  $\omega_d = \omega_n$  και  $\theta = 90^\circ$ :

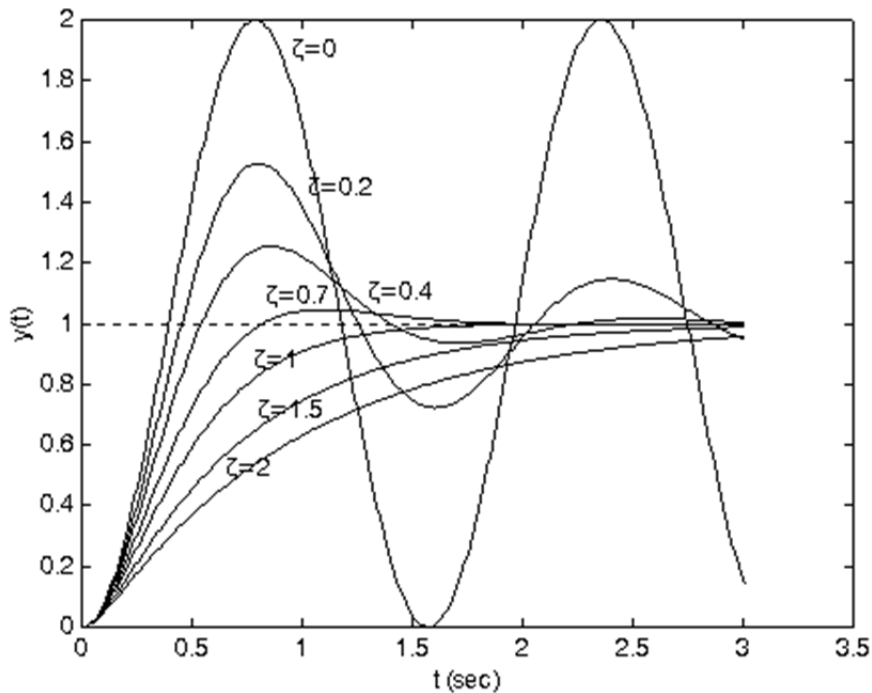
$$y(t) = 1 - \sin\omega_n t$$

Η λύση είναι λοιπόν μία συνημιτονοειδής συνάρτηση χωρίς απόσβεση.

Από την μορφή των λύσεων προκύπτει και η φυσική σημασία των χρησιμοποιουμένων παραμέτρων:

- $\omega_n$ : φυσική συχνότητα (χωρίς απόσβεση). Είναι η συχνότητα ταλάντωσης της απόκρισης όταν ο λόγος απόσβεσης  $\zeta=0$ .
- $\zeta$ : λόγος απόσβεσης. Είναι ο λόγος της σταθεράς απόσβεσης  $\zeta\omega_n$  και της σταθεράς απόσβεσης για κρίσιμες διαδικασίες (δηλαδή  $\zeta=1$  που δίνει  $\sigma_\alpha = \omega_n$ ).

Χαρακτηριστικές καμπύλες όλων των περιπτώσεων που εξετάστηκαν δίνονται στο Σχ. 3.4.



Σχήμα 3.4 Καμπύλες χρονικής απόκρισης της τυπικής διαδικασίας δευτέρας τάξης σε είσοδο μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης ( $\omega_n = 4$ ).

### 3.3 Σχεδιαστικά κριτήρια χρονικής απόκρισης συστημάτων

Η χρονική απόκριση των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου συνήθως χωρίζεται σε δύο μέρη: την **μεταβατική απόκριση** και την **απόκριση σταθεράς κατάστασης**. Έτσι,

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

Με τον όρο μεταβατική απόκριση, και όσον αφορά στα συστήματα αυτομάτου ελέγχου, εννοείται το τμήμα της απόκρισης που τείνει στο μηδέν όταν ο χρόνος είναι πολύ μεγάλος. Δηλαδή,

$$\text{or } y_t(t) = 0 \\ t \rightarrow \infty$$

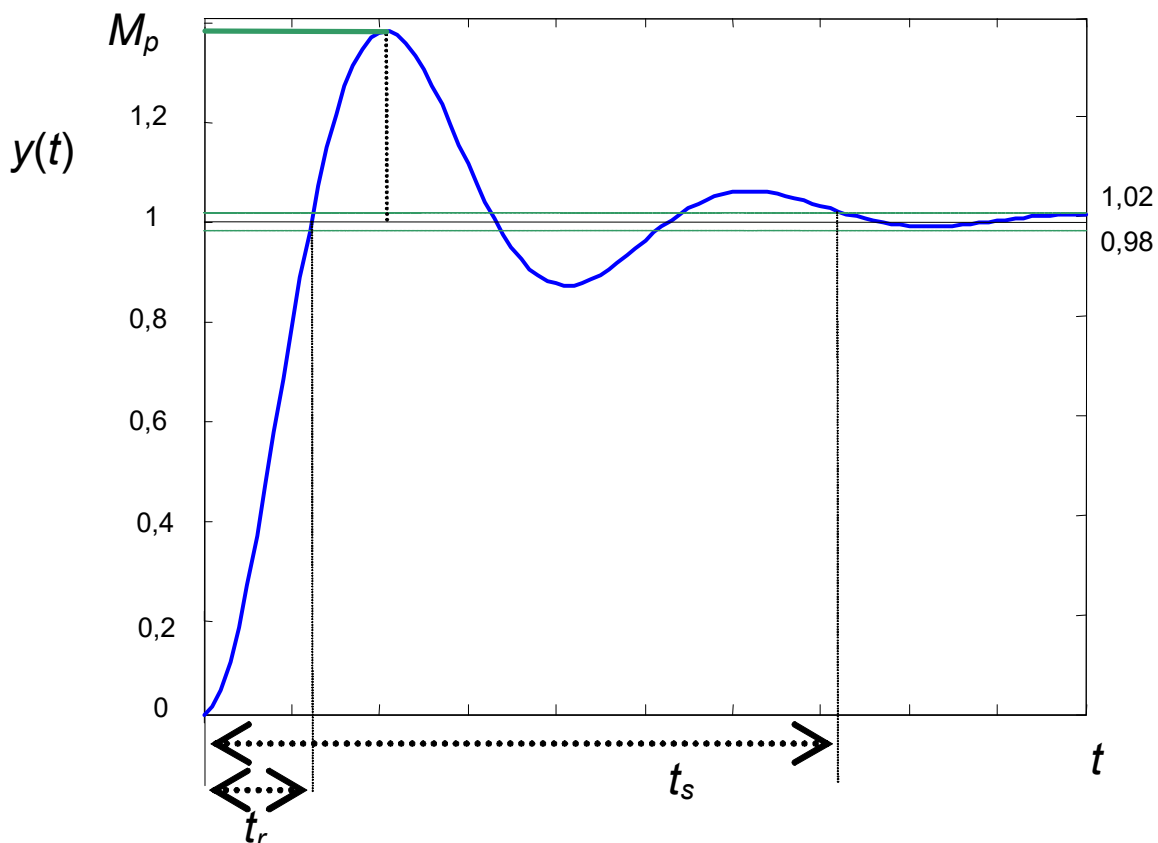
Σε αντιδιαστολή η απόκριση σταθεράς κατάστασης μπορεί να ορισθεί σαν το τμήμα που απομένει όταν η μεταβατική απόκριση έχει μηδενισθεί.

Συχνά η επιθυμητή συμπεριφορά ενός συστήματος ελέγχου περιγράφεται από χαρακτηριστικές παραμέτρους της χρονικής απόκρισης (στην μεταβατική και σταθερά κατάσταση) σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας. Με τη γνώση αυτής της απόκρισης μπορούν να εξαχθούν συμπεράσματα για την συμπεριφορά σε οποιαδήποτε είσοδο. Οι πιο ενδιαφέρουσες παράμετροι θα αναφερθούν στην συνέχεια και, στην περίπτωση διαδικασιών δευτέρας τάξης, θα συσχετισθούν με τις παραμέτρους  $\zeta$  και  $\omega_n$  της

συνάρτησης μεταφοράς. Υπενθυμίζεται ότι τα συμπεράσματα για τις διαδικασίες δευτέρας τάξης επεκτείνονται, κάτω από ορισμένες προϋποθέσεις και σε διαδικασίες υψηλότερων τάξεων.

### 3.3.1 Παράμετροι μεταβατικής απόκρισης

Για την κατανόηση των παραμέτρων αυτών θα αναφερόμαστε στο Σχ. 3.5, που δείχνει μία τυπική απόκριση ενός συστήματος αυθαίρετης τάξης με υποαπόσβεση.



Σχήμα 3.5 Καμπύλη απόκρισης διαδικασίας δευτέρας τάξης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας

1. *Χρόνος ανύψωσης ( $t_r$ ):* Είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ανέλθει η απόκριση από το 10% στο 90% της τελικής της τιμής (άλλα συνήθη όρια είναι από 5% σε 95% ή από 0% σε 100%). Είναι φανερό ότι είναι επιθυμητό να είναι όσο πιο μικρός γίνεται.

Για την διαδικασία δευτέρας τάξης, ο χρόνος ανύψωσης βρίσκεται αναλυτικά αν στην (3.6) θέσουμε  $y(t_r)=1$ . Έτσι,

$$y(t_r) = 1 = 1 - e^{-\zeta\omega_n t_r} \left( \cos\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta \mu\omega_d t_r \right)$$

Επειδή,  $e^{-\zeta\omega_n t_r} \neq 0$ ,

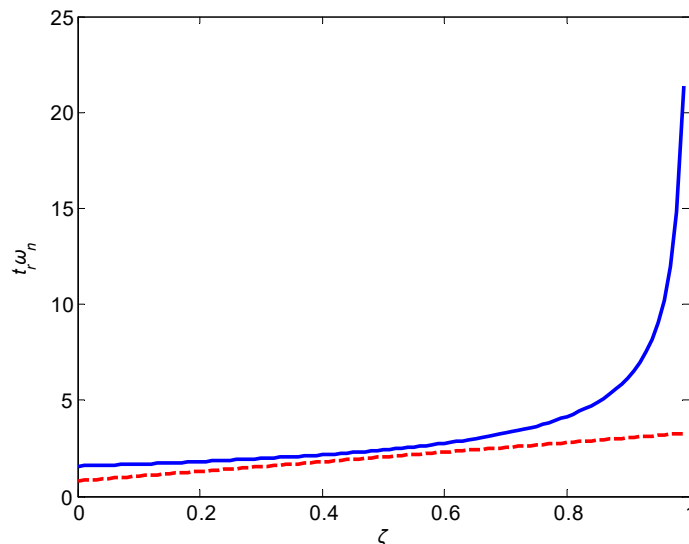
$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin\omega_d t_r + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta\mu\omega_d t_r &= 0 \\ \Rightarrow \epsilon\phi\omega_d t_r &= -\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο χρόνος ανύψωσης είναι,

$$t_r = \frac{1}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \text{τοξε}\phi\left(-\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

(βασικά η μικρότερη τιμή για την οποία ισχύει αυτή η σχέση). Από την σχέση αυτή είναι φανερό ότι όσο μεγαλύτερη είναι η  $\omega_n$  τόσο μικρότερος είναι ο χρόνος ανύψωσης. Η επίδραση του  $\zeta$  είναι μικρότερη αφού το  $\text{τοξε}\phi(\cdot)$  κυμαίνεται μεταξύ  $\pi/2$  και  $\pi$  για  $0 < \zeta < 1$ . Η γραφική παράσταση της σχέσης αυτής φαίνεται στο Σχ. 3.6. Πάντως, μία γραμμική προσέγγιση δίνει,

$$\text{© Α. Πουλιέζος} \quad t_r \cong \frac{0,8 + 2,5\zeta}{\omega_n}$$



Σχήμα 3.6 Κανονικοποιημένος χρόνος ανύψωσης συναρτήσει του  $\zeta$  και (γραμμική) προσέγγιση του

Για πρακτικούς λόγους πάντως, και για τιμές του  $\zeta$  που χρησιμοποιούνται συνήθως (γύρω στο 0,7),

$$t_r \approx \frac{1,8}{\omega_n} \quad (3.8)$$

2. *Μεγίστη (ποσοστιαία) υπερύψωση ( $M_p$ )*: Είναι η τιμή της μέγιστης κορυφής της καμπύλης απόκρισης, μετρούμενη από τη μονάδα. Όταν η τελική τιμή της μόνιμης κατάστασης της απόκρισης διαφέρει από την μονάδα, ο συνήθης ορισμός είναι:

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \%$$

Το μέγεθος της μέγιστης ποσοστιαίας υπερύψωσης είναι μία απ' ευθείας ένδειξη της σχετικής ευστάθειας του συστήματος. Είναι επιθυμητό να είναι όσο γίνεται μικρότερη. Για παράδειγμα στον έλεγχο μιας ακτίνας ραδιοϊσοτόπων, η οποία μπορεί να προξενήσει σοβαρές σωματικές βλάβες αν προσπέσει σε υγιή ιστό μακριά από τον στόχο της, λόγω υπερβολικής υπερακόντισης του σερβομηχανισμού θέσης της ραδιενεργού δέσμης.

Για την διαδικασία δευτέρας τάξης, η αναλυτική της έκφραση βρίσκεται από την (3.6) παρατηρώντας ότι στο σημείο αυτό η παράγωγος της  $y(t)$  μηδενίζεται. Έτσι,

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) = 0 &= \sigma_\alpha e^{-\sigma_\alpha t} \left( \sigma_\alpha \sin \omega_d t + \frac{\sigma_\alpha}{\omega_d} \eta \mu \omega_d t \right) - e^{-\sigma_\alpha t} (-\omega_d \eta \mu \omega_d t + \sigma_\alpha \sin \omega_d t) \\ &= e^{-\sigma_\alpha t} \left( \frac{\sigma_\alpha^2 + \omega_d^2}{\omega_d} \right) \eta \mu \omega_d t \end{aligned}$$

Αυτό συμβαίνει για  $\eta \mu \omega_d t = 0$  που σημαίνει,

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} \quad (3.9)$$

Αντικαθιστώντας την χρονική στιγμή στην (3.6), δίνει,

$$\begin{aligned} y(t_p) &\stackrel{\Delta}{=} 1 + M_p = 1 - e^{-\sigma_\alpha \pi / \omega_d} \left( \sin \pi + \frac{\sigma_\alpha}{\omega_d} \eta \mu \pi \right) = \\ &= 1 + e^{-\sigma_\alpha \pi / \omega_d} \end{aligned}$$

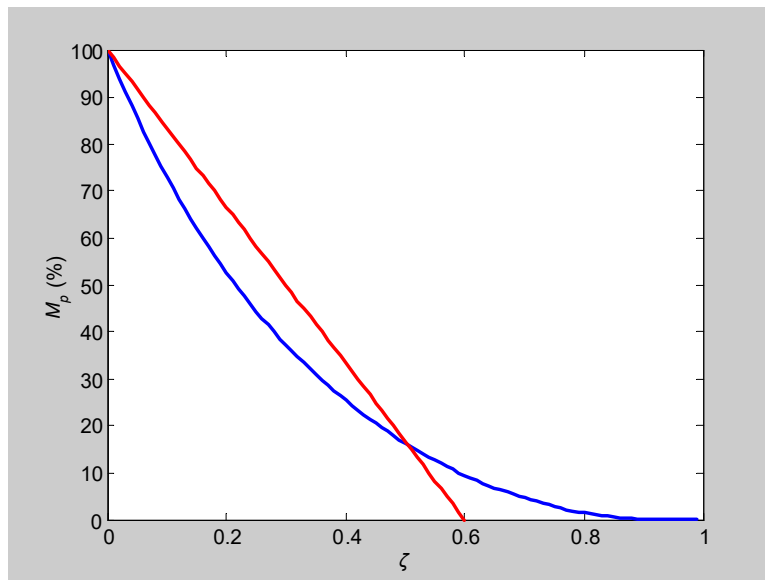
Έτσι,



$$M_p = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, \quad 0 \leq \zeta < 1 \quad (3.10)$$

$$\cong 1 - \frac{\zeta}{0,6}, \quad 0 \leq \zeta \leq 0,6$$

Η συνάρτηση  $M_p(\zeta)$  και η γραμμική της προσέγγιση φαίνονται στο Σχ. 3.7. Προφανώς αυξανόμενου του  $\zeta$  μειώνεται η υπερύψωση.



Σχήμα 3.7 Μέγιστη υπερύψωση συναρτήσει του  $\zeta$  και η γραμμική της προσέγγιση

3. *Χρόνος αποκατάστασης ( $t_s$ ):* Είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να φθάσει και να παραμείνει η καμπύλη απόκρισης μέσα σε ορισμένα όρια γύρω από την τελική τιμή. Το μέγεθος των ορίων εκφράζεται ως απόλυτο ποσοστό της τελικής τιμής (συνήθως  $\pm 5\%$  ή  $\pm 2\%$ ). Το ποσοστιαίο κριτήριο σφάλματος υιοθετείται με βάση τους αντικειμενικούς σκοπούς σχεδίασης του συστήματος. Όσο μικρότερος είναι ο χρόνος αυτός τόσο το καλύτερο.

Για την διαδικασία δευτέρας τάξης και στις περιπτώσεις που ενδιαφέρουν ( $0 < \zeta < 1$ ), η χρονική απόκριση είναι,

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta\mu(\omega_d t + \theta)$$

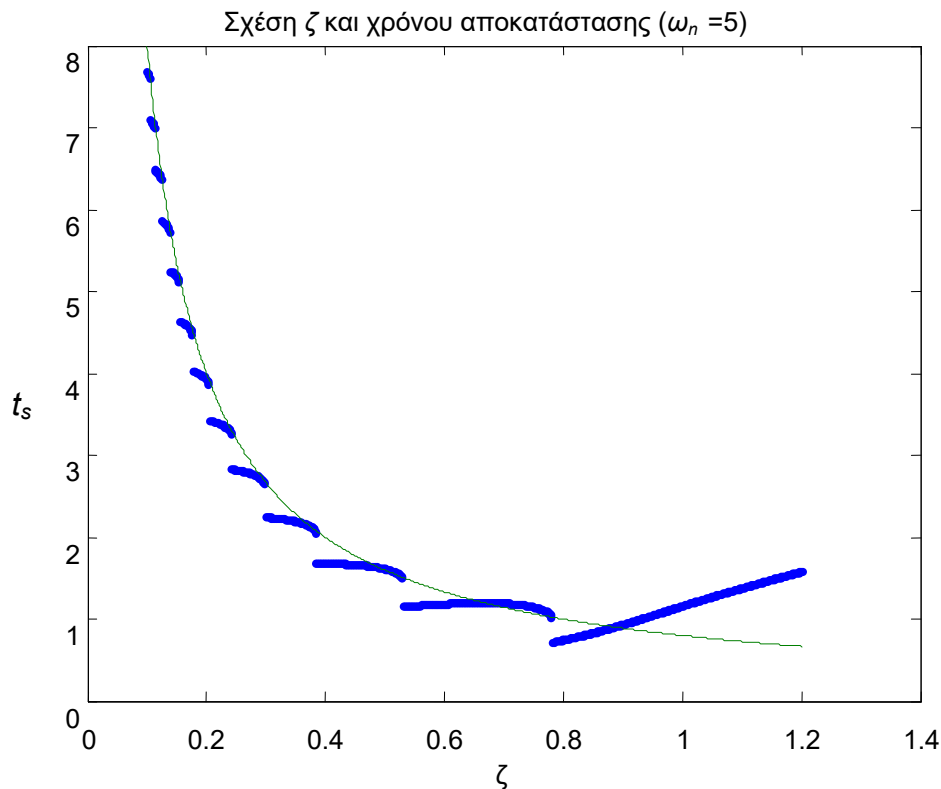
$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \eta\mu\left(\omega_d t + \varepsilon\varphi^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Δηλαδή η απόκλιση της απόκρισης από το 1 (τελική τιμή) είναι το γινόμενο ενός εκθετικού και ενός ημιτονοειδούς όρου. Το μέτρο της απόκλισης εξαρτάται ουσιαστικά από τον εκθετικό όρο, ο ρυθμός μείωσης του οποίου εξαρτάται από το  $\zeta\omega_n$ . Η

ακριβής σχέση μεταξύ  $\zeta$  και  $t_s$  για σταθερό  $\omega_n$  δίνεται στο Σχ. 3.8 όπου φαίνεται ότι υπάρχουν ασυνέχειες στη γραφική παράσταση. Αν δεν απαιτείται μεγάλη ακρίβεια μπορούμε προσεγγιστικά να πούμε ότι για ζώνη ανοχής 2%, ισχύει,

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} \cong 0,02 \Rightarrow t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3.11)$$

Αντίστοιχα για ζώνη ανοχής 5%,  $t_s \cong 3/\zeta\omega_n$ . Πάντως οι δύο αυτές σχέσεις είναι λίγο αποπροσανατολιστικές καθώς δίνουν την εντύπωση μονότονης σχέσης  $\zeta$  και  $t_s$ .



Σχήμα 3.8 Χρόνος αποκατάστασης συναρτήσει του  $\zeta$  (με καμπύλη προσέγγισης)

Συνοψίζοντας τα παραπάνω αποτελέσματα, συμπεραίνεται ότι για την ικανοποίηση των προδιαγραφών μεταβατικής απόκρισης σε συστήματα δευτέρας τάξης, δεν μπορούμε να επιλέξουμε αυτόνομα τον λόγο απόσβεσης  $\zeta$  για να ικανοποιηθούν οι απαιτήσεις της μέγιστης υπερύψωσης και του χρόνου αποκατάστασης καθώς οι σχέσεις τους είναι αντίστροφες. Πάντως, τιμές του  $\zeta$  μεταξύ 0,5 και 0,8 θεωρούνται αποδεκτές για καλή συμπεριφορά. Πρέπει όμως να τονισθεί ότι οι θεωρητικές τιμές δεν είναι πάντα πρακτικά υλοποιήσιμες λόγω φυσικών περιορισμών στο υπό εξέταση σύστημα. Στις περιπτώσεις αυτές πρέπει να χρησιμοποιηθούν άλλες τεχνικές, που θα εξετασθούν στην συνέχεια. Ο επόμενος πίνακας συνοψίζει τα σχετικά αποτελέσματα αυτής της παραγράφου.

Πίνακας 3.1 Σύνοψη απαιτήσεων μεταβατικής απόκρισης για συστήματα δευτέρας τάξης.

Μεταβλητή απόκρισης	Παράμετρος συνάρτησης μεταφοράς	Προσεγγιστικός τύπος
$t_r \downarrow$	$\omega_n \uparrow \zeta \downarrow$	$\cong \frac{0,8 + 2,5\zeta}{\omega_n}$
$M_p \downarrow$	$\zeta \uparrow$	$\cong 1 - \frac{\zeta}{0,6}, 0 \leq \zeta \leq 0,6$
$t_s \downarrow$	μη γραμμική σχέση, βέλτιστο για $\zeta \approx 0,7$	$\cong \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{\sigma_\alpha}$

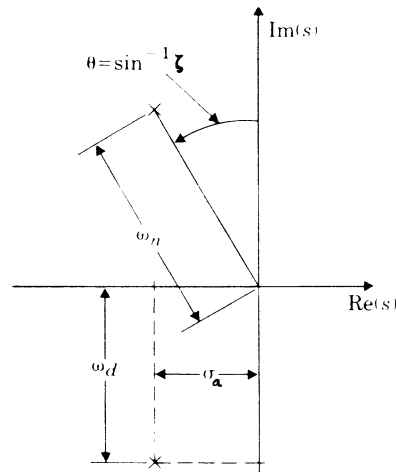
### 3.3.1.1 Συσχέτιση της θέσης των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης στο επίπεδο $s$ και της μορφής της χρονικής απόκρισης.

Αν κρίνουμε από την αναλυτική έκφραση της χρονικής απόκρισης των διαδικασιών δευτέρας τάξης σε είσοδο μοναδιαίας βηματικής συνάρτησης, θα συμπεράνουμε ότι η προσέγγιση αυτή δεν θα βοηθήσει στην εξαγωγή γρήγορων συμπερασμάτων για την μορφή της απόκρισης διαδικασιών υψηλότερων τάξεων, όπου τα πράγματα θα είναι πολύ πιο πολύπλοκα. Ευτυχώς, στην θεωρία σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, έχουν αναπτυχθεί τεχνικές που δεν απαιτούν την αναλυτική γνώση της χρονικής απόκρισης. Στις τεχνικές αυτές, κυρίαρχο ρόλο παίζει η θέση των πόλων (ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης) του συστήματος στο  $s$ -επίπεδο.

Ξεκινώντας από τις ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης για την διαδικασία δευτέρας τάξης,

$$\begin{aligned} s_{1,2} &= -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \\ &= -\sigma_\alpha \pm j\omega_d \end{aligned}$$

παρατηρούμε ότι με απλή γεωμετρία, προκύπτουν οι σχέσεις που φαίνονται στο Σχ. 3.9.



Σχήμα 3.9 Σχέση μεταξύ πόλων και  $\zeta$ ,  $\omega_n$ ,  $\omega_d$  και  $\sigma_\alpha$

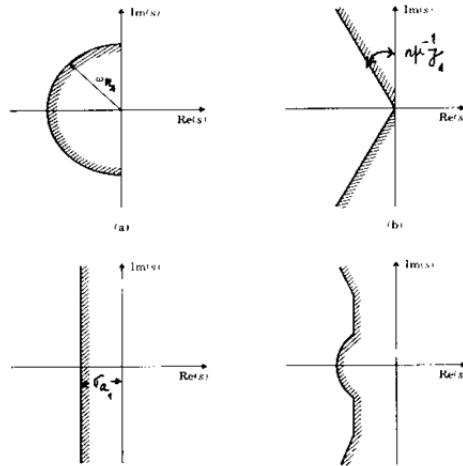
Είναι λοιπόν φανερό ότι μπορούμε να μεταφράσουμε τις απαιτήσεις της χρονικής απόκρισης (ευστάθεια, μέγιστη υπερύψωση κλπ.) σε περιοχές του επιπέδου  $s$ . Κατ' αρχήν, η απαίτηση της ευστάθειας περιορίζει την αποδεκτή περιοχή στο αριστερό ημιεπίπεδο. Στην συνέχεια, οι απαιτήσεις της μεταβατικής απόκρισης θα είναι της μορφής,

$$M_p \leq M'_p, t_s \leq t'_s, t_r \leq t'_r$$

Οι απαιτήσεις αυτές μεταφράζονται σε απαιτήσεις στα  $\zeta$ ,  $\omega_n$  και  $\sigma_\alpha$ . Δηλαδή, στην γενική περίπτωση θα έχουμε,

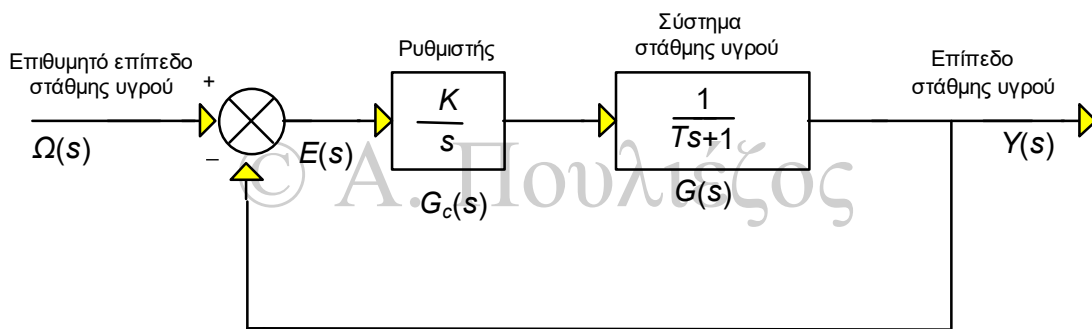
$$\zeta_1 \leq \zeta, \omega_{n1} \leq \omega_n, \sigma_{\alpha1} \leq \sigma_\alpha$$

Με βάση το Σχ. 3.9, οι ανισότητες αυτές ορίζουν περιοχές στο επίπεδο  $s$ , που φαίνονται στα Σχ. 3.10 (μη σκιασμένοι χώροι). Επομένως, όλη η προσπάθεια σχεδιασμού καταλήγει στο να επιλέξουμε τον κατάλληλο τρόπο με τον οποίο θα μετακινηθούν οι πόλοι της αρχικής συνάρτησης μεταφοράς (αν δεν είναι ήδη στην σωστή θέση) σε αποδεκτή περιοχή με βάση τις προδιαγραφές σχεδίασης.



Σχήμα 3.10 Αποδεκτές περιοχές πόλων βάσει προδιαγραφών χρονικής απόκρισης.

**Παράδειγμα 3.2** Στο Σχ. 3.11 φαίνονται το λειτουργικό και δομικό διάγραμμα ενός συστήματος ελέγχου στάθμης υγρού. Να υπολογισθούν οι παράμετροι  $K$  και  $T$  εάν το ποσοστό υπερέψωσης είναι 25,4% για  $t_p=3$  όταν η είσοδος του συστήματος είναι η μοναδιαία βηματική διέγερση.



Σχήμα 3.11 Σύστημα ελέγχου στάθμης υγρού

Λύση: Από την (3.10),

$$0,254 = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \ln 0,254 = -\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow \zeta = 0,4$$

Εφόσον η μέγιστη υπερέψωση συμβαίνει σε χρόνο 3s, από την (3.9),

$$t_p = 3 = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \Rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}} = 1,14$$

Η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού συστήματος είναι,

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

ενώ του κλειστού,

$$H(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{K}{s(Ts+1)}}{1+\frac{K}{s(Ts+1)}} = \frac{\frac{K}{T}}{s^2 + \frac{1}{T}s + \frac{K}{T}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Αντιστοιχώντας τους όρους, έχουμε,

$$2\zeta\omega_n = \frac{1}{T} \Rightarrow T = 1,09$$

$$\omega_n^2 = \frac{K}{T} \Rightarrow K = \omega_n^2 T = 1,42$$

### 3.3.2 Ευστάθεια

Η έννοια της ευστάθειας μπορεί να υποδιαιρεθεί σε δύο κατηγορίες: την **απόλυτη ευστάθεια** και την **σχετική ευστάθεια**. Η σχετική ευστάθεια αναφέρεται σε χαρακτηριστικές παραμέτρους της μεταβατικής απόκρισης όπως είναι η μέγιστη υπερύψωση και ο λόγος απόσβεσης. Στην συνέχεια όταν αναφέρουμε τον όρο ευστάθεια θα εννοείται η απόλυτη ευστάθεια.

Υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για την ευστάθεια των συστημάτων ελέγχου. Για γραμμικά, χρονικά αμετάβλητα συστήματα, ο πιο χρήσιμος ορισμός είναι αυτός της **φραγμένης εισόδου-φραγμένης εξόδου** (*bounded input–bounded output, BIBO*):

Αν  $r(t)$ ,  $y(t)$  είναι η είσοδος και η έξοδος αντίστοιχα ενός συστήματος, τότε,

$$|r(t)| \leq N < \infty; \forall t \geq t_0 \Rightarrow |y(t)| \leq M < \infty; \forall t \geq t_0$$

Αποδεικνύεται (και ήδη είδαμε την περίπτωση της διαδικασίας δευτέρας τάξης) ότι για να είναι ένα σύστημα ευσταθές πρέπει οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης να βρίσκονται στο αριστερό ημιεπίπεδο  $s$ , δηλαδή,

$$\operatorname{Re}(s) = \sigma_\alpha < 0$$

Είναι προφανές, ότι ένα καλοσχεδιασμένο σύστημα δεν μπορεί παρά να είναι ευσταθές. Εφόσον για την εξακρίβωση της ιδιότητας αυτής, είναι απαραίτητη η γνώση των τιμών των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης, απαιτείται μία απλή μέθοδος για τον έλεγχο αυτό. Βέβαια, σήμερα που η υπολογιστική δύναμη είναι φθηνή, γρήγορες και ακριβείς αριθμητικές μέθοδοι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για το πρόβλημα αυτό. Σε εποχές που οι υπολογισμοί έπρεπε να γίνουν με το χέρι εχρησιμοποιούντο πιο

πρακτικές μέθοδοι:

- Η μέθοδος *Routh–Hurwitz*. Έγκειται στην διατύπωση συνθηκών μεταξύ των συντελεστών του χαρακτηριστικού πολυωνύμου, που επιτρέπουν την εξαγωγή συμπεράσματος για την ευστάθεια χωρίς την εύρεση των ριζών. Για παράδειγμα, μία αναγκαία αλλά όχι ικανή συνθήκη για να έχει το πολυώνυμο,

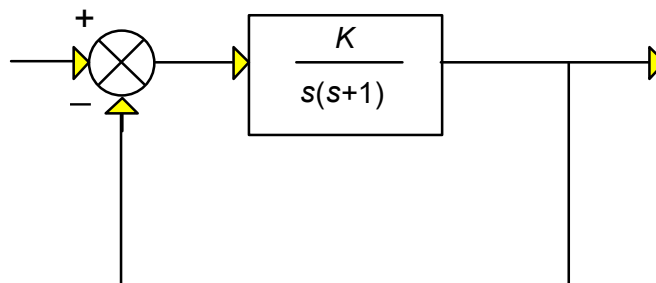
$$a(s) = s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_n$$

ρίζες με αρνητικά πραγματικά μέρη, είναι  $a_i > 0$ .

- Η γραφική παράσταση του **γεωμετρικού τόπου των ριζών** (γ.τ.ρ.). Χρησιμοποιώντας ένα σύνολο σχετικά εύχρηστων κανόνων, είναι δυνατό να σχεδιασθεί στο επίπεδο  $s$  η μεταβολή των ριζών της χαρακτηριστικής εξίσωσης καθώς μεταβάλλεται κάποια παράμετρος του συστήματος. Ο γ.τ.ρ. κατασκευάζεται με γνώση της συνάρτησης μεταφοράς  $G(s)$  του ανοικτού συστήματος. Αν το σχήμα παραμένει εντός των ορίων του αριστερού ημιεπιπέδου, το σύστημα είναι ευσταθές για όλες τις τιμές της παραμέτρου (σπάνιο). Σε διαφορετική περίπτωση, επιλέγονται οι τιμές της παραμέτρου που διατηρούν το σύστημα ευσταθές. Η ευρεία χρήση σχεδιαστικών πακέτων για προσωπικούς υπολογιστές, όπως π.χ. το **MATLAB** κάνει την μέθοδο αυτή αρκετά ελκυστική.

Ας δούμε ένα απλό παράδειγμα, για την κατανόηση του γεωμετρικού τόπου των ριζών. Για το σύστημα του Σχ. 3.12 η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού συστήματος είναι,

$$H(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)} = \frac{\frac{K}{s(s+1)}}{1 + \frac{K}{s(s+1)}} = \frac{K}{s^2 + s + K}$$

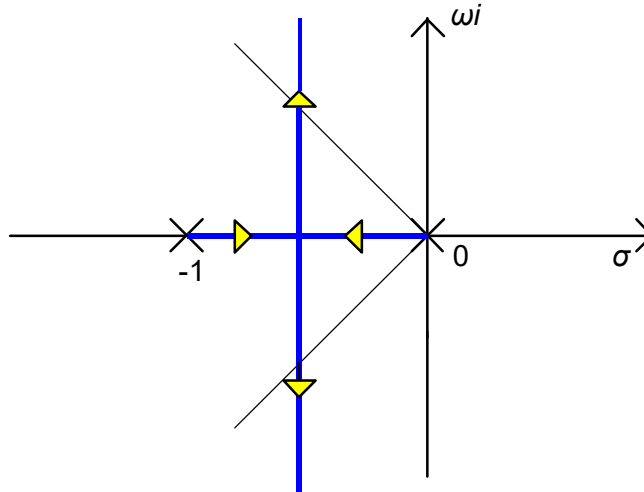


Σχήμα 3.12

Ο γ.τ.ρ. του συστήματος αυτού προκύπτει από την εξέταση των ριζών του παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς (δηλαδή των πόλων) καθώς μεταβάλλεται το  $K$ . Σ' αυτή την απλή περίπτωση μπορούμε εύκολα να σχεδιάσουμε τον γ.τ.ρ., αφού μπορούμε να εκφράσουμε τους πόλους αναλυτικά συναρτήσει του  $K$ :

$$s_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1-4K}}{2}$$

Μεταβάλλοντας το  $K$  από 0 έως άπειρο προκύπτει ο γ.τ.ρ. του Σχ. 3.13.



Σχήμα 3.13 Γεωμετρικός τόπος ριζών για το σύστημα του Σχ. 3.12.

Είναι φανερό ότι για διαδικασίες υψηλότερων τάξεων δεν μπορούμε να ακολουθήσουμε αναλυτικές μεθόδους, εξ ου και η ανάγκη για υπολογιστή. Αυτό που είναι σημαντικό είναι να μπορούμε να ερμηνεύουμε τα αποτελέσματα του υπολογιστή. Για το λόγο αυτό πρέπει να έχουμε υπόψη μας τα εξής:

- Ο γ.τ.ρ. είναι ο τόπος των λύσεων της εξίσωσης  $1+KG(s)=0$  καθώς μεταβάλλεται το  $K$ . Επειδή το  $s$  είναι μιγαδικός, αυτό μεταξύ άλλων σημαίνει ότι,

$$|KG(s)| = 1, \quad \angle KG(s) = 180^\circ \quad (3.12)$$

Η σχέση αυτή θα χρησιμεύσει αργότερα στην σχεδίαση ελεγκτών.

- Εάν ο γ.τ.ρ. παραμένει στο αριστερό ημιεπίπεδο τότε το σύστημα είναι ευσταθές για κάθε  $K$ , αν όχι τότε η τιμή  $K_{max}$ , πέρα της οποίας το σύστημα αποσταθεροποιείται, πρέπει να βρεθεί.

### 3.3.3 Σφάλμα σταθερής κατάστασης

Η απόδοση ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου κρίνεται εκτός από τα χαρακτηριστικά της μεταβατικής του απόκρισης, και από το σφάλμα σταθερής κατάστασης όταν καλείται να ακολουθήσει μία συγκεκριμένη είσοδο (συμπεριφορά). Η ακρίβεια σταθερής κατάστασης συνήθως ταξινομείται ανάλογα με το σφάλμα σταθερής κατάστασης όταν οι εισοδοί είναι πολυωνυμικές συναρτήσεις του χρόνου (βηματικές, αναρρίχησης, παραβολικές κλπ.). Το μέγεθος της ακρίβειας που απαιτείται εξαρτάται από την συγκεκριμένη εφαρμογή, αλλά πρέπει να τονισθεί ότι αν και θεωρητικά μπορεί το σφάλμα σταθερής κατάστασης να εξαλειφθεί με την χρήση κατάλληλου



ελέγχου, πρακτικά αυτό δεν είναι υλοποιήσιμο λόγω της ατέλειας των χρησιμοποιούμενων μοντέλων.

Αναφερόμενοι στο τυπικό δομικό διάγραμμα του Σχ. 3.14, το σήμα σφάλματος ορίζεται απλά σαν,

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (3.13)$$

ή παίρνοντας Laplace,

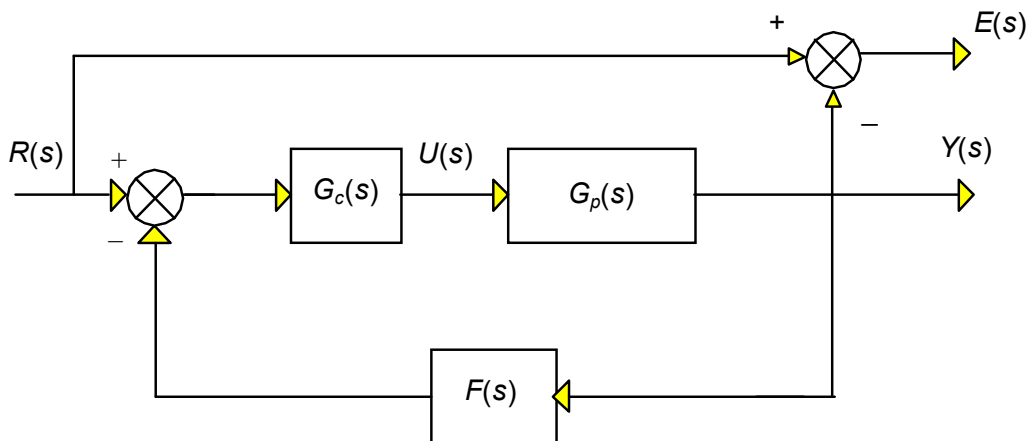
$$\begin{aligned} E(s) &= R(s) - Y(s) = R(s) - R(s)H(s) = R(s)(1 - H(s)) \\ &= R(s)G_e(s) \end{aligned}$$

όπου,  $H(s)$  είναι η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος,

$$H(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)F(s)}$$

και,

$$G_e(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1 + G_c(s)G_p(s)[F(s) - 1]}{1 + G_c(s)G_p(s)F(s)}$$



Σχήμα 3.14 Δομικό διάγραμμα για την εύρεση του σφάλματος σταθερής κατάστασης

Στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα της τελικής τιμής αν,

1. Η  $E(s)$  έχει πόλους στο αριστερό ημιεπίπεδο ή στο μηδέν και,
2. Η  $H(s)$  είναι ευσταθής, δηλαδή έχει πόλους μόνο στο αριστερό ημιεπίπεδο.

Τότε<sup>5</sup>,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sR(s)G_e(s) \quad (3.14)$$

Έτσι μπορούμε να βρούμε το σφάλμα σταθερής κατάστασης, χωρίς να χρειαστεί να επιλύσουμε για την χρονική απόκριση, όπως υπαινίσσεται η (3.13). Όμως, αν η τελική τιμή δεν είναι αρκετή για την πιστοποίηση της ποιότητας του συστήματος, και απαιτείται γνώση και της μεταβατικής απόκρισης του σφάλματος, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε άλλη τεχνική γνωστή ως **γενικευμένη θεώρηση των σφαλμάτων**.

Πριν προχωρήσουμε είναι απαραίτητος ένας σχετικός ορισμός:

- Ο **τύπος** ενός συστήματος είναι ο μέγιστος βαθμός  $k$  μιας πολυωνυμικής εισόδου που μπορεί να ακολουθήσει το σύστημα με πεπερασμένο, μη μηδενικό σφάλμα σταθεράς κατάστασης.

Για την συνέχεια ας απλοποιήσουμε κατ' αρχήν τα πράγματα, υποθέτοντας  $F(s)=1$  (μοναδιαία ανάδραση), και θέτοντας  $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ , οπότε,

$$G_e(s) = \frac{1}{1+G(s)}$$

Η συνάρτηση  $G(s)$  μπορεί να γραφτεί γενικά σαν,

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^j (a_n s^{n-j} + \dots + a_{j+1} s + a_j)} = \frac{b_0}{a_j} \frac{1}{s^j} \frac{((b_m/b_0)s^m + \dots + (b_1/b_0)s + 1)}{((a_n/a_j)s^{n-j} + \dots + (a_{j+1}/a_j)s + 1)} \\ &= \frac{K}{s^j} G'(s) \end{aligned}$$

Ο λόγος που η  $G(s)$  γράφεται έτσι είναι ότι  $\lim_{s \rightarrow 0} G'(s) = 1$ .

1. Ας λάβουμε  $R(s)=M/s$ , δηλαδή βηματική είσοδο εύρους  $M$ . Η (3.14) γίνεται,

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{\frac{M}{s}}{1+G(s)} = \frac{M}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} G(s)} = \begin{cases} \frac{M}{1+K} & \text{αν } j=0 \\ 0 & \text{αν } j>0 \end{cases} \quad (3.15)$$

<sup>5</sup> Είναι δυνατό το όριο να είναι πεπερασμένο, αλλά οι συνθήκες (1), (2) να μην ικανοποιούνται. Σ' αυτή τη περίπτωση το αποτέλεσμα του ορίου δεν έχει νόημα.

Το πρώτο αυτό αποτέλεσμα, δίνει αφορμή για κάποιους περαιτέρω ορισμούς:

- Στην συγκεκριμένη περίπτωση το  $e_\infty$  ονομάζεται **σφάλμα θέσης**.
- Η **σταθερά σφάλματος θέσης** ορίζεται ως ,

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s) = \begin{cases} K & \text{αν } j = 0 \\ \infty & \text{αν } j > 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

(υπενθυμίζεται ότι έχει υποθεθεί  $F(s)=1$ , διαφορετικά σαν συνάρτηση μεταφοράς του ανοιχτού βρόχου θα πρέπει να τεθεί η  $G(s)F(s)$ ).

Χρησιμοποιώντας τις (3.15), (3.16) παίρνουμε,

$$e_\infty = \frac{M}{1 + K_p} \quad (3.17)$$

2. Έστω,  $R(s)=W/s^2$ , δηλαδή η είσοδος είναι αναρρίχηση με κλίση ανάλογη του  $W$ . Αντίστοιχες πράξεις δίνουν,

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s \frac{W}{s^2}}{1 + \frac{K}{s^j} G'(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W s^{j-1}}{s^j + K G'(s)} = \begin{cases} \infty & \text{αν } j = 0 \\ \frac{W}{K} & \text{αν } j = 1 \\ 0 & \text{αν } j > 1 \end{cases} \quad (3.18)$$

- Στην συγκεκριμένη περίπτωση το  $e_\infty$  ονομάζεται **σφάλμα ταχύτητας**.
- Η **σταθερά σφάλματος ταχύτητας** ορίζεται ως ,

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} s G(s) = \begin{cases} 0 & \text{αν } j = 0 \\ K & \text{αν } j = 1 \\ \infty & \text{αν } j > 1 \end{cases} \quad (3.19)$$

Χρησιμοποιώντας τις (3.18), (3.19) παίρνουμε,

$$e_\infty = \frac{W}{K_v} \quad (3.20)$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γενικευθεί για αυθαίρετο βαθμό πολωνύμου. Επίσης, αν η είσοδος είναι άθροισμα πολωνυμικών όρων, το συνολικό σφάλμα είναι το άθροισμα των επιμέρους σφαλμάτων. Τα παραπάνω ευρήματα οδηγούν στην διατύπωση του ακόλουθου κανόνα:

- Ένα σύστημα μοναδιαίας ανάδρασης ακολουθεί μία πολωνυμική είσοδο  $k$  βαθμού με πεπερασμένο σφάλμα σταθερής κατάστασης αν η συνάρτηση μετα-

φοράς ανοικτού βρόχου  $G(s)$  έχει  $k$  πόλους στο μηδέν (είναι δηλαδή το σύστημα τύπου  $k$ ). Κατ' επέκταση έχει μηδενικό σφάλμα αν έχει  $k+1$  πόλους στο μηδέν (τύπου  $k+1$ ).

(Η υπογράμμιση είναι σημαντική).

### 3.3.4 Μέγεθος ελέγχου

Σε πραγματικά συστήματα σημαντικό ρόλο παίζει και το μέγεθος του σήματος ελέγχου  $u(t)$ . Σε κάθε περίπτωση δεν πρέπει να υπερβαίνεται το μέγιστο επιτρεπόμενο όριο που καθορίζεται από τη κάθε εφαρμογή, ενώ στις περισσότερες περιπτώσεις ενδιαφέρει και να εξοικονομηθεί ενέργεια. Στα πλαίσια των σημειώσεων αυτών, το πρόβλημα του μεγέθους του σήματος ελέγχου δεν μπορεί να αντιμετωπισθεί αναλυτικά (όπως κάνει για παράδειγμα η θεωρία του Βέλτιστου Ελέγχου) αλλά είναι χρήσιμο να παρακολουθούμε τη πορεία του και να κάνουμε τις κατάλληλες παρεμβάσεις αν είναι εκτός προδιαγραφών.

Από το Σχ. 3.15, η συνάρτηση μεταφοράς εισόδου αναφοράς/σήματος ελέγχου είναι,

$$U_R(s) = G_c(s)E(s) = G_c(s)[R(s) - Y(s)] = G_c(s)[R(s) - G_p(s)U(s)]$$

$$\Rightarrow U_R(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s)$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς διαταραχής/σήματος ελέγχου είναι,

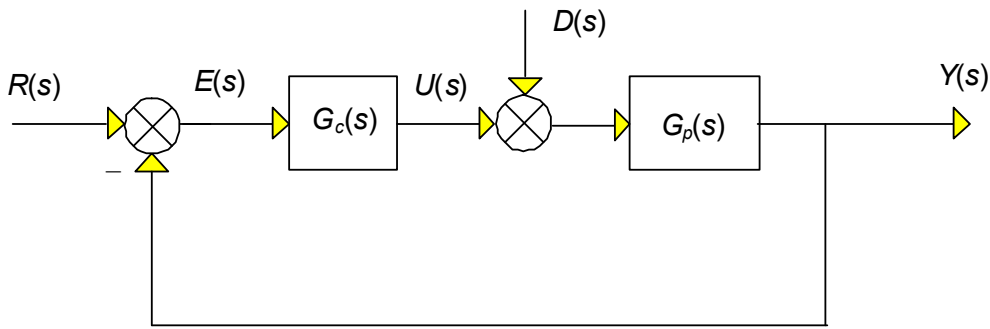
$$U_D(s) = G_c(s)E(s) = -G_c(s)Y(s) = -G_c(s)[G_p(s)(D(s) + U_D(s))]$$

$$\Rightarrow U_D(s) = -\frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} D(s)$$

(παρατηρήστε ότι η διαταραχή έχει εφαρμοστεί στην *είσοδο* της εγκατάστασης και όχι στην *έξοδο* της όπως στο Σχ. 2.5).

Επομένως το σήμα ελέγχου διαμορφώνεται από το άθροισμα των δύο αυτών συναρτήσεων μεταφοράς,

$$U(s) = U_R(s) + U_D(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} R(s) - \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} D(s)$$



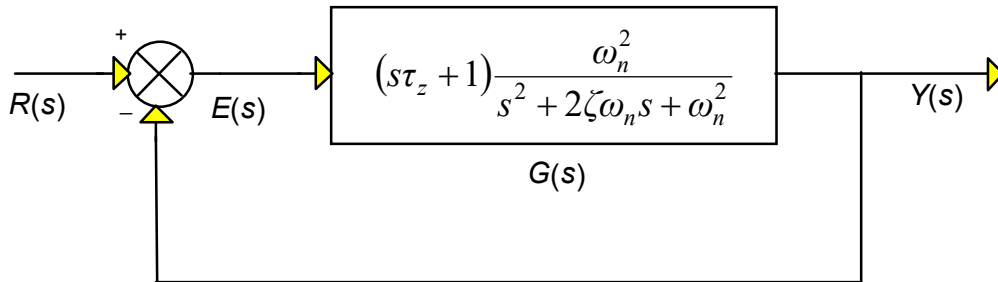
Σχήμα 3.15 Δομικό διάγραμμα για την εύρεση του σήματος ελέγχου

### 3.4 Συστήματα υψηλοτέρων τάξεων

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, η μέχρι τώρα ανάλυση ισχύει ακριβώς για συστήματα 1<sup>ης</sup> και 2<sup>ας</sup> τάξης και προσεγγιστικά για συστήματα υψηλότερων τάξεων που έχουν ένα ζευγάρι κυρίαρχων φανταστικών πόλων. Σε αντίθετη περίπτωση χρήσιμη είναι η γνώση της επίδρασης που έχει στο σύστημα, η πρόσθεση ενός επιπλέον πόλου ή μηδενικού στη συνάρτηση μεταφοράς του απευθείας βρόχου.

#### 3.4.1 Προσθήκη μηδενικών στην συνάρτηση μεταφοράς του απευθείας βρόχου

Ας υποθέσουμε ότι προσθέτουμε ένα μηδενικό στη συνάρτηση μεταφοράς του ευθέως βρόχου στην θέση  $z_1 = -1/\tau_z$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.16.



Σχήμα 3.16 Επιπλέον μηδενικό στη συνάρτηση μεταφοράς ευθέως βρόχου

(Ο λόγος που η συνάρτηση μεταφοράς του επιπλέον μηδενικού είναι γραμμένη με αυτόν τον τρόπο είναι ότι για  $\tau_z = 0$  το σύστημα μεταπίπτει στο αρχικό). Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου είναι,

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 (s\tau_z + 1)}{s^2 + (2\zeta\omega_n + \omega_n^2\tau_z)s + 2\omega_n^2}$$

Όπως βλέπουμε το μηδενικό εμφανίζεται και στον αριθμητή και στον παρανομαστή της συνάρτησης μεταφοράς. Η επίδρασή του στην συνολική χρονική απόκριση είναι επομένως συνάρτηση και των δύο αυτών αλλαγών. Για την καλύτερη κατανόηση της

επίδρασης ας δούμε ένα παράδειγμα.

**Παράδειγμα 3.3** Έστω μία διαδικασία με συνάρτηση μεταφοράς ευθέως βρόχου,

$$G(s) = \frac{2.5}{s^2 + 2s + 2.5}$$

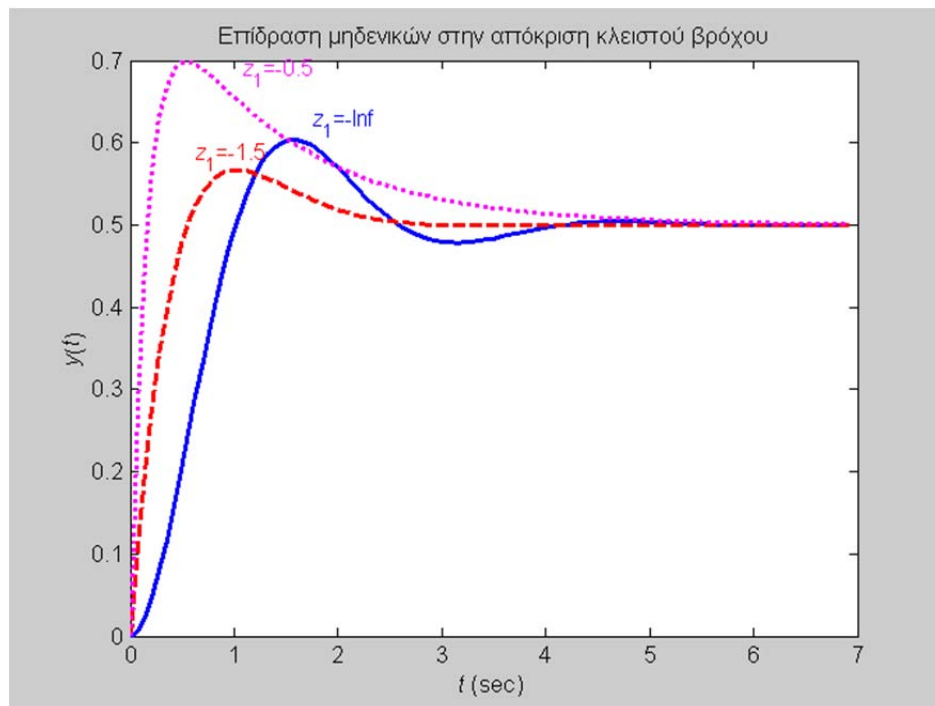
Η συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου είναι,

$$H(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)} = \frac{2.5}{s^2 + 2s + 5}$$

με πόλους στο  $-1 \pm 2j$ . Η προσθήκη του μηδενικού την μεταβάλλει σε,

$$H_z(s) = \frac{(s\tau_z + 1)G(s)}{1 + (s\tau_z + 1)G(s)} = \frac{2.5(s\tau_z + 1)}{s^2 + (2 + 2.5\tau_z)s + 5}$$

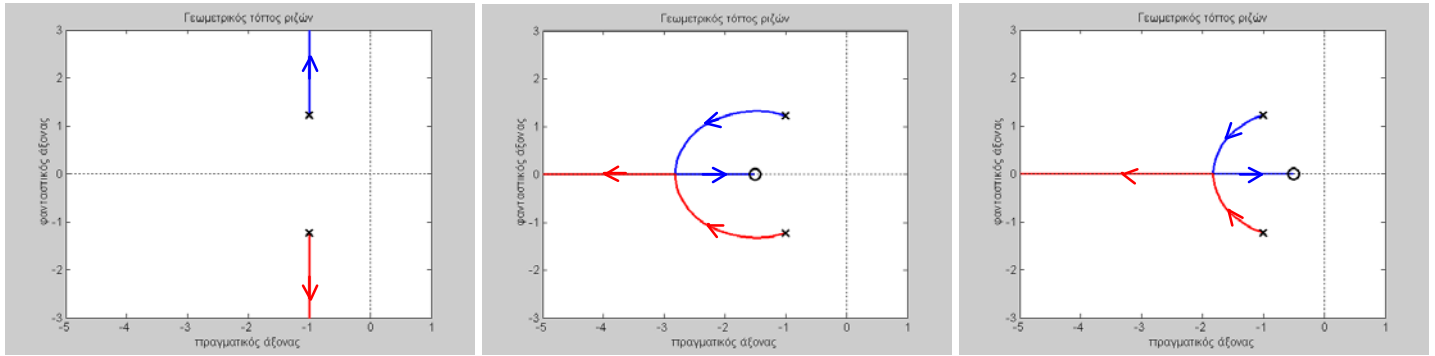
Στο Σχ. 3.17 φαίνεται η χρονική απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας για διάφορες τιμές του  $z_1$  (το  $-\infty$  αντιστοιχεί στο αρχικό σύστημα, χωρίς μηδενικά).



Σχήμα 3.17 Επίδραση μηδενικών ευθέως βρόχου στην χρονική απόκριση του κλειστού συστήματος

Όπως βλέπουμε από τα γραφήματα, το σύστημα έχει μικτή συμπεριφορά: αν το μηδενικό βρίσκεται αριστερά από τους πόλους του συστήματος ( $\text{Re}(z) < -1$ ), υπάρχει βελτίωση σε όλες τις παραμέτρους (χρόνο ανύψωσης, μέγιστη υπερύψωση, χρόνο αποκατάστασης). Αν το μηδενικό βρίσκεται δεξιότερα των πόλων ( $\text{Re}(z) > -1$ ) ο μεν

χρόνος ανύψωσης μικραίνει αλλά η μέγιστη υπερύψωση και ο χρόνος αποκατάστασης επιδεινώνονται. Οι αντίστοιχοι γεωμετρικοί τόποι των ριζών του Σχ. 3.18 δείχνουν επίσης πως το τροποποιημένο σύστημα έχει καλύτερη δυναμική συμπεριφορά καθώς οι πόλοι έχουν μετατοπισθεί αριστερότερα, με αποτέλεσμα την βελτίωση της «σχετικής ευστάθειας».



A. Σύστημα 2ας τάξης

B. Σύστημα 2ας τάξης με επιπλέον μηδενικό αριστερά

Γ. Σύστημα 2ας τάξης με επιπλέον μηδενικό δεξιά

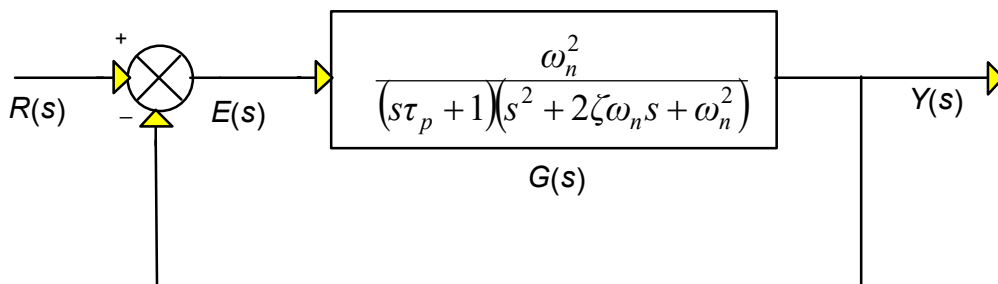
Σχήμα 3.18 Αποδεκτές περιοχές πόλων βάσει προδιαγραφών χρονικής απόκρισης.

Σαν συμπέρασμα προκύπτει ότι:

- Επιπλέον μηδενικά στην συνάρτηση μεταφοράς ανοικτού βρόχου βελτιώνουν την σχετική ευστάθεια, μειώνουν τον χρόνο ανύψωσης και για κατάλληλες τιμές μειώνουν και τα υπόλοιπα χαρακτηριστικά (μέγιστη υπερύψωση, χρόνος αποκατάστασης).

### 3.4.2 Προσθήκη πόλων στην συνάρτηση μεταφοράς του απευθείας βρόχου

Ας υποθέσουμε στη συνέχεια ότι προσθέτουμε ένα πόλο στη συνάρτηση μεταφοράς του ευθέως βρόχου στην θέση  $p_1 = -1/\tau_p$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.19.



Σχήμα 3.19 Επιπλέον πόλος στη συνάρτηση μεταφοράς ευθέως βρόχου.

Έτσι η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου γίνεται,

$$H_p(s) = \frac{\omega_n^2}{s^3\tau_p + (2\zeta\omega_n\tau_p + 1)s^2 + (\omega_n^2\tau_p + 2\zeta\omega_n)s + 2\omega_n^2}$$

Όπως βλέπουμε η τάξη του συστήματος αυξήθηκε και οι πόλοι μετακινήθηκαν. Ας δούμε το προηγούμενο παράδειγμα ξανά.

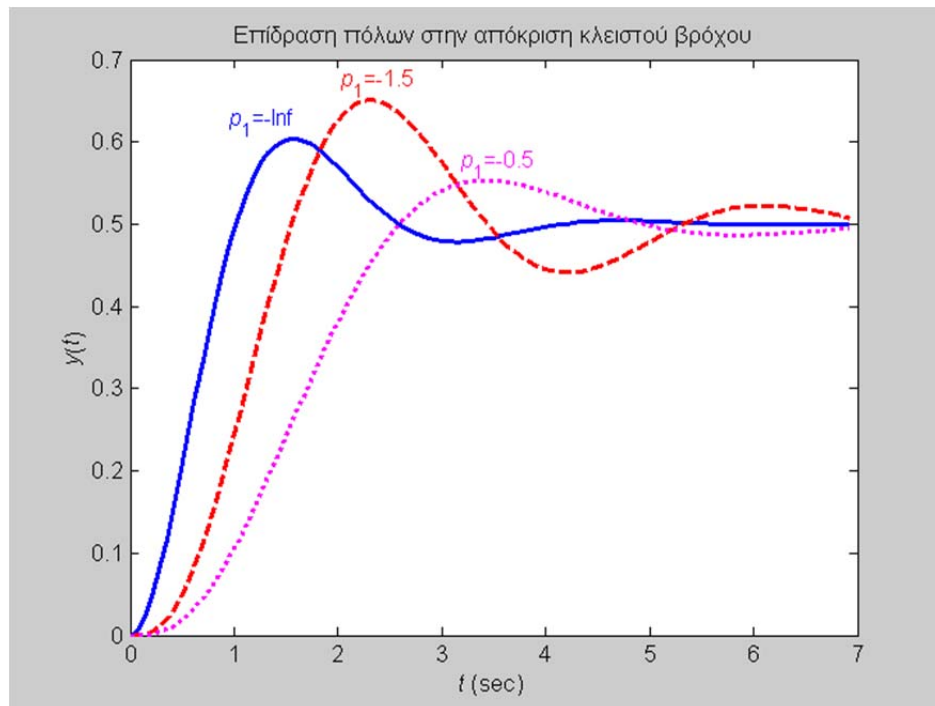
**Παράδειγμα 3.4** Η διαδικασία ευθέως βρόχου είναι ξανά η,

$$G(s) = \frac{2.5}{s^2 + 2s + 2.5}$$

ενώ η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου μετά την προσθήκη του πόλου γίνεται,

$$H_p(s) = \frac{\frac{1}{(s\tau_p + 1)}G(s)}{1 + \frac{1}{(s\tau_p + 1)}G(s)} = \frac{2.5}{s^3\tau_p + (2\tau_p + 1)s^2 + (2.5\tau_p + 2)s + 5}$$

Στο Σχ. 3.20 φαίνεται η χρονική απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας για διάφορες τιμές του  $p_1$ .



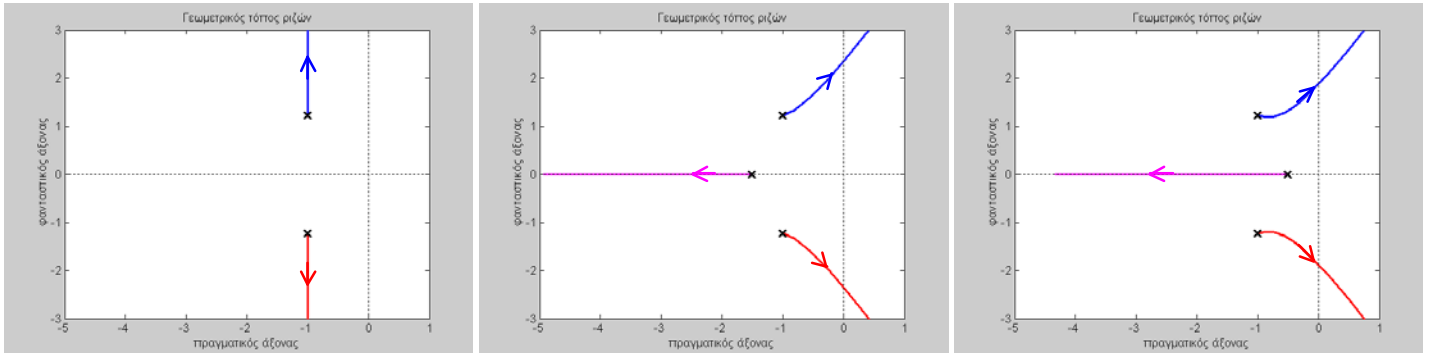
Σχήμα 3.20 Επίδραση πόλων ευθέως βρόχου στην χρονική απόκριση του κλειστού συστήματος.

Όπως φαίνεται η επίδραση είναι πάλι διαφορετική ανάλογα με τη θέση του επιπλέον πόλου. Αν είναι αριστερά των πόλων του συστήματος, όλες οι παράμετροι είναι επιδεινωμένες, ενώ αν είναι δεξιά η μόνο η μέγιστη υπερύψωση βελτιώνεται.

Οι γεωμετρικοί τόποι των ριζών που φαίνονται στο Σχ. 3.21 μας δίνουν την εξής πληροφορία για την επίδραση του επιπλέον πόλου: η «σχετική ευστάθεια» του συ-



στήματος επιδεινώνεται αφού η προσθήκη του πόλου μετατοπίζει τους πόλους δεξιότερα, καθιστώντας το σύστημα ευσταθές για συγκεκριμένες μόνο τιμές του κέρδους  $K$ .



A. Σύστημα 2ας τάξης

B. Σύστημα 2ας τάξης με επιπλέον πόλο αριστερά

Γ. Σύστημα 2ας τάξης με επιπλέον πόλο δεξιά

Σχήμα 3.21 Γεωμετρικοί τόποι ριζών

Συμπερασματικά, ο επιπλέον πόλος:

- Επιδεινώνει την σχετική ευστάθεια, τον χρόνο ανύψωσης και τον χρόνο αποκατάστασης, ενώ η μέγιστη υπερύψωση βελτιώνεται αν ο πόλος είναι δεξιότερα των πόλων του αρχικού συστήματος.

### 3.4.3 Μέθοδος κυρίαρχων πόλων

Στην Ενότητα 1.3.5 είδαμε την γενική μορφή της συνάρτησης μεταφοράς,

$$G(s) = \frac{b(s)}{a(s)} = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} \tag{1.26}$$

Γράφοντας την (1.26) σε μορφή μηδενικών-πόλων,

$$G(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad n \geq m$$

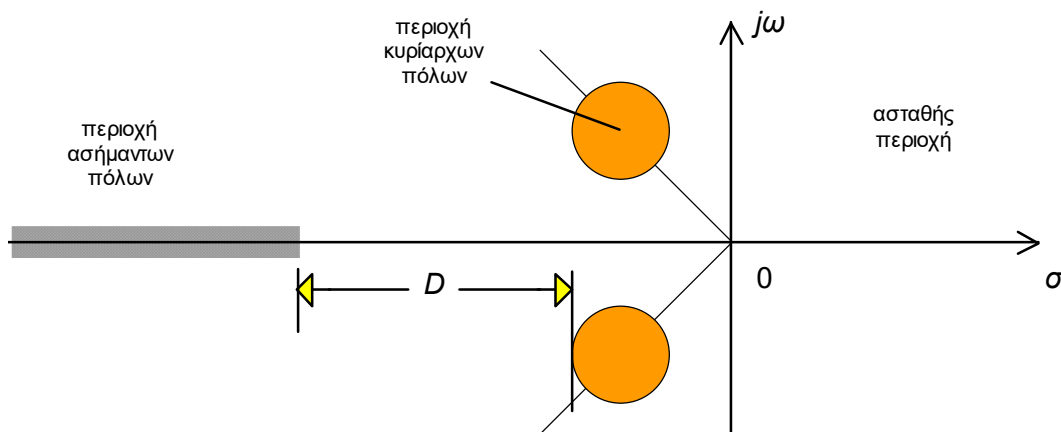
Αν η είσοδος  $R(s) = 1/s$ , τότε,

$$Y(s) = \frac{K \prod_{j=1}^m (s - z_j)}{s \prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{c_1}{s} + \frac{c_2}{(s - p_1)} + \dots + \frac{c_{n+1}}{(s - p_n)}$$

και αντιστρέφοντας,

$$y(t) = c_1 + \sum_{i=1}^n c_{i+1} e^{p_i t}$$

όπου οι συντελεστές  $c_i$  βρίσκονται με τη μέθοδο των μερικών κλασμάτων. Επομένως η χρονική απόκριση αποτελείται από ένα άθροισμα εκθετικών όρων που η μορφή τους αντιστοιχεί στη φύση των πόλων (πραγματικοί, μιγαδικοί, πολλαπλοί). Η ανάλυση τέτοιων συστημάτων για μεγάλα  $n$  ( $>3$ ) είναι δύσκολη. Υπάρχουν όμως περιπτώσεις που μπορούμε να προσεγγίσουμε τέτοια συστήματα με συστήματα δευτέρας τάξης. Αυτό γίνεται όταν ένα ζευγάρι μιγαδικών πόλων είναι *κυρίαρχο*, δηλαδή η θέση του είναι τέτοια σε σχέση με τους υπόλοιπους πόλους, ώστε η χρονική απόκριση να προσεγγίζεται από την χρονική απόκριση ενός συστήματος δευτέρας τάξης με πόλους το κυρίαρχο ζευγάρι πόλων. Στο Σχ. 3.22 φαίνονται σχετικές περιοχές κυρίαρχων και ασήμαντων πόλων.



Σχήμα 3.22 Περιοχές κυρίαρχων και ασήμαντων πόλων

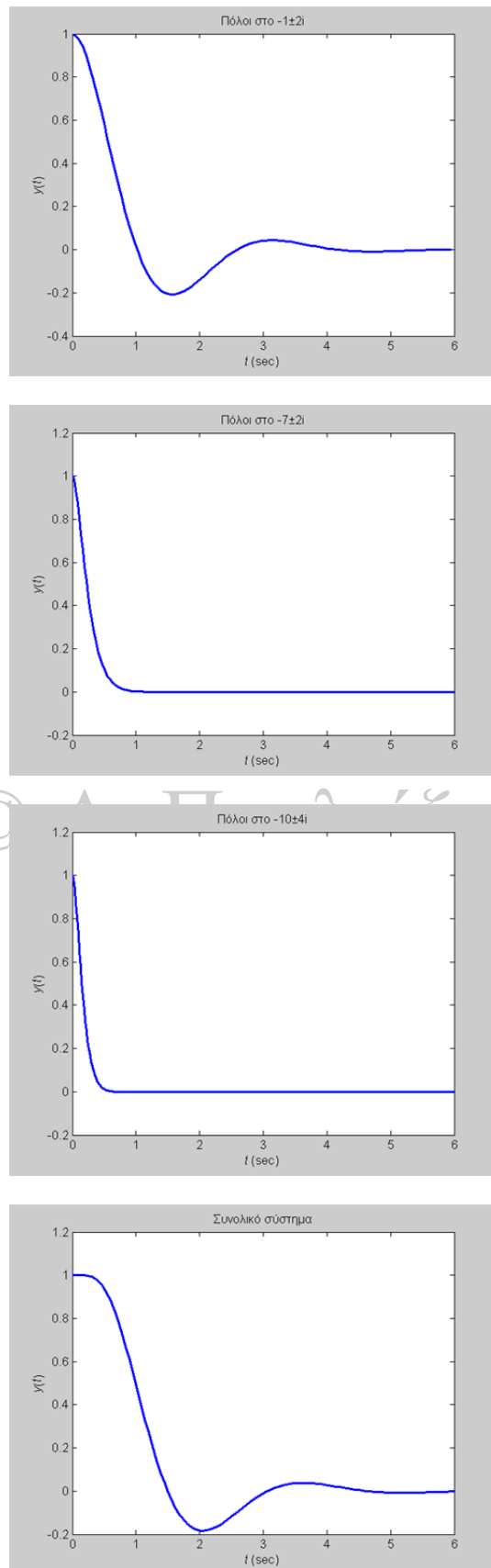
Η ακριβής απόσταση  $D$  ποικίλλει ανάλογα με το σύστημα, αλλά μπορούμε να πούμε ότι αν το πραγματικό μέρος ενός πόλου είναι 7–10 φορές του κυρίαρχου, τότε ο πόλος μπορεί να θεωρηθεί ασήμαντος όσον αφορά την μεταβατική απόκριση. Αυτό προκύπτει εύκολα αν σκεφθούμε ότι ο χρόνος αποκατάστασης είναι συνάρτηση του  $\zeta\omega_n$ , δηλαδή του πραγματικού μέρους των πόλων. Στο Σχ. 3.23 βλέπουμε τις χρονικές αποκρίσεις των επιμέρους πόλων και την συνολική απόκριση του συστήματος με

συνάρτηση μεταφοράς,

$$G(s) = \frac{5 \cdot 53 \cdot 116}{(s^2 + 2s + 5)(s^2 + 14s + 53)(s^2 + 20s + 116)}$$

και πόλους στο  $\{-1 \pm 2i\}$ ,  $\{-7 \pm 2i\}$ ,  $\{-10 \pm 4i\}$ . Όπως φαίνεται από τα επιμέρους γραφήματα, η απόκριση των ασήμαντων πόλων  $\{-7 \pm 2i\}$ ,  $\{-10 \pm 4i\}$  εξασθενεί αισθητά πιο γρήγορα (0,5 sec.) από αυτή του κυρίαρχου ζεύγους  $\{-1 \pm 2i\}$  (5 sec.) η δε συνολική απόκριση (4<sup>ο</sup> γράφημα) προσεγγίζεται αρκετά καλά από αυτή του κυρίαρχου ζεύγους.

© Α. Πουλιέζος



Σχήμα 3.23 Απόκριση συστήματος με κυρίαρχους και ασήμαντους πόλους

## 4 Σχεδίαση ελεγκτών

### 4.1 Εισαγωγή

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το κυρίως σώμα της επιστήμης του Αυτομάτου Ελέγχου, που είναι η σχεδίαση. Με τον όρο σχεδίαση εννοείται η εύρεση του κατάλληλου ελεγκτή για συγκεκριμένη διαδικασία. Τί σημαίνει κατάλληλος θα το δούμε αμέσως. Πάντως πρέπει να θυμόμαστε ότι ο ελεγκτής που θα βρεθεί θα πρέπει να δουλέψει σε πραγματικές συνθήκες και όχι στις ιδανικές συνθήκες του εργαστηρίου μας.

Η τοποθέτηση ενός ελεγκτή σ' ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου ικανοποιεί τους εξής στόχους:

- Ικανοποίηση προδιαγραφών μεταβατικής χρονικής απόκρισης: μέγιστη υπερύψωση, χρόνος αποκατάστασης, χρόνος ανύψωσης. Οι προδιαγραφές αυτές έχουν περιγραφεί στην Ενότητα 3.3.1.
- Ικανοποίηση προδιαγραφών σταθεράς κατάστασης: ευστάθεια, σφάλμα σταθεράς κατάστασης. Οι προδιαγραφές αυτές έχουν περιγραφεί στην Ενότητα 3.3.2.
- Στιβαρότητα: ικανοποίηση των προαναφερθέντων προδιαγραφών σε συνθήκες σχετικά διαφορετικές από αυτές που έχουν υποτεθεί για την σχεδίαση του ελεγκτή. Αυτό σημαίνει απόρριψη εξωτερικών διαταραχών, μικρή ευαισθησία σε θόρυβο μετρήσεων, μικρή ευαισθησία σε σφάλματα μοντέλου. Η απαίτηση αυτή δεν λαμβάνεται υπόψη αναλυτικά στην κλασσική θεωρία, αλλά εμπειρικά, αφού όπως θα δούμε η χρήση ανατροφοδότησης μεριμνά γι'αυτό.

Όπως έχει προαναφερθεί, οι ανωτέρω προδιαγραφές αναφέρονται σε συμπεριφορά σε συγκεκριμένες εισόδους, συνήθως δε σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας ή μοναδιαίας αναρρίχησης. Επομένως αναφερόμαστε ουσιαστικά στην συμπεριφορά της χρονικής απόκρισης. Πάντως η συμπεριφορά στις εισόδους αυτές, είναι ενδεικτικές και για άλλες εισόδους, επειδή μπορούν να προσεγγισθούν από συναρτήσεις βαθμίδας. Έτσι, η τακτική αυτή δεν θεωρείται περιοριστική.

### 4.2 Ουσιώδη προτερήματα συστημάτων με ανατροφοδότηση

Ας αρχίσουμε το κομμάτι αυτό λέγοντας ευθύς εξαρχής ότι τα ουσιώδη προτερήματα των συστημάτων με ανατροφοδότηση είναι δύο:

- Μειώνει την ευαισθησία του συστήματος σε μεταβολές ή αβεβαιότητα των τιμών των παραμέτρων που βρίσκονται στον ευθύ βρόχο.
- Μειώνει την επιρροή εξωτερικών διαταραχών.

Ο λόγος για την βιασύνη αυτή είναι ότι οι δύο αυτοί βασικοί λόγοι μερικές φορές

ξεχνιούνται καθώς αναφέρονται μαζί με άλλες επουσιώδεις διαφορές που έχει ένα κλειστό από ένα ανοικτό σύστημα (π.χ. σταθεροποίηση). Όμως ένα ανοικτό σύστημα μπορεί να είναι ευσταθές αλλά ποτέ δεν μπορεί να έχει τις ιδιότητες που προαναφέραμε.

Στην συνέχεια θα δούμε αναλυτικά τις ιδιότητες αυτές και την αιτιολόγηση της υπεροχής των κλειστών συστημάτων. Για τον λόγο αυτό θα αναφερθούμε στο τυπικό δομικό διάγραμμα του Σχ. 2.5 με συνάρτηση μεταφοράς την (3.1).

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{1}{1 + C(s)G(s)}D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}N(s) \quad (3.1)$$

Εξετάζοντας την εξίσωση αυτή βλέπουμε ότι για καλή λειτουργία, η έξοδος πρέπει να ακολουθεί την είσοδο παρά την ύπαρξη των όρων  $D(s)$ ,  $N(s)$ . Αυτό ουσιαστικά σημαίνει,

$$\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx 1$$

$$\frac{1}{1 + C(s)G(s)} \approx 0$$

$$\frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \approx 0$$

© Α. Πουλιέζος

Οι σχέσεις αυτές πρέπει να ικανοποιηθούν με σωστή επιλογή του  $C(s)$ , δηλαδή του ελεγκτή. Οι δύο πρώτοι όροι είναι συμβατοί, αλλά οι δύο τελευταίοι αθροίζονται στην μονάδα, επομένως δεν μπορεί να ικανοποιηθούν ταυτόχρονα. Αυτό σημαίνει ότι υπερβολική ικανοποίηση των δύο πρώτων όρων (μηδενικό σφάλμα, απόρριψη διαταραχών) μπορεί να οδηγήσει σε μη ικανοποιητική λειτουργία λόγω αυξημένης ευαισθησίας σε θόρυβο μετρήσεων. Ο λόγος αυτός έχει οδηγήσει σε αναθεώρηση της βασικής κατεύθυνσης σχεδίασης συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, της τελευταίας τριακονταετίας, αλλά το θέμα αυτό δεν μπορεί να αναπτυχθεί εδώ.

Τώρα, κοιτάζοντας το ανοικτό σύστημα του Σχ. 2.4, βλέπουμε ότι η συνάρτηση μεταφοράς του είναι,

$$Y(s) = C(s)G(s)R(s) + D(s)$$

Όπως ήταν αναμενόμενο, η διαταραχή δεν μπορεί να εξουδετερωθεί ότι και αν είναι η  $C(s)$ . Επομένως, η υπεροχή του κλειστού συστήματος εδώ είναι προφανής. Στην συνέχεια θα δούμε και κάποιες άλλες περιοχές υπεροχής.

### 4.2.1 Ευαισθησία στην μεταβολή παραμέτρων

Όπως έχουμε επανειλημμένα τονίσει, η λειτουργία ενός υλοποιημένου συστήματος αυτομάτου ελέγχου εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από την ακρίβεια του μοντέλου της υπό έλεγχο διαδικασίας. Αυτό γιατί συνήθως η σχεδίαση του ελεγκτή γίνεται σε περιβάλλον προσομοίωσης του συνολικού συστήματος ελεγκτή/διαδικασίας. Είναι λοιπόν προφανές ότι αν υπάρχει αναντιστοιχία μοντέλου/πραγματικότητας το συνολικό σύστημα δεν θα συμπεριφέρεται όπως αναμενόταν. Μία από τις πιθανές πηγές αναντιστοιχίας είναι και η χρήση εσφαλμένων τιμών για τις παραμέτρους του μοντέλου της διαδικασίας. Το σφάλμα αυτό μπορεί να προκύψει είτε από εσφαλμένη εκτίμηση είτε από αλλαγή της τιμής της παραμέτρου λόγω βλάβης ή φυσιολογικού αιτίου. Επειδή κάτι τέτοιο είναι αναπόφευκτο, είναι απαραίτητο το σύστημα να σχεδιασθεί με τέτοιο τρόπο, έτσι ώστε να έχει μικρή *ευαισθησία* σε τέτοιες αλλαγές, δηλαδή η εκτροπή από την αναμενόμενη συμπεριφορά να είναι εντός αποδεκτών ορίων.

Για την μέτρηση της ευαισθησίας ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου χρησιμοποιείται η *συνάρτηση ευαισθησίας*  $S$ ,

$$S_p^H = \frac{\partial H/H}{\partial p/p} = \frac{p}{H} \frac{\partial H}{\partial p}$$

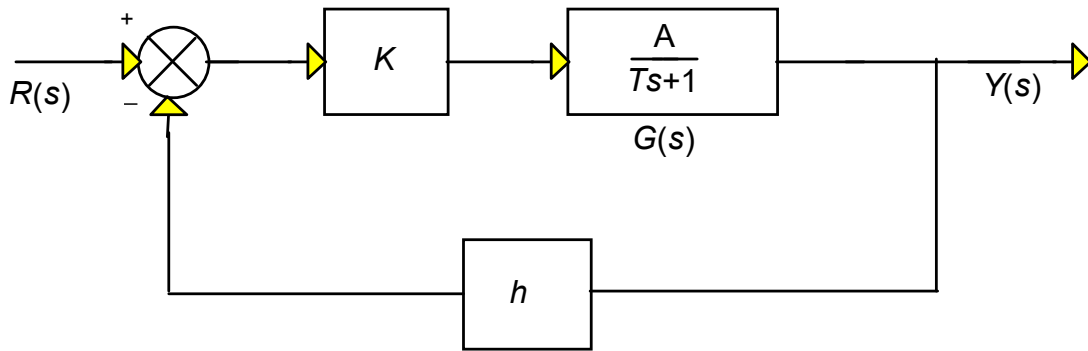
όπου  $H$  είναι συνάρτηση μεταφοράς και  $p$  η παράμετρος που ενδιαφέρει. Στην ουσία η συνάρτηση αυτή δίνει το ποσοστό μεταβολής της συνάρτησης μεταφοράς για αντίστοιχο ποσοστό μεταβολής της παραμέτρου. Επομένως, είναι επιθυμητό,

$$S_p^H \ll 1$$

Πρέπει πάντως να τονισθεί ότι δεν είναι πάντα εύκολο να εξετάζουμε το θέμα της ευαισθησίας αναλυτικά.

Παράδειγμα 4.1 Έστω το σύστημα του Σχ. 4.1. Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι,

$$H(s) = \frac{KA}{\tau s + 1 + KA h}$$



Σχήμα 4.1 Δομικό διάγραμμα παραδείγματος 4.1

Οι ευαισθησίες  $S_A^H, S_h^H, S_\tau^H$  βρίσκονται ως εξής:

$$S_A^H = \frac{A}{H} \frac{\partial H}{\partial A} = \frac{A}{H} \frac{K(\tau s + 1)}{(\tau s + 1 + KA h)^2} = \frac{\tau s + 1}{\tau s + 1 + KA h}$$

$$S_h^H = \frac{h}{H} \frac{\partial H}{\partial h} = \frac{h}{H} \frac{-(KA)^2}{(\tau s + 1 + KA h)^2} = \frac{-KA h}{\tau s + 1 + KA h}$$

$$S_\tau^H = \frac{\tau}{H} \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\tau}{H} \frac{-KAs}{(\tau s + 1 + KA h)^2} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1 + KA h}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις είναι φανερό ότι καθώς αυξάνεται η συνολική ενίσχυση του συστήματος, που είναι ίση με  $KA h$ , οι μεν  $S_A^H, S_\tau^H$  μειώνονται ενώ η  $S_h^H$  πλησιάζει την μονάδα. Το παράδειγμα αυτό καταδεικνύει την ευαισθησία του συνολικού συστήματος στην ακρίβεια του βρόχου ανατροφοδότησης.

Για να συγκρίνουμε την απόδοση του κλειστού με το αντίστοιχο ανοικτό σύστημα, ας υπολογίσουμε την,

$$S_\tau^H = \frac{\tau}{H} \frac{\partial H}{\partial \tau} = \frac{\tau}{H} \frac{-KAs}{(\tau s + 1)^2} = \frac{-\tau s}{\tau s + 1}$$

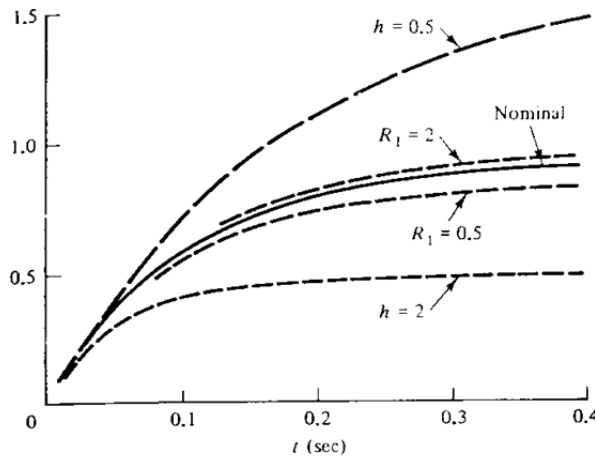
Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι δεν μπορούμε να μειώσουμε την ευαισθησία καθώς η ενίσχυση  $K$  δεν υπεισέρχεται στον τύπο.

**Παράδειγμα 4.2** Έστω, ότι η υπό έλεγχο διαδικασία είναι μία δεξαμενή, όπου όπως είδαμε,  $A=R_t$  και  $\tau=A_t R_t$ , και  $A_t, R_t$  είναι η επιφάνεια και αντίσταση ροής εξόδου. Η  $R_t$  μπορεί να μεταβληθεί λόγω εναπόθεσης αλάτων, ενώ η ενίσχυση  $h$  του αισθητήρα μπορεί να αλλάξει λόγω βλάβης. Στο παράδειγμα αυτό τα  $A$  και  $\tau$  είναι συσχετισμένα. Ας υποθέσουμε  $K=9, A_t=1, R_t=1, h=1$  σε κανονική λειτουργία. Η χρονική απόκριση είναι,



$$y(t) = \frac{9}{9h + 1/R_t} \left\{ 1 - \exp \left[ - \left( 9h + \frac{1}{R_t} \right) t \right] \right\}$$

Η χρονική απόκριση φαίνεται στο Σχ. 4.2 για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $R_t$  και  $h$  (συγκεκριμένα για διπλάσιες και μισές του κανονικού). Όπως προβλέπει η θεωρία, η ευαισθησία στο  $h$  είναι μεγαλύτερη από ότι στο  $R_t$ . Επίσης η απόκλιση εξαιτίας του υποδιπλασιασμού είναι μεγαλύτερη από αυτήν του διπλασιασμού λόγω της μικρότερης συνολικής ενίσχυσης ( $KR_t h$ ).



Σχ. 4.2 Χρονικές αποκρίσεις παραδείγματος 4.2

### 4.3 Είδη ελεγκτών

Υπάρχουν πολλά είδη ελεγκτών και αρκετοί τρόποι ενσωμάτωσης τους σ'ένα σύστημα αυτομάτου ελέγχου. Όσον αφορά την τοποθέτησή τους στο σύστημα μπορούν να τοποθετηθούν ή εν σειρά με την διαδικασία ή στον βρόχο ανάδρασης. Εν όψει της αυξημένης ευαισθησίας του συστήματος σε σφάλματα του βρόχου ανάδρασης, η δεύτερη περίπτωση συνήθως αποφεύγεται. Σίγουρα ακούγεται περίεργο, αλλά είναι γεγονός ότι ο πλέον χρησιμοποιημένος τύπος βιομηχανικού ελεγκτή, σε ποσοστό που φτάνει το 90%, είναι ο ελεγκτής *PID* (αναλογικο-ολοκληρωτικο-διαφορικός). Στην συνέχεια θα εξετάσουμε τα προτερήματα και μειονεκτήματα του ελεγκτή *PID*, όπως επίσης και κάποιων άλλων λιγότερο δημοφιλών ελεγκτών.

#### 4.3.1 Ελεγκτής *PID* (αναλογικο-ολοκληρωτικο-διαφορικός)

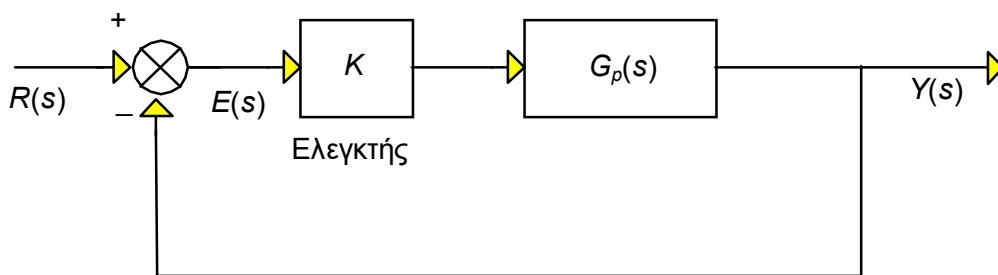
Ο ελεγκτής *PID* έχει την συνάρτηση μεταφοράς,

$$G_c(s) = K_P + \frac{K_I}{s} + K_D s = \frac{K_D s^2 + K_P s + K_I}{s}$$

Όπως φαίνεται, ο ελεγκτής έχει τρεις παραμέτρους και έτσι είναι σε θέση να πετύχει αρκετά καλή συμπεριφορά. Από την άλλη μεριά, το γεγονός αυτό καθιστά δύσκολη την εύρεση των κατάλληλων τιμών όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Για τον σκοπό αυτό θα εξετάσουμε δύο μεθόδους: την μέθοδο *Ziegler–Nichols* και μία αναλυτική μέθοδο. Για την καλύτερη κατανόηση της λειτουργίας του ελεγκτή θα εξετάσουμε τον κάθε όρο χωριστά, αν και στην πράξη εμφανίζονται και οι τρεις μαζί.

#### 4.3.1.1 Επίδραση αναλογικού όρου

Ο αναλογικός ελεγκτής είναι η πιο απλή μορφή ελεγκτή. Το δομικό διάγραμμα ενός συστήματος με αναλογικό έλεγχο φαίνεται στο Σχ. 4.3.



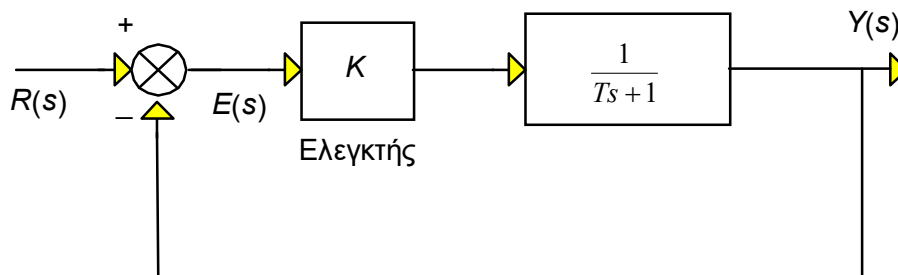
Σχήμα 4.3 Αναλογικός έλεγχος

Έχουμε ήδη δει ότι η χρήση αναλογικού ελέγχου σε συστήματα με ανατροφοδότηση έχει ευεργετικά αποτελέσματα, όπως βελτίωση σφάλματος σταθεράς κατάστασης και βελτίωση ταχύτητας απόκρισης. Όμως ο αναλογικός έλεγχος δεν έχει μόνο καλά, καθώς μεγάλες τιμές ενίσχυσης μειώνουν την σχετική ευστάθεια. Σε συστήματα μεγαλύτερης τάξης από 2, μεγάλες τιμές του  $K$  μπορεί να οδηγήσουν σε αποσταθεροποίηση. Πάντως η μέγιστη τιμή του  $K$ , περιορίζεται εκτός αυτών, και από φυσικούς λόγους, καθώς τα φυσικά συστήματα έχουν περιορισμένη ικανότητα ενίσχυσης.

Στη συνέχεια ας δούμε δύο παραδείγματα για καλύτερη κατανόηση των προηγουμένων.

#### Παράδειγμα 4.3 Αναλογικός έλεγχος συστήματος πρώτης τάξης.

Έστω το σύστημα του Σχ. 4.4,



Σχήμα 4.4 Αναλογικός έλεγχος συστήματος πρώτης τάξης

Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι,

$$\frac{Y}{R} = \frac{KG}{1+KG} = \frac{K}{Ts+1+K} = \frac{K}{1+K} \frac{1}{\left(\frac{T}{1+K}\right)s+1} \quad (4.1)$$

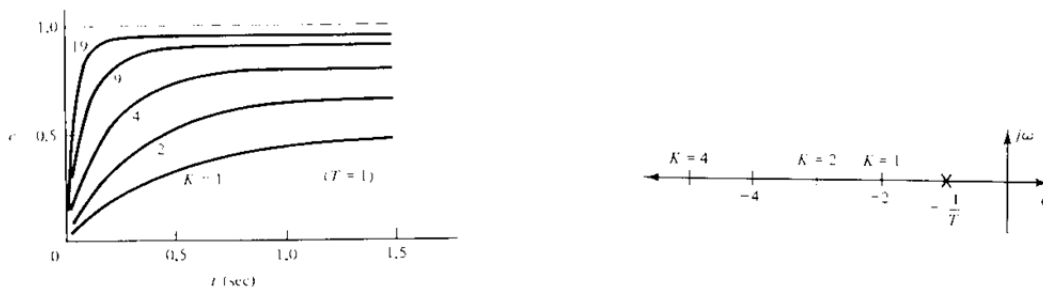
Ο τρόπος έκφρασης μας επιτρέπει την εύκολη εξαγωγή των εξής συμπερασμάτων:

- Το συνολικό σύστημα είναι επίσης πρώτης τάξης.
- Η χρονική του σταθερά  $T' = (T/(1+K))$  μειώνεται καθώς αυξάνεται το  $K$ , αυξάνοντας την ταχύτητα απόκρισης.
- Το σφάλμα σταθερής κατάστασης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας,  $1/(1+K)$ , επίσης μειώνεται αυξανόμενου του  $K$ .

Η χρονική απόκριση του συστήματος, βρίσκεται αντιστρέφοντας την (4.1),

$$y(t) = \frac{K}{1+K} \left( 1 - e^{-\left(\frac{1+K}{T}\right)t} \right)$$

και φαίνεται στο Σχ. 4.5 για διάφορες τιμές του  $K$ , μαζί με τον αντίστοιχο γ.τ.ρ.

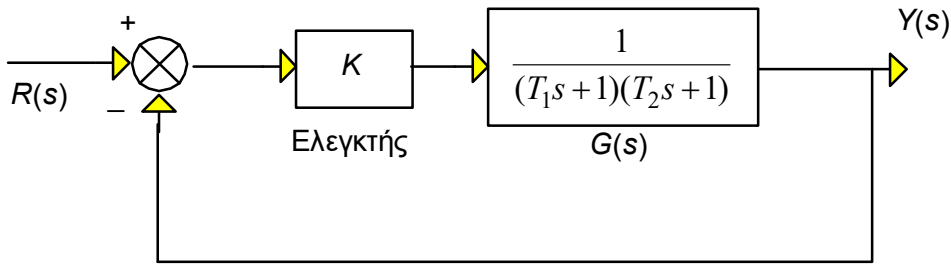


Σχήμα 4.5 Χρονική απόκριση Παρ. 4.3 και γ.τ.ρ. του

**Παράδειγμα 4.4** Αναλογικός έλεγχος συστήματος δευτέρας τάξης.

Έστω το σύστημα του Σχ. 4.6, με συνάρτηση μεταφοράς,

$$\frac{Y}{R} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)} = \frac{K}{1 + \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1)}} = \frac{K}{(T_1s+1)(T_2s+1) + K}$$

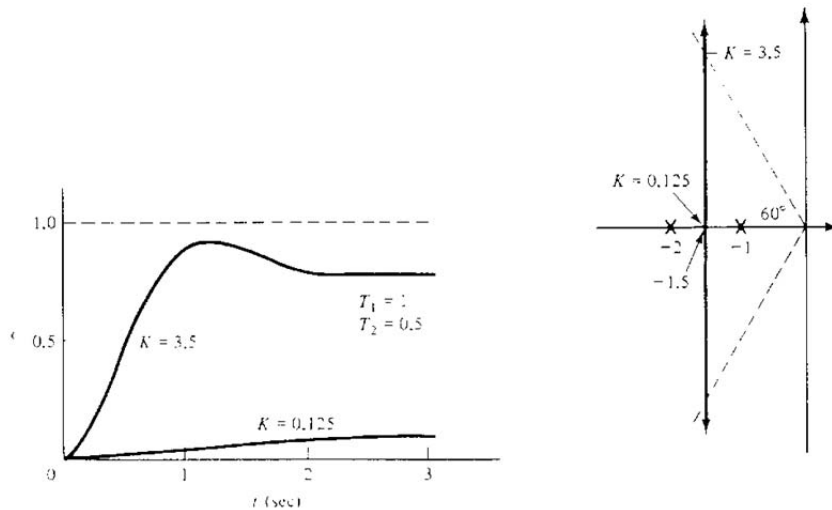


Σχήμα 4.6 Σύστημα δευτέρας τάξης με αναλογικό έλεγχο

Ας θέσουμε  $T_1=1, T_2=0,5$ . Όσον αφορά το σφάλμα σταθεράς κατάστασης σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας, είναι πάλι πεπερασμένο και ίσο με  $1/(1+K)$ . Επομένως μειώνεται καθώς αυξάνεται το  $K$ . Οι πόλοι του συστήματος μεταβάλλονται σύμφωνα με

$$s_{1,2} = -1,5 \pm \sqrt{0,25 - 2K}$$

Ο γ.τ.ρ. και χρονικές αποκρίσεις φαίνονται στο Σχ. 4.7. Φαίνεται ευκρινώς ότι αύξηση του  $K$  βελτιώνει την ταχύτητα απόκρισης, αλλά αυξάνει την υπερύψωση. Το σύστημα δεν αποσταθεροποιείται για καμία τιμή του  $K$ , αλλά η μέγιστη τιμή περιορίζεται από φυσικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα η ακαριαία θέρμανση κάποιου χώρου απαιτεί την κατανάλωση άπειρης ενέργειας.



Σχήμα 4.7 Χρονική απόκριση Παραδείγματος 4.4 και γ.τ.ρ. του

### 4.3.1.2 Επίδραση διαφορικού όρου

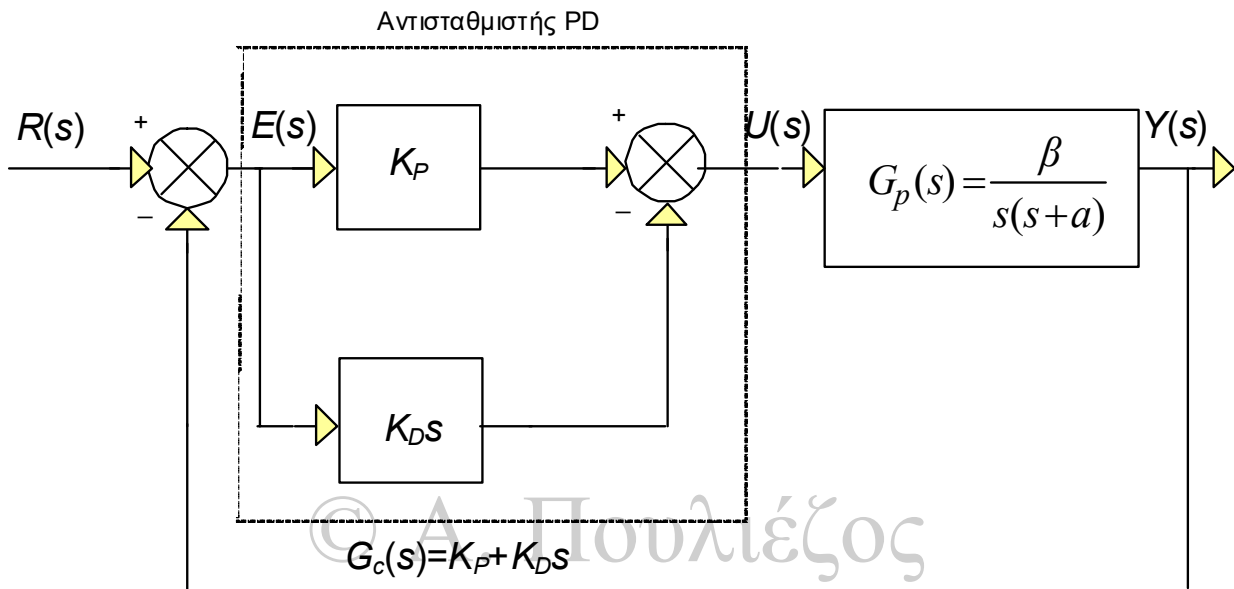
Η συνάρτηση μεταφοράς του διαφορικού όρου είναι,

$$G_c(s) = sK_D$$

Θα εξετάσουμε την επίδραση ενός τέτοιου ελεγκτή σε συνδυασμό με αναλογικό όρο.

Εάν, για απλούστευση, ο ελεγκτής πρέπει να ελέγξει μία διαδικασία δευτέρας τάξης, όπως δείχνει το δομικό διάγραμμα του Σχ. 4.8, η ολική συνάρτηση μεταφοράς είναι,

$$H_{CL}(s) = \frac{\beta(K_P + K_D s)}{1 + \frac{\beta(K_P + K_D s)}{s(s+a)}} = \frac{\beta(K_P + K_D s)}{s^2 + s(a + \beta K_D) + \beta K_P} \quad (4.2)$$



Σχήμα 4.8 Κλειστό σύστημα με ελεγκτή PD

Συγκρίνοντας την  $H_{CL}(s)$  με αυτήν του ανοικτού συστήματος,

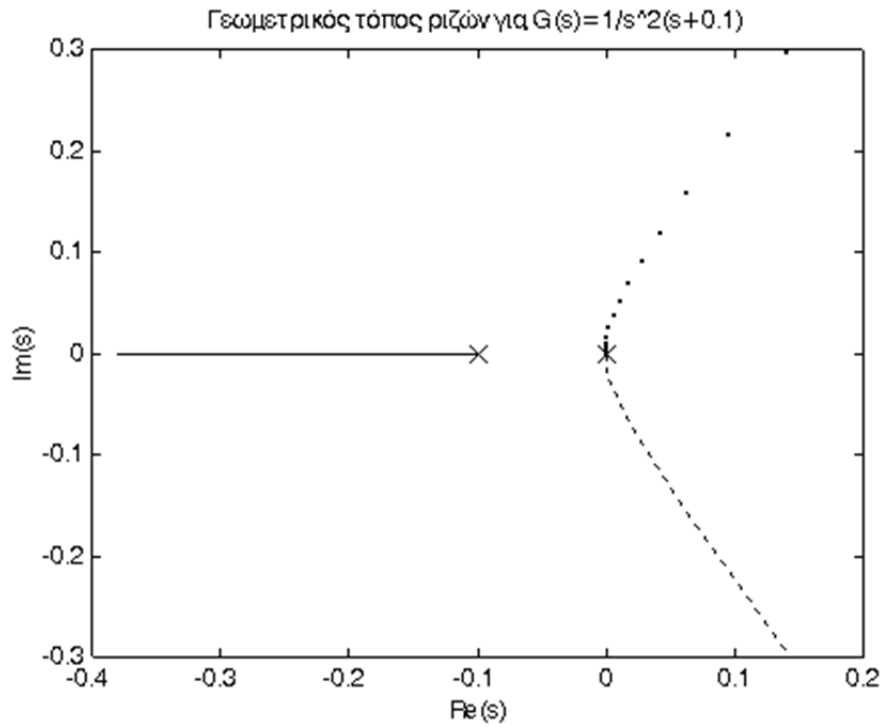
$$H_{OL}(s) = \frac{\beta}{s(s+a)}$$

παρατηρούμε ότι η πρόσθεση του διαφορικού όρου προσθέτει ένα μηδενικό στην συνάρτηση μεταφοράς στην θέση  $-K_P/K_D$  και επίσης μετατοπίζει την θέση των πόλων. Η περίπτωση αυτή εξετάστηκε στην ενότητα 3.4.1. Τα συμπεράσματα που εξήγησαν μας επιτρέπουν την διατύπωση ενός κανόνα:

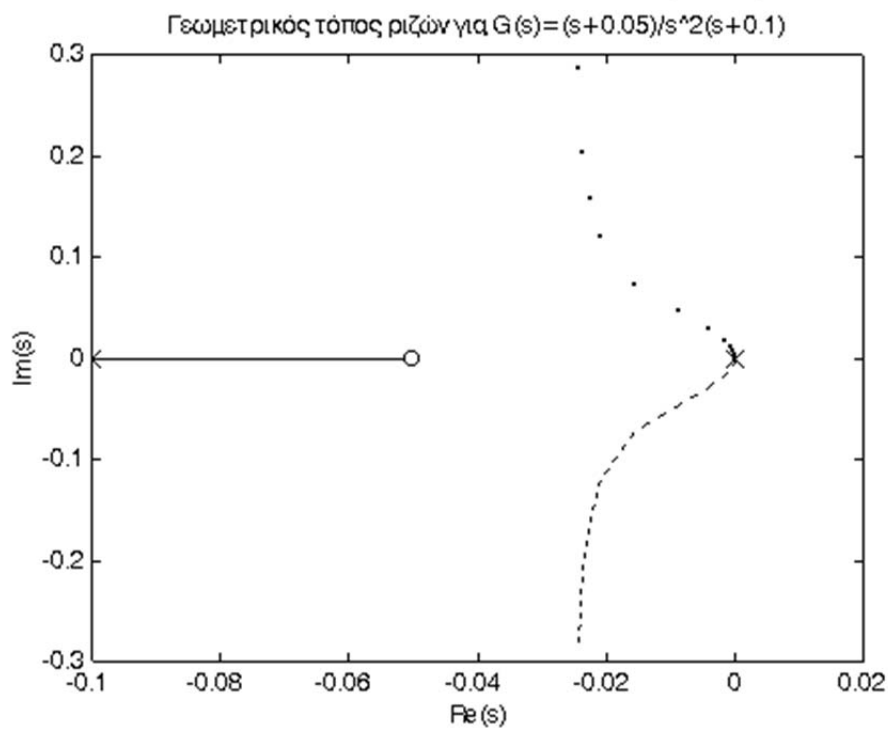
- Ο διαφορικός έλεγχος χρησιμοποιείται για την βελτίωση της σχετικής ευστάθειας.

Ο τρόπος που αυτό επιτυγχάνεται μπορεί να κατανοηθεί από την φυσική σημασία του διαφορικού ελέγχου που είναι η εισαγωγή προβλεπτικής ικανότητας μέσω της τροφοδότησης της παραγώγου του σφάλματος. Πέρα από αυτό, ο γ.τ.ρ. μας δίνει επίσης μία σαφή εικόνα των επιφερομένων αλλαγών. Στα Σχ. 4.9, 4.10 φαίνονται οι γ.τ.ρ. ενός συστήματος τύπου 2 που ενώ είναι ασταθές για όλες τις τιμές της ενίσχυσης  $K$ , σταθεροποιείται με την εισαγωγή του διαφορικού όρου, και μάλιστα είναι

ευσταθές για κάθε  $K$ , αν το μηδενικό είναι μεταξύ του μηδέν και του πόλου.



Σχήμα 4.9 Γ.Τ.Ρ. για σύστημα με  $G(s) = \frac{K}{s^2(s + 1/T_1)}$  ( $T_1 = 10$ )



Σχήμα 4.10 Γ.Τ.Ρ. για σύστημα με  $G(s) = \frac{K(s + 1/T_2)}{s^2(s + 1/T_1)}$  ( $T_1 = 10, T_2 = 20$ )

Ας δούμε ένα πρακτικό παράδειγμα, που θα βοηθήσει στην κατανόηση της λειτουργίας του αναλογικο-διαφορικού (PD) ελέγχου.

**Παράδειγμα 4.5** Έστω ένα σύστημα ελέγχου της γωνιακής θέσης της μαργαρίτας ενός εκτυπωτή μαργαρίτας. Η μαργαρίτα κινείται από έναν κινητήρα DC, που έχει περιγραφεί στο Παράδειγμα 2.2. Η συνάρτηση μεταφοράς του είναι,

$$G_p(s) = \frac{K_s K K_i}{R_a J s^2 + (K_b K_i + R_a B) s + K_s K K_i}$$

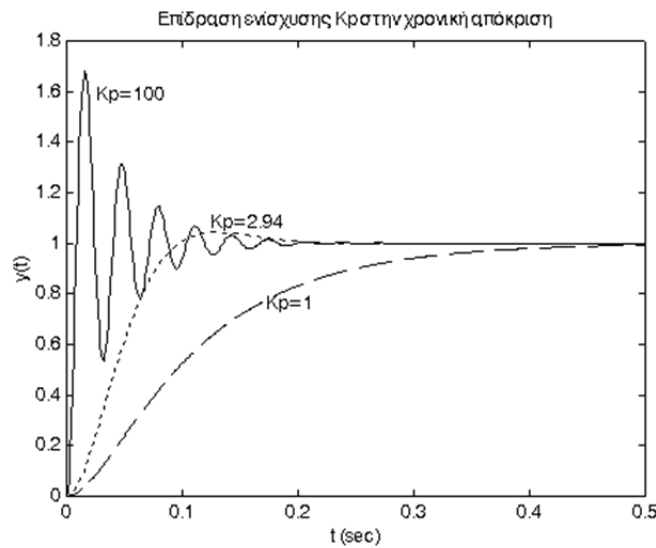
όπου οι διάφορες μεταβλητές είναι:

$K_s$ :	Ενίσχυση κωδικοποιητή	1 V/rad
$K$ :	Ενίσχυση ενισχυτή	μεταβαλλόμενη
$R_a$ :	Αντίσταση οπλισμού κινητήρα	5 Ω
$K_i$ :	Σταθερά ροπής στρέψεως κινητήρα	3 Kgm/A
$K_b$ :	Αντηλεκτρεγερτική σταθερά κινητήρα	0,02125 V/rad/sec
$J_m$ :	Αδράνεια ρότορα κινητήρα	$3 \times 10^{-4}$ Kgm sec <sup>2</sup>
$J_L$ :	Αδράνεια μαργαρίτας	$12 \times 10^{-4}$ Kgm sec <sup>2</sup>
$B_m$ :	Συντελεστής ιξώδους άξονα κινητήρα	0,03 Kgm sec
$B_L$ :	Συντελεστής ιξώδους άξονα φορτίου	0,03 Kgm sec

Αντικαθιστώντας τις διάφορες τιμές, και χρησιμοποιώντας ελεγκτή PD, η (4.2) γίνεται,

$$H(s) = \frac{400(K_p + K_d s)}{s^2 + s(48.5 + 400K_d) + 400K_p}$$

Για λόγους σύγκρισης στο Σχ. 4.11 φαίνονται οι χρονικές αποκρίσεις σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας, όταν  $K_p=1$ , 2.94 και 100 και  $K_d=0$ . Οι αντιστοιχίσεις πρέπει να είναι προφανείς. Επιλέγουμε να βελτιώσουμε την απόκριση όταν  $K_p=100$ , περίπτωση που παρουσιάζει καλό χρόνο ανύψωσης ( $t_r=0.006$ ) αλλά μεγάλη υπερύψωση (68%).



Σχήμα 4.11 Απόκριση σε μοναδιαία βαθμίδα χωρίς διαφορικό έλεγχο.

Για να επιλέξουμε τιμή για το  $K_d$  χρησιμοποιούμε την χαρακτηριστική εξίσωση του κλειστού συστήματος από την οποία εξαρτάται η χρονική απόκριση:

$$s^2 + s(48,5 + 400K_d) + 400K_p = 0$$

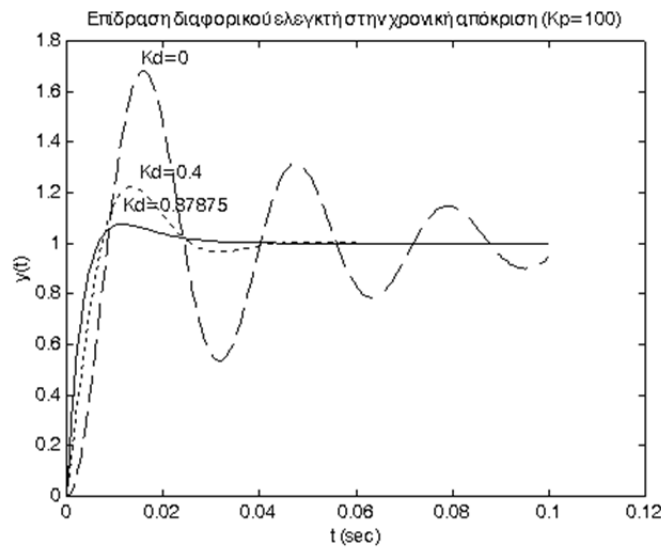
Από την τυπική μορφή,

$$\omega_n = \sqrt{400K_p} \quad (4.3)$$

$$2\zeta\omega_n = 48,5 + 400K_d \Rightarrow K_d = \frac{2\zeta\sqrt{400K_p} - 48,5}{400}$$

Έτσι, π.χ. για κρίσιμη απόσβεση,  $\zeta=1$ , και η (4.3) δίνει  $K_d=0,8788$ . Η αντίστοιχη χρονική απόκριση φαίνεται στο Σχ. 4.12 μαζί με την καμπύλη για  $K_d=0,4$  και  $K_d=0$ .





Σχήμα 4.12 Απόκριση σε μοναδιαία βαθμίδα με διαφορικό έλεγχο.

Όπως φαίνεται αύξηση του  $K_d$  έχει σαν αποτέλεσμα την βελτίωση της σχετικής ευστάθειας καθώς η υπερύψωση μειώνεται όπως επίσης και ο χρόνος ανύψωσης.

#### 4.3.1.3 Επίδραση ολοκληρωτικού όρου

Η συνάρτηση μεταφοράς του ολοκληρωτικού όρου είναι  $K_I/s$ . Η βασική συνεισφορά του είναι ότι με τον πόλο του στο μηδέν αυξάνει τον τύπο του συστήματος, βελτιώνοντας το σφάλμα σταθερής κατάστασης.

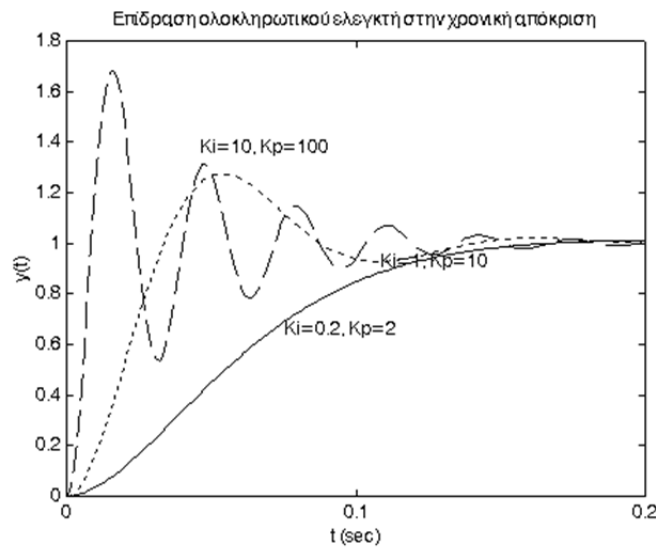
Η συνάρτηση μεταφοράς του ανοικτού βρόχου γίνεται,

$$G_c(s)G(s) = \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) G(s) = \frac{1}{s} (K_p s + K_I) G(s) \quad (4.4)$$

Ας δούμε το προηγούμενο παράδειγμα με  $K_p=100$ ,  $K_I=10$ . Η συνάρτηση μεταφοράς του κλειστού βρόχου γίνεται,

$$H(s) = \frac{40000(s + 0,1)}{s^3 + 48,5s^2 + 40000s + 4000}$$

με μηδενικό στο  $s=-0,1$  και πόλους  $(-24,2+198,5i)$ ,  $(-24,2-198,5i)$ . Στο Σχ. 4.13 φαίνονται διάφορες καμπύλες χρονικών αποκρίσεων για διάφορα ζευγάρια τιμών  $K_p$ ,  $K_I$ .



Σχήμα 4.13 Απόκριση σε μοναδιαία βαθμίδα με ολοκληρωτικό έλεγχο.

Όπως βλέπουμε, καταφέρνουμε να μειώσουμε την μέγιστη υπερύψωση, τοποθετώντας τον πραγματικό πόλο του συστήματος κοντά στο μηδενικό του. Όμως η αύξηση της τάξης του συστήματος κατά 1 δημιουργεί προβλήματα στην ευστάθεια. Τα προβλήματα αυτά μπορεί να αναλυθούν αν εξετάσουμε την συνάρτηση μεταφοράς κλειστού βρόχου  $H(s)$ . Από την (4.4) προκύπτει,

$$H(s) = \frac{400(K_p s + K_I)}{s^2(s + 48.5) + 400(K_p s + K_I)}$$

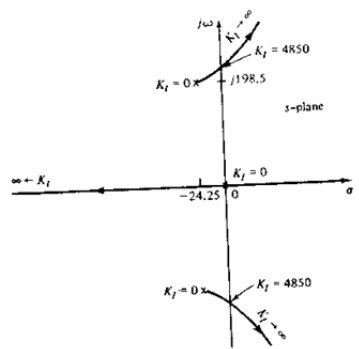
Επομένως το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι,

$$a(s) = s^3 + 48.5s^2 + 400K_p s + 400K_I \quad (4.5)$$

Με την χρήση κάποιας κατάλληλης μεθόδου, π.χ. του κριτηρίου Routh, βρίσκουμε ότι το αντισταθμισμένο σύστημα είναι ευσταθές για  $0 \leq K_I < 48.5K_p$ , ενώ το ανοικτό σύστημα χωρίς ολοκληρωτικό ελεγκτή είναι ευσταθές για όλα τα  $K_p$ . Στο Σχ. 4.14 φαίνεται ο γ.τ.ρ. των ριζών της (4.5) για  $K_p=100$  και μεταβαλλόμενο  $K_I$ .

Οι βασικοί κανόνες που διέπουν την χρήση του ολοκληρωτικού ελεγκτή είναι οι εξής:

- Βελτιώνει τον τύπο του συστήματος (καλύτερη συμπεριφορά στο σφάλμα σταθερής κατάστασης).
- Βελτιώνει την μέγιστη υπερύψωση.
- Επιδεινώνει την σχετική ευστάθεια.



Σχήμα 4.14 Γ.Τ.Ρ. της Εξ. (5.4)

#### 4.3.1.4 Ρύθμιση Ziegler-Nichols

Η ρύθμιση Ziegler–Nichols βασίζεται σε μία απλή ανάλυση ευστάθειας. Τα βήματα είναι:

Θέτουμε  $K_d=K_I=0$  αυξάνουμε το  $K_p$  μέχρι το σύστημα να ταλαντωθεί (δηλαδή οι πόλοι του κλειστού συστήματος να είναι επί του φανταστικού άξονα). Στην συνέχεια θέτουμε,

$$K_p = 0,6K_m \quad K_d = \frac{K_p \pi}{4\omega_m} \quad K_I = \frac{K_p \omega_m}{\pi}$$

© Α. Πουλιέζος

όπου  $K_m$  είναι η οριακή ενίσχυση (ταλάντωσης) και  $\omega_m$  η συχνότητα ταλάντωσης. Η εύρεση των παραμέτρων αυτών είναι εύκολη με την χρήση του πακέτου MATLAB (Control Systems Toolbox).

Η μέθοδος αυτή, όπως είναι φανερό δεν αποσκοπεί στην ικανοποίηση κάποιων δεδομένων προδιαγραφών, αλλά δίνει έναν γενικό κανόνα που η πείρα έχει δείξει ότι αποδίδει "καλά".

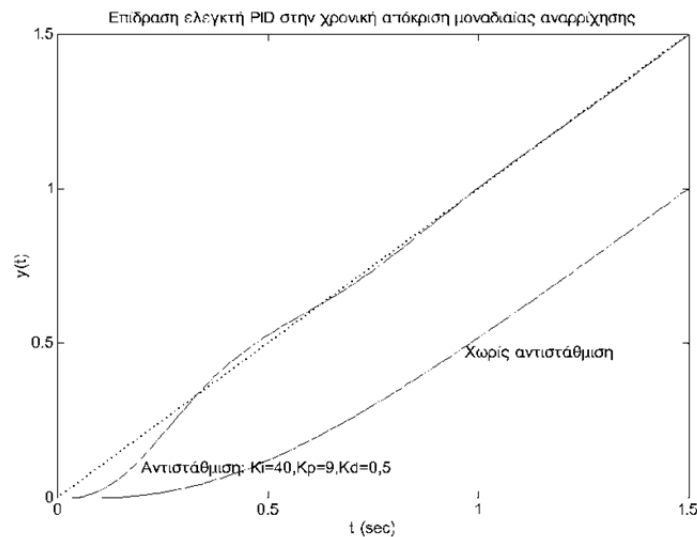
**Παράδειγμα 4.6** Έστω μία υπό έλεγχο διαδικασία με συνάρτηση μεταφοράς,

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

Οι ρίζες της χαρακτηριστικής εξίσωσης είναι  $\{-4,2 \pm 0,93i$  και  $21,59\}$ . Η απόκριση του συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας δεν έχει υπερύψωση και το σφάλμα σταθερής κατάστασης σε είσοδο μοναδιαίας αναρρίχησης είναι 0,5. Με την χρήση των εντολών του MATLAB, *rlocus* και *rlocfind* βρίσκονται οι τιμές της οριακής ενίσχυσης  $K_m=14$  και ταλάντωσης  $\omega_m=14$ rad/sec. Χρησιμοποιώντας τις εξισώσεις Ziegler–Nichols βρίσκουμε,

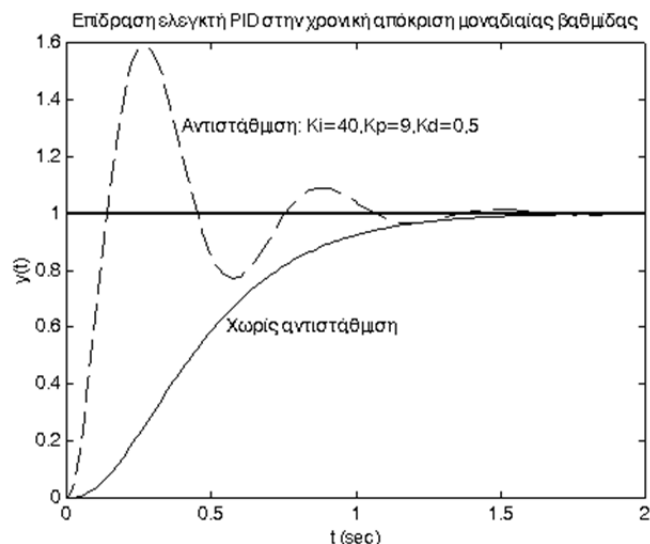
$$K_p = 8,4 \quad K_D = 0,5 \quad K_I = 40$$

Στο Σχ. 4.15 φαίνονται οι χρονικές αποκρίσεις σε είσοδο μοναδιαίας αναρρίχησης του συστήματος χωρίς και με αντιστάθμιση. Σε σύγκριση με το μη αντισταθμισμένο σύστημα, το σφάλμα σταθερής κατάστασης έχει μηδενισθεί (από 0,5) αλλά έχει εισαχθεί υπερύψωση.



Σχήμα 4.15 Απόκριση μοναδιαίας αναρρίχησης με έλεγχο PID.

Στο Σχ. 4.16 φαίνονται οι αντίστοιχες χρονικές αποκρίσεις σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας. Η μέγιστη υπερύψωση στο αντισταθμισμένο σύστημα είναι περίπου 60% ενώ ο χρόνος αποκατάστασης 1,2 sec. ενώ ο χρόνος ανύψωσης περίπου 0,12 sec. Συγκρίνοντάς το με το μη αντισταθμισμένο ο χρόνος ανύψωσης έχει βελτιωθεί ενώ πάλι έχει εισαχθεί υπερύψωση.



Σχήμα 4.16 Απόκριση μοναδιαίας βαθμίδας με έλεγχο PID.

#### 4.3.1.5 Ρύθμιση με βάση αναλυτικές σχέσεις

Όπως προαναφέρθηκε, η ρύθμιση Ziegler–Nichols δεν μας επιτρέπει να σχεδιάσουμε

έναν ελεγκτή που να ικανοποιεί δεδομένες προδιαγραφές λειτουργίας. Παρόλο που το θέμα μπορεί να φαίνεται απλό, δεν είναι πάντα εφικτό να βρεθούν αναλυτικές σχέσεις που να επιτρέπουν τον υπολογισμό των τιμών των παραμέτρων  $K_P$ ,  $K_D$  και  $K_I$ . Στην μέθοδο που ακολουθεί υποτίθεται ότι το υπό έλεγχο σύστημα μπορεί να προσεγγισθεί επαρκώς από ένα σύστημα δευτέρας τάξης στην τυπική μορφή (4.5). Σε αντίθετη περίπτωση, η μέθοδος πρέπει να θεωρηθεί ότι παρέχει μία πρώτη λύση η οποία πιθανόν θα χρειάζεται βελτίωση μέσω επανειλημμένων αναδρομών.

Θεωρούμε λοιπόν την πρόσω συνάρτηση μεταφοράς ελεγκτή-διαδικασίας,

$$\begin{aligned} G_c(s)G_p(s) &= \left( K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} \right) G_p(s) = \\ &= \left( \frac{K_P s + K_D s^2 + K_I}{s} \right) G_p(s) \end{aligned}$$

Η σταθερά  $K_I$  βρίσκεται πρώτα από τις προδιαγραφές σφάλματος σταθεράς κατάστασης, αφού αν η  $G_p(s)$  είναι τύπου  $n$ , η  $G_c(s)G_p(s)$  είναι  $n+1$  και η σταθερά σφάλματος σταθεράς κατάστασης δίνεται από την σχέση,

$$K_{n+1} = s^n K_I G(s) \Big|_{s=0} = \frac{1}{e_{ss}}$$

Έχοντας υπολογίσει το  $K_I$  από την προηγούμενη εξίσωση, μπορούμε να προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε τα  $K_D$ ,  $K_P$  από τις υπόλοιπες προδιαγραφές π.χ. μέγιστης υπερύψωσης και χρόνου αποκατάστασης. Οι προδιαγραφές αυτές αντιστοιχούν σε προδιαγραφές για τα  $\zeta$ ,  $\omega_n$  που με την σειρά τους ορίζουν μία περιοχή στο επίπεδο  $s$  όπου οι προδιαγραφές αυτές ικανοποιούνται. Συνήθως θα υπάρχουν περισσότερα από ένα σημεία, που να ικανοποιούν τις δοσμένες προδιαγραφές. Έστω ένα τέτοιο σημείο  $s_1$ , από το οποίο επιθυμούμε να περάσει ο γ.τ.ρ. του κλειστού συστήματος. Τότε, από την βασική σχέση του γ.τ.ρ., δηλαδή ότι το μέτρο της  $G_c(s)G_p(s)$  είναι 1 και η γωνία  $-180^\circ$ , προκύπτει,

$$\left( \frac{K_P s_1 + K_D s_1^2 + K_I}{s_1} \right) G_p(s_1) = 1 \cdot e^{j\pi}$$

ή γράφοντας τους μιγαδικούς αριθμούς  $s_1$ ,  $G_p(s_1)$ , σε μορφή εκθετική,

$$M_{s_1} e^{j\theta_{s_1}} K_P + M_{s_1}^2 e^{j2\theta_{s_1}} K_D + K_I = \frac{1 \cdot e^{j\pi} \cdot M_{s_1} e^{j\theta_{s_1}}}{M_G e^{j\theta_G}}$$

όπου  $M$  είναι τα μέτρα και  $\theta$  οι γωνίες. Αναπτύσσοντας σε τριγωνομετρική μορφή και εξισώνοντας πραγματικά και φανταστικά μέρη παίρνουμε:

$$\begin{bmatrix} M_{s_1} \cos\theta_{s_1} & M_{s_1}^2 \cos 2\theta_{s_1} \\ M_{s_1} \eta\mu\theta_{s_1} & M_{s_1}^2 \eta\mu 2\theta_{s_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_P \\ K_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{M_{s_1}}{M_G} \cos(\theta_G - \theta_{s_1}) - K_I \\ \frac{M_{s_1}}{M_G} \eta\mu(\theta_G - \theta_{s_1}) \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Λύνοντας το σύστημα παίρνουμε τα επιθυμητά  $K_D, K_P$ . Όμως οι συγκεκριμένες τιμές μπορεί να είναι αρνητικές, πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορεί να υλοποιηθεί ο συγκεκριμένος ελεγκτής. Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβάνουμε την διαδικασία για διαφορετικό σημείο  $s_1$  που να ικανοποιεί τις προδιαγραφές. Αν αυτό δεν είναι δυνατό πρέπει να δοκιμασθεί διαφορετικός τύπος ελεγκτή. Είναι φανερό, ότι η διαδικασία αυτή δεν εξασφαλίζει την εύρεση ενός ικανοποιητικού συνόλου τιμών για τις παραμέτρους σχεδίασης, αφού δεν είναι δυνατό να δοκιμασθεί όλο το φάσμα των εφικτών τιμών  $s_1$ . Έτσι η μεθοδολογία αυτή μπορεί να χρησιμεύσει τουλάχιστο συμπληρωματικά με την εμπειρία του σχεδιαστή.

**Παράδειγμα 4.7** Έστω πάλι το σύστημα του Παραδείγματος 4.6,

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

για το οποίο θέλουμε να σχεδιάσουμε έναν ελεγκτή PID, έτσι ώστε το αντισταθμισμένο σύστημα να ικανοποιεί τις εξής προδιαγραφές:

Σφάλμα σταθερής κατάστασης σε είσοδο μοναδιαίας παραβολής:  $\leq 0,1$

Μέγιστη υπερύψωση:  $\leq 10\%$

Χρόνος αποκατάστασης 2%:  $\leq 2 \text{ sec}$

Λύση: Επειδή η διαδικασία είναι τύπου 1 και το αντισταθμισμένο σύστημα τύπου 2, η σταθερά επιτάχυνσης δίνεται από την,

$$\begin{aligned}
 K_a &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s)G(s) = \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left( K_P + K_D s + \frac{K_I}{s} \right) \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)} = \\
 &= 2K_I
 \end{aligned}$$

Από τις προδιαγραφές σφάλματος σταθερής κατάστασης σε είσοδο μοναδιαίας παραβολής,

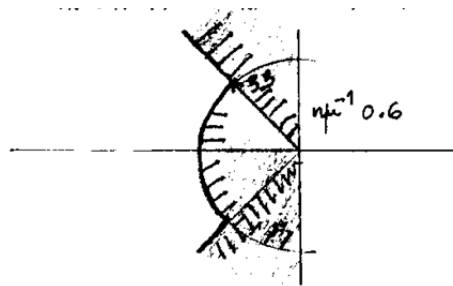
$$e_{ss} = 0,1 = \frac{1}{2K_I} \Rightarrow K_I = 5$$

Οι προδιαγραφές μέγιστης υπερέψωσης και χρόνου αποκατάστασης ορίζουν μία εφικτή περιοχή στο επίπεδο  $s$  που φαίνεται στο Σχ. 4.17. Τα όρια βρίσκονται από τις σχέσεις (4.10),

$$\left. \begin{aligned}
 M_p &= e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}}, 0 \leq \zeta < 1 \\
 &\cong 1 - \frac{\zeta}{0,6}, 0 \leq \zeta \leq 0,6
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \zeta \approx 0,6$$

και (4.11),

$$e^{-\zeta\omega_n t_s} \cong 0,02 \Rightarrow t_s \cong \frac{4}{\zeta\omega_n} \Rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta t_s} \approx 3,3$$



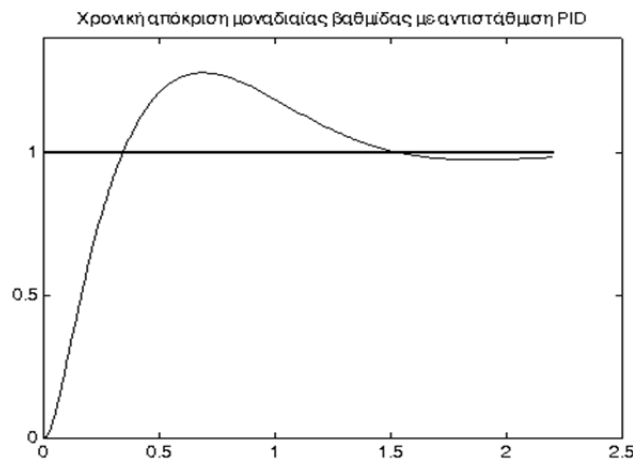
Σχήμα 4.17 Εφικτό σύνολο τιμών για τους πόλους της συνάρτησης μεταφοράς του αντισταθμισμένου συστήματος

Ας επιλέξουμε τον οριακό πόλο  $s_1 = -1,98 + 2,64i$ . Για την τιμή αυτή η (4.6) δίνει,

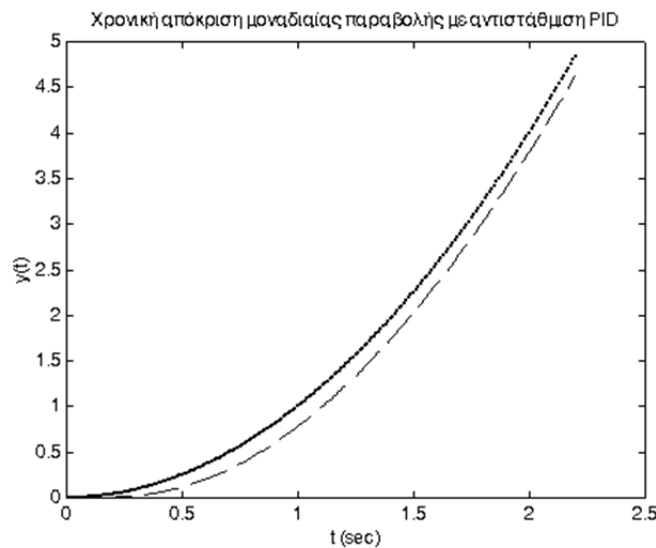
$$K_D = 2,5271 \text{ και } K_P = 0,2442$$

Προς επιβεβαίωση, τα Σχ. 4.18, 4.19 δίνουν τις χρονικές αποκρίσεις του αντισταθμι-

σμένου συστήματος για είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας και μοναδιαίας αναρρίχησης αντίστοιχα.



Σχήμα 4.18 Χρονική απόκριση αντισταθμισμένου συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας



Σχήμα 4.19 Χρονική απόκριση αντισταθμισμένου συστήματος σε είσοδο μοναδιαίας παραβολής

Όπως φαίνεται από τα σχήματα αυτά, οι προδιαγραφές δεν ικανοποιούνται απόλυτα λόγω της αυξημένης υπερύψωσης που είναι της τάξης του 22%. Αυτό οφείλεται στην εισαγωγή μηδενικών από τον ελεγκτή.

Μπορούμε τώρα να επιχειρήσουμε μία αναδρομική σχεδίαση με βάση τις τιμές που βρήκαμε. Στο Σχ. 4.20 εμφανίζονται τα αποτελέσματα αυτής της προσπάθειας για το εύρος τιμών,

$$0,1 \leq K_D \leq 10, \quad 0,1 \leq K_P \leq 10$$

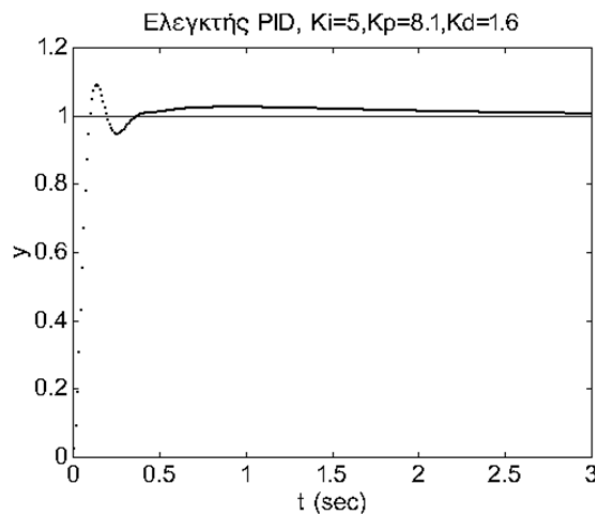
σε διαστήματα 0,5.





Σχήμα 4.20

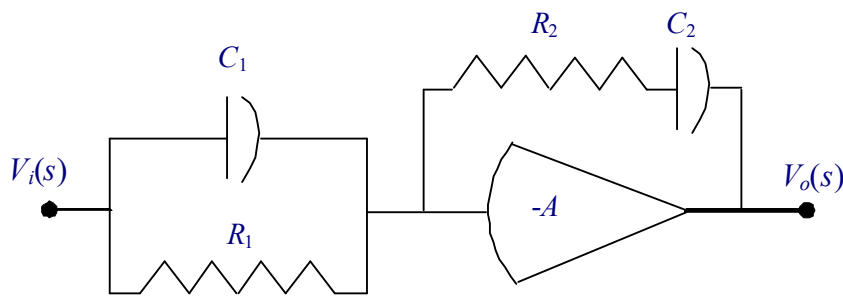
Από το διάγραμμα φαίνεται ότι υπάρχουν αρκετά ζεύγη τιμών που να ικανοποιούν τις προδιαγραφές. Στο Σχ. 4.21 φαίνεται ενδεικτικά η χρονική απόκριση για ένα από αυτά που αντιστοιχεί στις τιμές  $K_D=1,6$  και  $K_P=8,1$ .



Σχήμα 4.21 Έλεγχος PID με βέλτιστες παραμέτρους

### 4.3.2 Πρακτική υλοποίηση ελεγκτών PID

Η βασική μονάδα υλοποίησης των ελεγκτών PID είναι ο **τελεστικός ενισχυτής**. Το ηλεκτρικό του κύκλωμα φαίνεται στο Σχ. 4.22.



Σχήμα 4.22 Υλοποίηση PID

Χρησιμοποιώντας βασικούς κανόνες ηλεκτρικών κυκλωμάτων, η συνάρτηση μεταφοράς του Σχ. 4.22 είναι,

$$G_c(s) = - \left[ \left( \frac{R_2}{R_1} + \frac{C_1}{C_2} \right) + R_2 C_1 s + \frac{R_1 C_2}{s} \right]$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι στους τελεστικούς ενισχυτές η σταθερή απολαβή  $A$  θεωρείται ιδεατά άπειρη.

### 4.3.3 Ελεγκτές προήγησης-καθυστερήσης φάσης

Οι ελεγκτές προήγησης-καθυστερήσης φάσης είναι δομικά απλοί ελεγκτές με συνάρτηση μεταφοράς,

$$G_c(s) = K \frac{s+a}{s+b}$$

όπου τα  $a, b$  είναι πραγματικοί αριθμοί. Εάν το μηδενικό προηγείται του πόλου ( $0 < a < b$ ), ο ελεγκτής ονομάζεται *δίκτυο προήγησης*. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζεται *δίκτυο καθυστέρησης*.

Πώς ο σχεδιαστής ξέρει ποιον από τους δύο ελεγκτές να χρησιμοποιήσει; Αυτό εξαρτάται από τις προδιαγραφές λειτουργίας. Αν για παράδειγμα, απαιτείται σταθεροποίηση του κλειστού συστήματος τότε εάν μεν το ανοικτό σύστημα είναι ευσταθές μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ή τον έναν ή τον άλλο. Εάν όμως η διαδικασία είναι ασταθής, πρέπει να χρησιμοποιηθεί δίκτυο προήγησης. Επιπρόσθετα, ο έλεγχος προήγησης, γενικά:

- Βελτιώνει την σχετική ευστάθεια, αυξάνοντας το περιθώριο φάσης (επιθυμητό).
- Αυξάνει το σφάλμα σταθερής κατάστασης για σταθερό  $K$ , αφού  $a/b < 1$  (ανεπιθύμητο).

- Μειώνει τον χρόνο αποκατάστασης (επιθυμητό).
- Ο έλεγχος καθυστέρησης, γενικά,
- Επιδεινώνει την σχετική ευστάθεια (ανεπιθύμητο).
- Μειώνει το σφάλμα σταθερής κατάστασης (επιθυμητό).
- Αυξάνει τον χρόνο αποκατάστασης (ανεπιθύμητο).

Στην συνέχεια θα περιγράψουμε μία αναλυτική μέθοδο, παρεμφερή με αυτή που χρησιμοποιήθηκε στον έλεγχο PID, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στις δύο περιπτώσεις αφού ουσιαστικά έχουν την ίδια συνάρτηση μεταφοράς. Πρέπει όμως πάντα να έχουμε υπόψη μας ότι οι τεχνικές αυτές υποθέτουν ότι το κλειστό σύστημα μπορεί να προσεγγισθεί από ένα ζευγάρι κυρίαρχων πόλων. Ως εκ τούτου, οι λύσεις πρέπει να θεωρούνται συνήθως ως αρχικές προσεγγίσεις στο πρόβλημα της σχεδίασης, οι οποίες στην συνέχεια μπορούν να βελτιωθούν με την χρήση υπολογιστών.

#### 4.3.3.1 Αναλυτική σχεδίαση δικτύων προήγησης-καθυστέρησης φάσης

Η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή γράφεται,

$$G_c(s) = K \frac{s\tau_z + 1}{s\tau_p + 1}$$

Η ενίσχυση  $K$  βρίσκεται από τις προδιαγραφές σταθεράς κατάστασης, ενώ το επιθυμητό σημείο,  $s_1$ , του γ.τ.ρ. από τις προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης. Στην συνέχεια, ακολουθώντας την λογική της 4.3.1.5, πρέπει να ισχύει η σχέση,

$$G_c(s_1)G_p(s_1) = K \frac{s_1\tau_z + 1}{s_1\tau_p + 1} M_G e^{j\theta_G} = 1 \cdot e^{j\pi}$$

όπου  $G(s_1) = M_G e^{j\theta_G}$ . Γράφοντας το  $s_1$  παρόμοια,  $s_1 = M_{s_1} e^{j\theta_{s_1}}$ , προκύπτει,

$$M_{s_1} e^{j\theta_{s_1}} \tau_z + 1 = \left( \frac{1 \cdot e^{j\pi}}{M_G e^{j\theta_G} K} \right) \left( M_{s_1} e^{j\theta_{s_1}} \tau_p + 1 \right) \quad (4.7)$$

Η εξίσωση αυτή έχει πραγματικά και φανταστικά μέρη, τα οποία εξισώνοντας, δίνει την λύση,

$$\begin{aligned}\tau_z &= \frac{\eta\mu\theta_{s_1} - KM_G\eta\mu(\theta_G - \theta_{s_1})}{KM_G M_{s_1} \eta\mu_G} \\ \tau_p &= -\frac{KM_G\eta\mu\theta_{s_1} + \eta\mu(\theta_G - \theta_{s_1})}{M_{s_1} \eta\mu\theta_G}\end{aligned}\quad (4.8)$$

Προφανώς η λύση αυτή πρέπει να ικανοποιεί και τις συνθήκες για τα  $\tau_z$ ,  $\tau_p$ . Δηλαδή πρέπει αφενός να είναι θετικά και αφετέρου να ικανοποιούν την συνθήκη διάταξης ανάλογα με το είδος του ελεγκτή.

**Παράδειγμα 4.8** Έστω το σύστημα του Παραδείγματος 4.6,

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

Να σχεδιασθεί ένας ελεγκτής προήγησης φάσης έτσι ώστε το κλειστό σύστημα να έχει,

$$\zeta=0,5 \quad \omega_n=13,5 \text{ rad/sec} \quad \text{σταθερά σφάλματος ταχύτητας}=10.$$

Λύση: Από τις προδιαγραφές σφάλματος σταθερής κατάστασης και την (4.18),

$$\begin{aligned}K_v = 10 &= \lim_{s \rightarrow 0} s G_c(s) G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s K \frac{s\tau_z + 1}{s\tau_p + 1} \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)} = \frac{K400}{200} = 2K \\ \Rightarrow K &= 5\end{aligned}$$

Για το  $s_1$ , έστω  $-\sigma + \omega_d i$ . Τότε,

$$\begin{aligned}\sigma &= \zeta\omega_n = 0,5 \cdot 13,5 = 6,75 \\ \omega_d &= \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} = 13,5 \sqrt{1 - 0,5^2} = 11,69\end{aligned}$$

Επομένως,  $M_{s_1} = \sqrt{\sigma^2 + \omega_d^2} = 13,49$ ,  $\theta_{s_1} = \text{τοξεφ} \frac{\omega_d}{-\sigma} = 120^\circ$  και  $s_1 = 13,49 e^{120i}$ .

Αντικαθιστώντας την τιμή αυτή στην  $G(s_1)$  παίρνουμε,

$$G(s_1) = \frac{400}{(-6,75 + j11,69)(13,25 + j11,69)(3,25 + j11,69)}$$

Για να βρούμε το μέτρο και την γωνία της  $G(s_1)$ , χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το μέτρο γινομένου (πηλίκου) μιγαδικών αριθμών ισούται με το γινόμενο (πηλίκο) των επιμέρους μέτρων, ενώ η γωνία με το άθροισμα (διαφορά) των επιμέρους γωνιών.

Έτσι,

$$M_G = \frac{400}{13,49 \cdot 17,67 \cdot 12,13} = 0,13$$

$$\theta_G = \varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{0}{400}\right) - \varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{11,69}{-6,75}\right) - \varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{11,69}{13,25}\right) - \varepsilon\varphi^{-1}\left(\frac{11,69}{3,25}\right) =$$

$$= 0 - 120 - 41,4 - 74,46 = -235,86 = 124,1$$

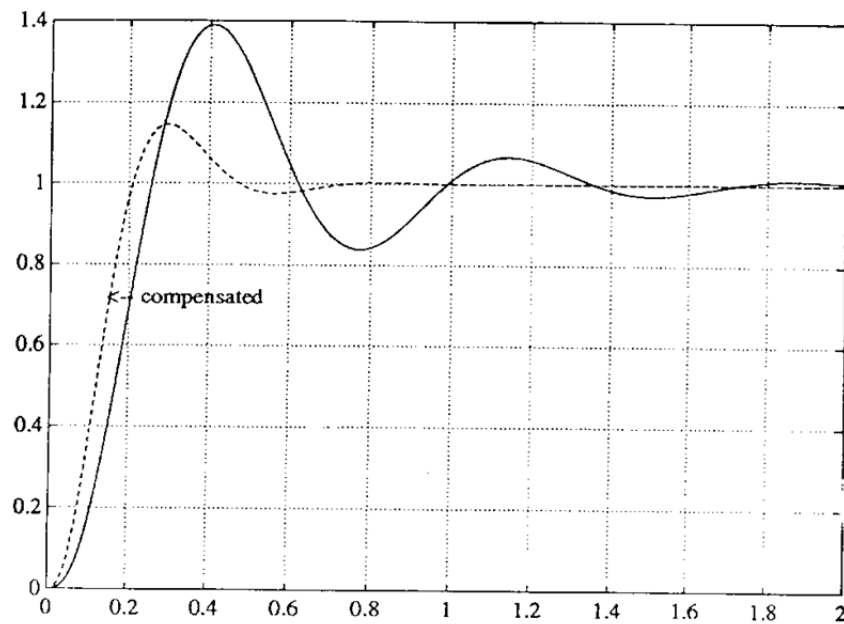
και  $G(s_1) = 0,13e^{124,1i}$ . Θέτοντας τις τιμές αυτές στην (4.8), παίρνουμε,  $\tau_z = 0,1$  και  $\tau_p = 0,027$ . Η λύση αυτή είναι κατ' αρχήν ικανοποιητική αφού  $\tau_z > \tau_p > 0$ . Έτσι ο ελεγκτής μας γίνεται,

$$G_c(s) = 5 \frac{0,1s + 1}{0,027s + 1}$$

Για να δούμε αν ο ελεγκτής ικανοποιεί τις προδιαγραφές πρέπει να σχεδιάσουμε την χρονική απόκριση, έχοντας υπόψη μας ότι οι προδιαγραφές μεταβατικής απόκρισης αντιστοιχούν, βάσει των (4.10), (4.11), σε,

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = 0,6 \quad M_p \approx 1 - \frac{\zeta}{0,6} = 17\%$$

Η χρονική απόκριση σε είσοδο μοναδιαίας βαθμίδας φαίνεται στο Σχ. 4.23, μαζί με την απόκριση μόνο με αναλογικό έλεγχο κέρδους 5 για σύγκριση.



Σχήμα 4.23 Έλεγχος προήγησης φάσης Παραδείγματος 4.8

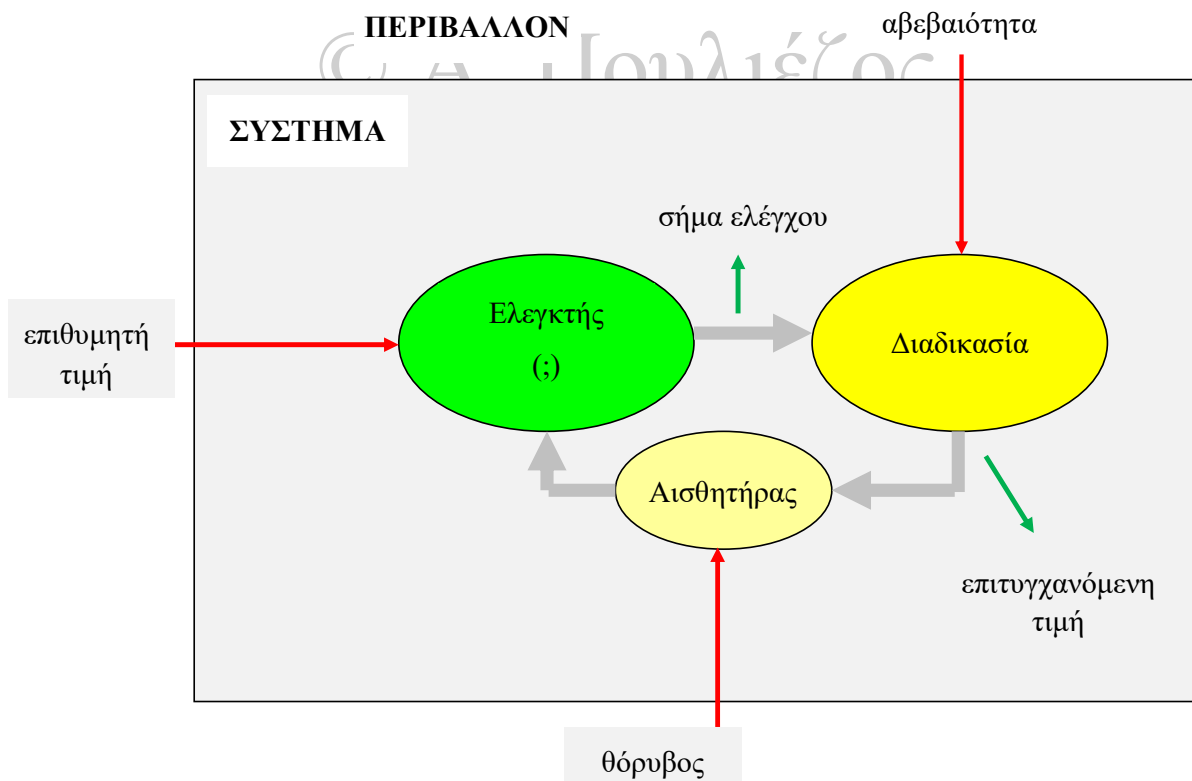
Παρατηρούμε ότι η μέγιστη υπέρψωση είναι περίπου 14% και ο χρόνος αποκατάστασης 0,9sec. Επομένως είμαστε εντός προδιαγραφών. Όσον αφορά το σφάλμα σταθεράς κατάστασης, δεν φαίνεται αλλά είναι σίγουρο ότι έχει επιτευχθεί.

Στην περίπτωση αυτή σταθήκαμε τυχεροί. Γενικά υπάρχει ένα όριο στο σφάλμα σταθεράς κατάστασης που μπορεί να επιτευχθεί με έναν ελεγκτή προήγησης φάσης. Για παράδειγμα αν έπρεπε  $K=10$ , θα παίρναμε αρνητικό  $\tau_p$ . Στην περίπτωση αυτή, επαναλαμβάνουμε την σχεδίαση για άλλες τιμές του  $K$ , μέχρι να πάρουμε ένα ικανοποιητικό ζευγάρι  $\tau_p, \tau_z$ .

## 5 Παραδείγματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετηθούν κάποια ολοκληρωμένα παραδείγματα από τυπικές περιοχές εφαρμογών των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου. Στα παραδείγματα αυτά θα παρουσιασθεί η δομή του συστήματος, τα σχετικά με την αυτοματοποίηση εξαρτήματα (αισθητήρες, επενεργητές, ελεγκτές κλπ.), οι φυσικοί νόμοι που διέπουν τη λειτουργία του συστήματος και το προκύπτον σύστημα κωδικοποιημένο σε ορολογία συστημάτων αυτομάτου ελέγχου: δομικό διάγραμμα, συναρτήσεις μεταφοράς κλπ. Ο στόχος είναι να αποκτηθεί μία, κατά το δυνατόν, πλήρης εικόνα των συστημάτων και να συνδεθούν τα αφηρημένα μαθηματικά με χειροπιαστά παραδείγματα. Αυτό, σε συνδυασμό με τη πειραματική άσκηση, ελπίζω ότι θα κάνει κατανοητό αυτό το ενδιαφέρον επιστημονικό πεδίο.

Οι ενδεικτικές περιοχές εφαρμογών που θα εξετασθούν είναι του ελέγχου στάθμης, θερμοκρασίας, θέσης/ταχύτητας όπως επίσης και κάποια παραδείγματα από το νέο τομέα των αυτοματισμών στην αυτοκινητοβιομηχανία. Οι περιπτώσεις αυτές σε καμιά περίπτωση δεν εξαντλούν τον κατάλογο των εφαρμογών, καλύπτουν όμως ένα μεγάλο μέρος του. Πριν προχωρήσουμε ας θυμηθούμε τη βασική δομή ενός συστήματος αυτομάτου ελέγχου (Σχ. 5.1).



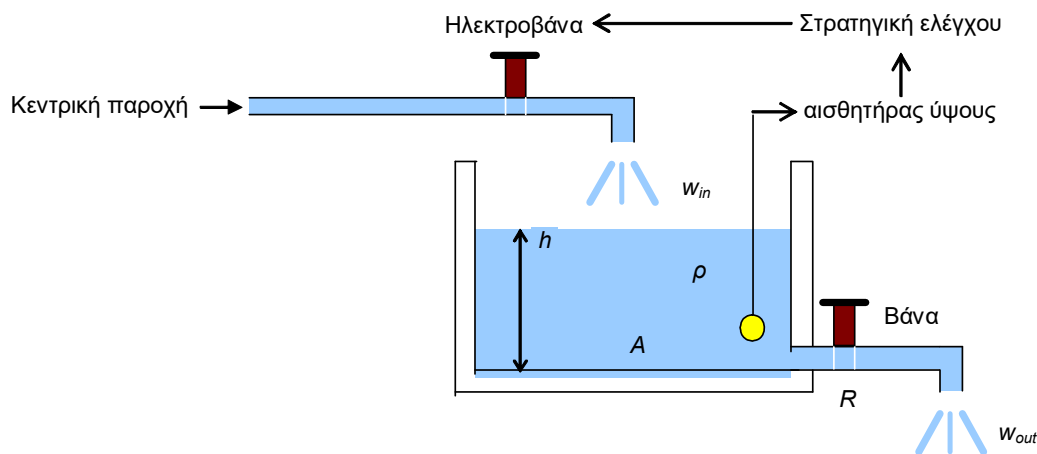
Σχήμα 5.1. Βασική δομή συστημάτων αυτομάτου ελέγχου

Στα παραδείγματα που θα ακολουθήσουν θα αναφερθούμε αναλυτικά σε κάθε ένα από τα στοιχεία που φαίνονται στο Σχ. 5.1. Να σημειωθεί ότι ο ελεγκτής αποτελείται

ουσιαστικά από δύο μέρη: τη στρατηγική ελέγχου και τον επενεργητή.

## 5.1 Έλεγχος στάθμης

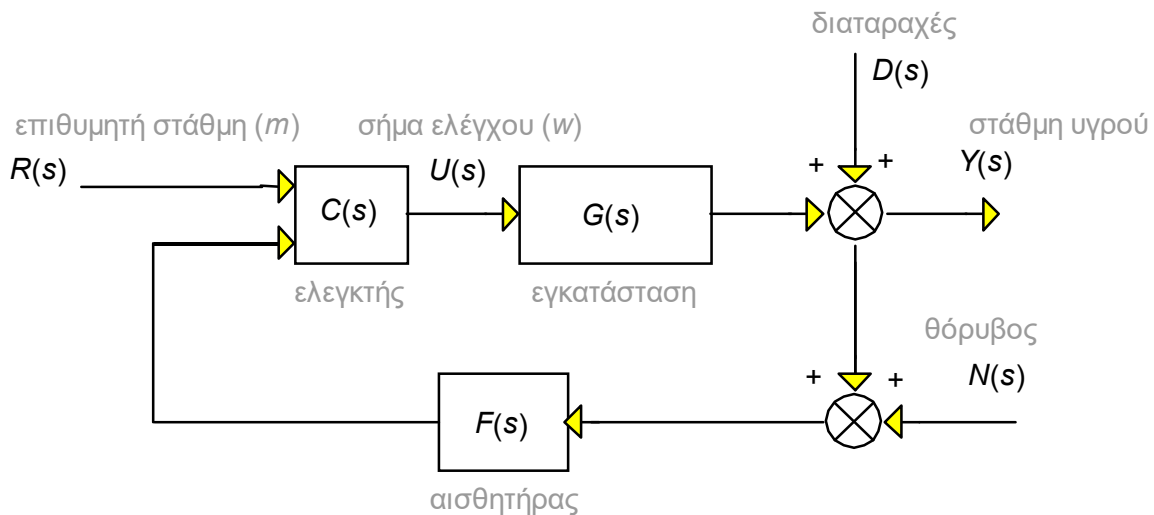
Ο έλεγχος στάθμης είναι από τα παλαιότερα πεδία εφαρμογής των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου (ίσως το πρώτο). Σήμερα απαιτείται σε πλήθος διαδικασιών στη χημική βιομηχανία, στα υδραυλικά δίκτυα κλπ. Το βασικό σχηματικό διάγραμμα φαίνεται στο Σχ. 5.2.



Σχήμα 5.2 Σχηματικό διάγραμμα ελέγχου στάθμης υγρού

Μιλώντας με όρους αυτομάτου ελέγχου, η υπό έλεγχο **διαδικασία** (εγκατάσταση) αποτελείται από τη δεξαμενή υγρού και τη σωλήνα εξόδου. Η δεξαμενή έχει επιφάνεια πυθμένα  $A \text{ m}^2$ , το υγρό είναι πυκνότητας  $\rho$ , και η ροή μέσω της σωλήνας εξόδου είναι συνάρτηση της αντίστασης  $R$ . Ο **ελεγκτής** αποτελείται από τον αισθητήρα ύψους, τη στρατηγική ελέγχου και την ηλεκτροβάννα (επενεργητή). Η **ελεγχόμενη μεταβλητή** είναι η στάθμη  $h$  του υγρού. Το αντίστοιχο δομικό διάγραμμα του συστήματος αυτού φαίνεται στο Σχ. 5.3.





Σχήμα 5.3 Δομικό σύστημα ελέγχου στάθμης υγρού

Η διαδικασία εύρεσης ενός υποδείγματος κατάλληλου για χρησιμοποίηση στα πλαίσια της θεωρίας αυτομάτου ελέγχου ξεκινά από τις βασικές αρχές δυναμικής φυσικών συστημάτων. Δεν πρέπει επίσης να ξεχνάμε ότι η ελεγχόμενη μεταβλητή είναι το ύψος, ενώ η μεταβλητή ελέγχου η ροή. Αυτό σημαίνει ότι το υπόδειγμα μας πρέπει να συσχετίζει αυτές τις δύο ποσότητες.

Θα ξεκινήσουμε από την εύρεση του μαθηματικού υποδείγματος της υπό έλεγχο διαδικασίας.

Σε κάθε ανοικτό φυσικό σύστημα ισχύει ο νόμος της διατήρησης της ύλης, επομένως και εδώ:

$$\dot{m}(t) = w_{in}(t) - w_{out}(t) \quad (5.1)$$

όπου  $w_{in}(t)$  είναι ο ρυθμός εισροής μάζας σε μονάδες (kg/sec),  $w_{out}(t)$  ο ρυθμός εκροής μάζας και  $m(t)$  η μάζα του υγρού που περιέχεται εντός συγκεκριμένων ορίων. Επειδή  $m(t) = \rho Ah(t)$ , όπου  $\rho$  η πυκνότητα του υγρού, η (5.1) γράφεται,

$$\dot{h}(t) = \frac{1}{\rho A} [w_{in}(t) - w_{out}(t)] \quad (5.2)$$

Η ακριβής εύρεση του ρυθμού εκροής  $w_{out}$  στο σωλήνα εκροής δεν είναι απλή υπόθεση γενικά. Σε σωλήνες μικρού μήκους η μάζα του υγρού ανά μονάδα χρόνου είναι αμελητέα και οι δυνάμεις της βαρύτητας και αδράνειας μπορεί να αγνοηθούν. Στη περίπτωση αυτή, μπορεί να εκφρασθεί σαν,

$$w_{out}(t) = \frac{1}{R} [p_1(t) - p_2(t)]^{1/a} \quad (5.3)$$

όπου η σταθερά  $R$  δηλώνει γενικά την "αντίσταση" στη ροή, η  $a$  είναι σταθερά που εξαρτάται από το τύπο του σωλήνα εκροής και  $p_1, p_2$  είναι οι υδροστατικές πιέσεις

στα άκρα του σωλήνα. Η τιμή του  $\alpha$  εξαρτάται κυρίως από την ιξώδη τριβή της ροής: αν η ιξώδης τριβή είναι κυρίαρχη  $\alpha \approx 1$ , ενώ αν είναι αμελητέα  $\alpha \approx 2$ . Στη πρώτη, και απλούστερη περίπτωση, η (5.3) γράφεται,

$$w_{out}(t) = \frac{1}{R} [p_1(t) - p_2(t)] \quad (5.4)$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα οι πιέσεις είναι υδροστατικές και επομένως ανάλογες των υψών. Δηλαδή,

$$\begin{aligned} p_1(t) &= \rho g h_1(t) \\ p_2(t) &= \rho g h_2(t) \end{aligned}$$

όπου  $g$  η επιτάχυνση λόγω της βαρύτητας. Επομένως η (5.4) καταλήγει στην,

$$w_{out}(t) = \frac{\rho g}{R} [h_1(t) - h_2(t)] \quad (5.5)$$

Αν τέλος θεωρήσουμε σωλήνες εξόδου μικρής διατομής,  $h_2(t) = h_2 \approx 0$  και αντικαθιστώντας την (5.5) στην (5.2), παίρνουμε τελικά την ζητούμενη εξίσωση,

$$\begin{aligned} \dot{h}(t) &= \frac{1}{\rho A} \left[ w_{in}(t) - \frac{\rho g}{R} h(t) \right] \\ \Rightarrow \dot{h}(t) + \frac{g}{RA} h(t) &= \frac{1}{\rho A} w_{in}(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

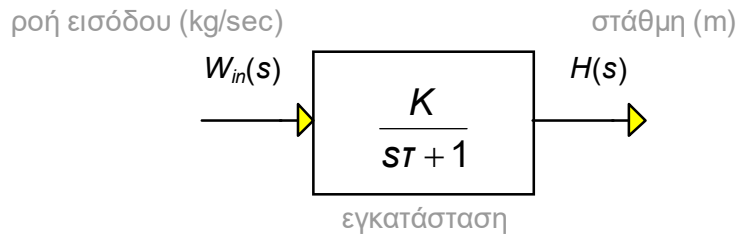
Αυτή είναι η διαφορική εξίσωση που διέπει τη διαδικασία. Στη μελέτη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου, χρησιμοποιούμε συναρτήσεις μεταφοράς που προκύπτουν από τη μετασχηματισμένη κατά Laplace διαφορική εξίσωση. Έτσι, μετασχηματίζοντας την (5.6), παίρνουμε,

$$\begin{aligned} sH(s) - h(0^-) + \frac{g}{RA} H(s) &= \frac{1}{\rho A} W_{in}(s) \Rightarrow \\ H(s) \left[ s + \frac{g}{RA} \right] &= \frac{1}{\rho A} W_{in}(s) + h(0^-) \Rightarrow \\ H(s) &= \frac{R/\rho g}{s \frac{RA}{g} + 1} W_{in}(s) + \frac{RA/g}{s \frac{RA}{g} + 1} h(0^-) \end{aligned}$$

Όταν οι αρχικές συνθήκες είναι μηδενικές (άδεια δεξαμενή), η συνάρτηση μεταφοράς γίνεται,

$$H(s) = \frac{K}{s\tau + 1} W_{in}(s) \quad (5.7)$$

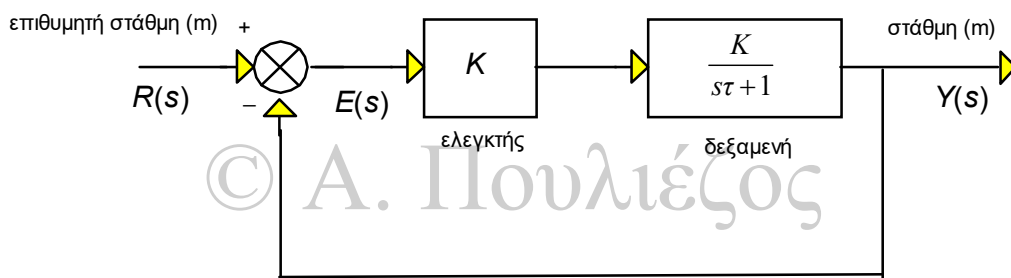
όπου  $K=R/\rho g$  και  $\tau=RA/g$ . Το δομικό διάγραμμα της διαδικασίας είναι λοιπόν,



Για να συμπληρώσουμε την εικόνα του Σχ. 5.3 απομένει η συνάρτηση μεταφοράς του ελεγκτή. Ο τύπος του είναι θέμα μελέτης, έτσι ας θεωρήσουμε για παράδειγμα έναν ελεγκτή αναλογικό του σφάλματος:

$$U(s)=K[R(s)-Y(s)]$$

Με τη μορφή αυτή, το Σχ. 5.3 γίνεται,



Σχήμα 5.4 Σύστημα ελέγχου στάθμης υγρού

Το σύστημα αυτό είναι πρώτης τάξης με χρονική σταθερά  $\tau=RA/g$ .

## 6 Εν είδει επιλόγου

Στα προηγούμενα κεφάλαια παρουσιάστηκαν κάποιες τεχνικές ανάλυσης και σύνθεσης συστημάτων ελέγχου με ανατροφοδότηση. Τα συστήματα αυτά ήταν γραμμικά, με σταθερούς συντελεστές και είχαν μία είσοδο και μία έξοδο. Αποτελούν ένα μικρό υποσύνολο των (γενικότερων) δυναμικών συστημάτων, που μπορούν να μελετηθούν με παρόμοιες μεθόδους.

Ιστορικά, οι τεχνικές αυτές αναπτύχθηκαν για να λύσουν προβλήματα από το πεδίο των τηλεπικοινωνιών και ειδικότερα στη σχεδίαση των ενισχυτών με ανατροφοδότηση (feedback amplifier). Το βασικό σήμα στα τηλεπικοινωνιακά συστήματα είναι η ημιτονοειδής συνάρτηση και γι' αυτό το λόγο το ενδιαφέρον επικεντρώθηκε αρχικά στο πώς μεταβάλλεται η απόκριση του συστήματος σε ημιτονοειδή είσοδο καθώς μεταβάλλεται η συχνότητα της, δηλαδή στην απόκριση συχνότητας. Οι Nyquist<sup>6</sup> και Bode<sup>7</sup> ανέπτυξαν τότε τις γνωστές γραφικές τεχνικές τους για την ανάλυση των συστημάτων, τεχνικές που επιτρέπουν την πρόγνωση της σταθερής κατάστασης σε ημιτονοειδή είσοδο.

Σε αντίθεση, τα πρώτα μηχανολογικά συστήματα αυτομάτου ελέγχου, όπως ρυθμιστές ατμομηχανών, ρυθμιστές θερμοκρασίας, σερβομηχανισμοί κεραιών, αυτόματοι πιλότοι κ.ά., είχαν σαν βασικό στόχο τη διατήρηση κάποιας παραμέτρου σε ανεκτά επίπεδα. Το μαθηματικό υπόδειγμα που χρησιμοποιείτο ήταν η είσοδος μοναδιαίας βαθμίδας, ενώ η ανάλυση απόκρισης συχνότητας δεν ήταν απαραίτητη. Ως επί το πλείστον η τεχνική του Routh<sup>8</sup> ήταν το μόνο εργαλείο που χρησιμοποιείτο για την ανάλυση της ευστάθειας. Η αύξηση της πολυπλοκότητας των συστημάτων αυτών, η σύζευξη τους με ηλεκτρολογικά/ηλεκτρονικά συστήματα και η πίεση του πολέμου, έδωσε νέα ώθηση στην ανάπτυξη των συστημάτων αυτομάτου ελέγχου με προεξάρχοντες τους James, Nichols και Phillips<sup>9</sup> της ομάδας κεραιών ραντάρ του MIT.

Στα 1948 ο W. R. Evans<sup>10</sup> ανέπτυξε τη γραφική μέθοδο του γεωμετρικού τόπου των ριζών που αναδείχθηκε σε κεντρικό εργαλείο σχεδίασης. Η μέθοδος αυτή παρέχει

---

<sup>6</sup> H. Nyquist (1932). "Regeneration Theory", *Bell System Technical Journal*, **11**: 126-147.

<sup>7</sup> H. W. Bode (1945). "Network analysis and feedback amplifier design", D. Van Nostrand, Princeton, N.J.

<sup>8</sup> R. J. Routh (1955). "Dynamics of a system of rigid bodies, Part II", 6<sup>th</sup> rev. ed., arts. 290-307, Dover Publications, Inc., N.Y.

<sup>9</sup> H. M. James, N. B. Nichols and R. S. Phillips (1947). "Theory of Servomechanisms", MIT Rad. Lab. Series No. 25, McGraw Hill Book Company, N.Y.

<sup>10</sup> W. R. Evans (1949). "Graphical analysis of control systems", *Transactions AIEE*, **68**: 765-777.

μία καθαρή εικόνα της ευστάθειας ενός συστήματος και των φυσικών του χαρακτηριστικών, και επιπλέον δείχνει γραφικά πώς οι ιδιότητες αυτές μεταβάλλονται όταν μεταβάλλεται κάποια παράμετρος του (συνήθως το κέρδος).

Στη πράξη σήμερα ο μηχανικός αυτομάτου ελέγχου επιλέγει τη μέθοδο ανάλυσης και σχεδίασης ανάλογα με το συγκεκριμένο πρόβλημα και συνήθως συνδυάζει και τις δύο. Οι σύγχρονες απαιτήσεις ευρωστίας σε διαταραχές και θόρυβο απαιτούν μεθόδους ανάλυσης συχνότητας ακόμη και σε εφαρμογές όπου οι εισοδοί είναι βηματικές συναρτήσεις. Στις περιπτώσεις αυτές οι ημιτονοειδείς συναρτήσεις αντιπροσωπεύουν ανεπιθύμητες εισόδους που πρέπει να απορριφθούν σε αντίθεση προς τις βηματικές που πρέπει να ακολουθηθούν. Δυστυχώς ο περιορισμένος χώρος, αλλά και σκοπός του παρόντος συγγράμματος, απαγορεύουν την ανάπτυξη και των δύο προσεγγίσεων. Επέλεξα τη συγκεκριμένη ύλη γιατί αφ' ενός είναι πιο προσιτή σε άτομα που ακούν την θεωρία για πρώτη φορά και αφ' ετέρου είναι μια πολύ καλή εισαγωγή στην ολοκληρωμένη θεωρία.

© Α. Πουλιέζος

## Βιογραφίες



**Laplace**, Pierre Simon (1749-1827).

Διακεκριμένος Γάλλος (από το Beaumont-en-Age της Νορμανδίας) μαθηματικός, γνωστός κυρίως από τον μετασχηματισμό που φέρνει τ' όνομά του.

© Α. Πουλιέζος

## Βιβλιογραφία

### Ελληνική

Βαφειάδης, Μαθήματα Συστημάτων Ελέγχου, 2η έκδ.

Καλλιγερόπουλος, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου.

Καρύμπακας Κ.Α. και Ε.Σ. Σερβέτας (1977). Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (τόμοι 3), Αθήνα.

King R., Πληροφορικός Έλεγχος.

Κράνας, Βιομηχανικοί αυτοματισμοί, 5η έκδ.

Κρικέλης Ν.Ι. (1985), Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο, Αθήνα.

Κρικέλης Ν.Ι., Μοντελοποίηση & Βέλτιστος Έλεγχος Συστημάτων.

Κωνσταντέλιας, Συστήματα αυτομάτου ελέγχου Ι & ΙΙ.

Μαχιάς, Συστήματα Αυτόματου Ελέγχου & Αναλογικοί Υπολογιστές.

Πακτίτης Σ. (1987). Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου. Εκδόσεις ΙΩΝ, Αθήνα.

Πανταζής, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Θεωρία & Εργαστήριο.

Παρασκευόπουλος Π.Ν., Αναγνώριση Συστημάτων & Προσαρμοστικός Έλεγχος.

Παρασκευόπουλος Π.Ν., Λυμένες Ασκήσεις Συστημάτων Αυτ. Ελέγχου με Εφαρμογές.

Παρασκευόπουλος Π.Ν. (1984), Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (τόμοι 2), Αθήνα.

Παρασκευόπουλος Π.Ν. (1991), Εισαγωγή στον Αυτόματο Έλεγχο, Αθήνα.

Παρασκευόπουλος Π.Ν. (1991), Έλεγχος Συστημάτων με Υπολογιστές, Αθήνα.

Πετρίδης, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (τόμοι 2).

Σωτηράκης, Αυτοματισμός: υλικά-θεωρία-εφαρμογές.

Τζαφέστας Σ., Μαθήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Εισαγωγή στον κλασσικό αυτόματο έλεγχο.

Τζαφέστας Σ., Μαθήματα Αυτομάτου Ελέγχου: Τεχνικές ανάλυσης και σχεδίασης, Βιομηχανικές εφαρμογές (2 τόμοι).

Τζαφέστας Σ., Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου (3 τόμοι).

## Αγγλική

Xander, Συστήματα Αυτομάτου Ελέγχου με Ηλεκτ. Στοιχεία.

Cannon H.R. Jr. (1967). Dynamics of Physical Systems. McGraw Hill.

Chen C.T. (1984). Linear System Theory and Design. Holt, Rinehart and Winston.

D'Azzo J.J. and C.H. Houpis (1988). Linear Control Systems: Analysis and Design. McGraw Hill.

Dorf R.C (1989). Modern Control Systems. Addison-Wesley.

Franklin G.F., Powell J.D. and A. Emami-Naeini (1986). Feedback Control of Dynamic Systems. Addison-Wesley.

Jacobs O.L.R. (1993). Introduction to Control Theory. Oxford University Press, New York.

Shahian B. and M. Hassul (1993). Control System Design using MATLAB. Prentice Hall, New Jersey.

Kailath T. (1980). Linear Systems. Prentice Hall.

Kuo B.C. (1990). Automatic Control Systems. Prentice Hall of India, New Delhi.

Kuo B.C. and D.C. Hanselman (1994). MATLAB Tools for Control System Analysis and Design. Prentice Hall, MATLAB Curriculum Series, New Jersey.

Ogata K. (1990). Modern Control Engineering. Prentice Hall.

Rohrs C.E., Melsa J.L. and D.G. Schulz (1993). Linear Control Systems. McGraw Hill.

van de Vegte J. (1986). Feedback Control Systems. Prentice Hall, New Jersey.

Astrom, PID Control: Theory, Design and Tuning 2nd Edition.

Bennett, Real-time computer control : an introduction 2ed/94.

Bishop, Modern Control Systems : Anal. & Des. Usi. MATLAB/93.

Bissell, Control engineering/88.

Brogan, Modern control theory 3/ed/91.

D'Azzo, Feedback control system analysis-synthesis.

D' Azzo, Linear control system analysis and design 4/ed/95.



- Distefano, Interactive Feedback & Control Systems/95.
- Doebelin, Control system principles & design.
- Dorf, Modern Control Systems 7/ed/95.
- Driels, Linear Control Systems Engineering.
- Franklin, Feedback Control of Dynamic Systems 3/ed/94.
- Franklin, Feedback control of dynamic sys. solut. manual 2/.
- Friedland, Control system design/87.
- Golten, Control system design and simulation +disk/91.
- Gopal, Modern Control System Theory 2/ed/95.
- Gopal, Modern Control System Theory ind/84.
- Harriott, Process control ind/91.
- Hostetter, Digital control system design/88.
- Houpis, Digital Control Systems 2/ed/92.
- Jamshidi, Computer-Aided Analysis & Des. of Linear Control.
- Kucera, Analysis & Design of Discrete Linear Contr. Sst.
- Kuo, Automatic control systems 7/ed.
- Kuo, Digital Control Systems /2ed/92.
- Kuo, MATLAB Tools for Control System Analysis & Design/95.
- Kuo, Software manual to automatic control systems.
- Leigh, Applied digital control 2/ed/92.
- Maday, Comp-aided power system analysis-control.
- Marlin, Process Control: Designing Processes & Control Systems.
- Matko, Simulation & Modelling of Continuous Systems.
- Miron , Design-feedback control systems.
- Mollenkamp, Introduction to automatic process control.

Morris, Automated Manufacturing Systems: Actuators, controls, Se.

Netushil, Theory of automatic control.

Nise, Control Systems Engineering /95.

Ogata, Design Linear Control Systems with MATLAB.

Ogata, Discrete-time Control System /94

Ogata, Modern control engineering 2/ed/90

Ogata, Solving control engineering problems with MATLAB

Olsson, Computer systems for automation & control /92

Phillips, Digital control system analysis & design 2/ed/9

Phillips, Feedback control systems 2/ed/88

Raven , Automatic control engineering 5/ed/95

Rea, Automatic control systems/robot. probl. solver /82

Saadat, Computation Aids in control Systems using MATLAB TM/

Savic, Basic control theory

Shinskey, Feedback Controllers for the Process industry /94

Sinclair, Sensors & Transducers 2/ed/92

Soloman, Sensors & Control Systems in Manufacturing /94

Stenerson, Fundamentals of PLC, Sensors & Communications /93

Vaccaro, Digital Control

Westphal, Sourcebook of Control System Engineering

Craig, Introduction to robotics 2/ed/89

Fu, Robotics: control, sensing, vision /87

Fuller, Robotics /91

Gibilisco, Encyclopedia Robotics & Artificial Intellig./94

Groover, Industrial Robotics /88

Haralick, Computer And Robot Vision Vols. 1, 2

Hodges, Industrial Robotics /2ed/92

Horn, Robot Vision

Hunt, Understanding robotics

Klafter, Robotic engineering /89

Klafter, Robotic engineering, and integrated approach /89

Kozyrev, Robot Work Cells

Kuleshov, Remotely controlled robots & manipulators

McComb, The robot builder's bonanza: 99 inexpens. rob./87

Miller, Fundamentals of industrial robots & robotics /88

Robillard, Advanced robot systems

Sandler, Robotics /91

Schilling, Fundamentals of robotics, analysis & control /90

Schuler, Industrial electronics & robotics /88

Stadler, Analytical Robotics and Mechatronics

Vernon, Machine Vision /91

## Εκδοχολόγιο

3.8: Μικρές διορθώσεις (Σχ. 5.1 κλπ).

© Α. Πουλιέζος